E 1426

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE
DIN REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA

GAZETA MATEMATICĂ

SERIA B

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XVII — ianuarie 1966

1

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

GAZETA MATEMATICĂ
SERIA B
Anul XVII, nr. 1 — ianuarie 1966

SUMARUL

1. În noul an 1
2. Activul comitetului de redacție al Gazetei matematice seria B pe anul 1966 2
3. Congruențe de C. Popovici 3
4. Asupra unei expresii algebrice de T. Zamfirescu 9
5. Note matematice de M. Focșeneanu, C. Herling, C. Ionescu-Țiu 12
6. Probleme rezolvate (6915. 6919, 6973, 6976, 6999, 7013, 7126, 7128, 7129, 7130, E: 2326, 2329, 2330, 2332. 2334, 2335) . . 16
7. Chestiuni de examen (7311—7323) 27
8. Probleme propuse (7324—7354) 29
9. Exerciții și probleme propuse pentru clasele V — VII (E: 2429—2449) 35
10. Caleidoscop matematic 39
11. Cărți noi 40
12. Rubrica rezolvitorilor de probleme 41

ANUL XVII 1 IANUARIE

COMITETUL DE REDACȚIE

Dincă N., profesor ; *Grosu A.*, profesoară ; *Ionescu Bujor C.*, prof. univ. emerit ; *Ionescu-Țiu C.*, profesor, redactor șef adjunct ; *Kiss E.*, conf. univ. (Cluj) ; *Kovacs K.*, conf. univ. (Cluj) ; *Mușat I.*, profesor ; *Ottescu C.*, profesor ; *Plăvițu M.*, profesor ; *Sacter O.*, conf. univ., redactor șef ; *Simionescu Gh.*, conf. univ. ; *Țene L.*, profesoară și *Voinea R.* prof. *univ.*

REDACȚIA : Str. Academiei, 14 — Tel. 14.46.53 — București

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondența privitoare la activitatea matematică a școlilor, precum și orice material informativ se vor trimite pe adresa de mai sus.

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT

GAZETA MATEMATICĂ

SERIA B

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XVII nr. 1 — ianuarie 1966

ÎN NOUL AN

Pe tot cuprinsul patriei, poporul nostru a început cu elan realizarea noului plan cincinal.

Congresul al IX-lea al Partidului Comunist Român a stabilit în acest plan direcțiile de dezvoltare în următorii cinci ani, în vederea continuării pe o treaptă superioară a procesului de desăvîrșire a construcției socialiste în toate domeniile de activitate economică, științifică și culturală.

Partidul acordă o mare însemnătate științei și învățămîntului, punînd dezvoltarea acestora în rîndul sarcinilor de bază ale planului economic pe anii 1966—1970.

Rolul învățămîntului și perspectiva sa sînt minunat arătate în Raportul Comitetului Central al Partidului prezentat de tovarășul Nicolae Ceaușescu la Congres, astfel :

Școala, principalul izvor de cultură și factor de civilizație va cuprinde în țara noastră în următorii cinci ani, aproape un sfert din populație.

Totodată muncii științifice îi sînt create ample posibilități de ridicare a nivelului și eficienței prin noua lege cu privire la înființarea, organizarea și funcționarea Consiliului Național al Cercetării Științifice și printr-un ansamblu de măsuri stimulatorii. Numai pentru dezvoltarea bazei tehnico-materiale a științei se vor acorda în cincinal, peste 7 miliarde lei.

Sume importante sînt prevăzute și pentru dezvoltarea școlii. Astfel, în bugetul de Stat pe anul 1966 învățămîntului îi sînt destinate 7,2 miliarde lei.

Rolul pe care îl are școala în statul nostru socialist, grija acordată școlii de către partid și guvern, conferă o mare răspundere profesorilor și elevilor. Prin ridicarea continuă a calității activității acestora, școala trebuie să-și îndeplinească frumoasa misiune de a da patriei absolvenți cu un înalt nivel de cultură, cetățeni care să prețuiască munca și să-și iubească țara.

În realizarea acestei luminoase opere, un aport însemnat îl au și publicațiile destinate școlii.

Continuînd și perfecționînd în noul an activitatea sa, Gazeta Matematică își va aduce cu entuziasm contribuția la lărgirea pregătirii matematice a tineretului din școli, la educarea lui, la formarea bazei științifice a viitorilor ingineri, matematicieni, fizicieni, chimiști, economiști, necesari producției, științei și culturii din satul nostru socialist.

Cu prilejul aniversării din septembrie 1965 a celor 70 de ani de apariție neîntreruptă a Gazetei Matematice a fost subliniată importanța acestei reviste și serviciile pe care ea le-a adus școlii și științei din România. Aceste realizări sînt rezultatul entuziasmului și muncii tuturor colaboratorilor revistei.

Cu avînt sporit va trebui să activăm în noul an, profesori și elevi, pentru a face ca rodul Gazetei Matematice să fie mai bogat, mai bun, mai util operei de formare a viitoarelor cadre necesare desăvîrșirii construcției socialismului, a viitorilor constructori ai comunismului.

În acest sens, Societatea de științe matematice din Republica Socialistă România a adoptat o serie de măsuri pentru creșterea eficienței activității redacției revistei noastre, pentru ridicarea nivelului muncii colective, pentru a atrage în munca redacțională și cadre didacice tinere. În cele ce urmează dăm, în ordine alfabetică, numele persoanelor din colectivele formate în acest scop.

ACTIVUL COMITETULUI DE REDACȚIE
AL GAZETEI MATEMATICE SERIA B PE ANUL 1966

Aritmetică și algebră: *P. V. Constantinescu*, conf. — Universitatea București; *Greta Despa*, prof. ș. g. 51; *N. Dincă*, prof. Lic. 17 Matei Basarab; *Gh. Galbură*, prof. Universitatea București; *C. P. Popovici*, conf. Universitatea București.

Geometrie plană și în spațiu: *Măriuca Hălălău*, prof. Lic. 4 Aurel Vlaicu; *C. Ionescu-Bujor*, prof. univ. emerit, Inst. Politehnic Gheorghe Gheorghiu-Dej; *Mihaela Mihăilescu*, prof. ș. g. 12; *C. Udriște*, asistent Inst. Politehnic Gheorghe Gheorghiu-Dej; *T. Zamfirescu*, student anul V.

Geometrie analitică și proiectivă: *Gh. Th. Gheorghiu*, prof. univ. Inst. Politehnic Gheorghe Gheorghiu-Dej; *Anca Grosu*, prof. Lic. 13 Mihai Viteazul; *Gh. Rizescu*, prof. Lic. 11 D. Cantemir.

Trigonometrie: *C. Ionescu-Țiu*, prof. Lic. 1 N. Bălcescu; *L. Pîrșan*, student anul V; *Gh. D. Simionescu*, conf. univ. Inst. Politehnic Gheorghe Gheorghiu-Dej; *Lucia Țene*, prof. Lic. 13 Mihai Viteazul.

Analiză matematică: *S. Brener*, prof. Lic. 6; *N. Dinculeanu*, conf. univ. Universitatea București; *Tatiana Jarchy*, prof. ș. g. 65; *C. Ottescu*, prof. Lic. 36.

Mecanică și astronomie: *Gr. Bănescu*, prof. Lic. 34 C. A. Rosetti; *C. Drimbă*, prof. Universitatea București; *Al. Stoenescu*, prof. univ. Inst Politehnic Gheorghe Gheorghiu-Dej; *R. Voinea*, prof. univ. Inst. Politehnic Gheorghe Gheorghiu-Dej

Calculul probabilităților și statistică matematică: *H. Ionescu*, prof. univ. Inst. de științe economice V. I. Lenin; *M. Iosifescu*, cercetător principal la C.S.M.; *N. Teodorescu*, prof. Lic. 34 C. A. Rosetti.

Istoria matematicii: *M. Plăviţu*, prof. Lic. 17 Matei Basarab; *E. Toth*, conf. Universitatea Bucureşti.
Matematici pentru şcoli profesionale, licee de specialitate, şcoli generale: *Smaranda Hortopan*, prof. emerit, Grupul şcolar I. Ranghet; *I. Şt. Muşat*, prof. Lic. 1 N. Bălcescu; *O. Sacter*, conf. univ. Inst. Politehnic Gheorghe Gheorghiu-Dej; *Emilia Stănescu*, prof. ş. g. 169; *Laura Vizuru*, prof. Lic. 25.
Colectiv redacţional: *C. Ionescu-Ţiu* (note, probleme, evidenţieri); *O. Sacter*, (articole, caleidoscop matematic, editoriale); *N. Teodorescu* (rubrica rezolvitorilor, cercuri de elevi); *Lucia Ţene* (rubrica rezolvitorilor, poşta redacţiei).

CONGRUENŢE

de conf. univ. *CONSTANTIN P. POPOVICI* (Univ. Bucureşti)

Sub denumirea de congruenţe înţelegem tot ce poate fi spus în legătură cu o relaţie stabilită între numere întregi şi denumită relaţie de congruenţă. Ca orice relaţie între numere întregi, cum e, de exemplu, relaţia de egalitate, relaţia de congruenţă are o serie de proprietăţi care o fac să fie un instrument extrem de util în teoria numerelor. Proprietăţile relaţiei de congruenţă sînt asemănătoare cu cele ale relaţiei de egalitate între numere întregi şi de aceea în studiul relaţiei de congruenţă apar multe aspecte care apar şi în studiul relaţiei de egalitate. În cele ce urmează, vom căuta să punem în evidenţă cîteva din aspectele ce apar în studiul relaţiei de congruenţă.

Relaţia de congruenţă între numere întregi poate fi definită în două moduri.

Primul mod de a defini relaţia de congruenţă între numere întregi este următorul:

Două numere întregi a şi b se numesc congruente modulo m, m fiind un număr întreg, dacă m divide pe $a-b$.

A spune că m divide pe $a-b$ înseamnă a afirma că există un număr întreg c astfel încît produsul mc să fie egal cu $a-b$. Vom adopta notaţia $m \mid a-b$ pentru a afirma că m divide pe $a-b$. Trebuie reţinut că definiţia de mai sus a relaţiei de congruenţă între numere întregi este dată cu ajutorul relaţiei de divizibilitate între numere întregi, care se defineşte spunînd că *un număr întreg β divide un număr întreg α dacă există un număr întreg γ care înmulţit cu β să ne dea pe α*. Notaţia prin care se arată că β divide pe α este $\beta \mid \alpha$.

Al doilea mod de a defini relaţia de congruenţă între numere întregi este următorul:

Două numere întregi a şi b se numesc congruente modulo m, m fiind un număr întreg, diferit de zero, dacă prin aplicarea teoremei împărţirii întregi lui a şi m obţinem acelaşi rest ca şi la aplicarea teoremei împărţirii întregi lui b şi m.

A aplica teorema împărţirii întregi lui a şi m înseamnă a găsi două numere între q şi r astfel încît să avem relaţiile

$$a = mq + r, \qquad 0 \leqslant r < |m|,$$

unde m între două bare verticale este valoarea absolută a lui m.

A aplica teorema împărţirii întregi lui b şi m înseamnă a găsi două numere întregi Q şi R astfel încît să avem relaţiile

$$b = mQ + R, \qquad 0 \leqslant R < |m|.$$

După a doua definiţie a relaţiei de congruenţă între numere întregi, se spune că numerele întregi a şi b sînt congruente modulo m dacă $r = R$. Trebuie reţinut că în cea de a doua definiţie a relaţiei de congruenţă între numere întregi, numărul întreg m este diferit de zero, deoarece fiind vorba de aplicarea teoremei împărţirii întregi, împărţitorul, adică m, trebuie să fie diferit de zero.

Fiecare din cele două definiţii ale relaţiei de congruenţă între numere întregi are însemnătatea sa. Astfel prima definiţie, fiind bazată pe relaţia de divizibilitate între numere întregi, poate fi generalizată la întregi algebrici, care sînt rădăcini ale polinoamelor de o variabilă cu coeficienţi numere întregi, coeficientul termenului de gradul cel mai mare fiind egal cu unu. A doua definiţie, fiind bazată pe teorema împărţirii întregi, nu poate fi generalizată decît la acei întregi algebrici pentru care poate fi demonstrată teorema împărţirii întregi. În schimb, în cazul numerelor întregi, din cea de a doua definiţie a relaţiei de congruenţă între numere întregi, rezultă că există un număr finit de numere întregi, anume acele numere întregi r care satisfac relaţiile $0 \leqslant r < |m|$, astfel încît orice număr întreg să fie congruent modulo m cu unul şi numai cu un singur număr întreg dintre aceste numere întregi r.

De altfel, *cele două definiţii ale relaţiei de congruenţă sînt echivalente în cazul cînd m este diferit de zero.*

Într-adevăr, dacă două numere întregi a şi b sînt congruente modulo m, după prima definiţie, avem $m \mid a - b$, adică $a - b = mc$, c fiind un număr întreg. Deci $a = mc + b$. Aplicînd teorema împărţirii întregi lui b şi m, ceea ce putem face, deoarece am presupus că $m \neq 0$, obţinem $b = mq + r$, $0 \leqslant r < |m|$. Dar atunci $a = mc + mq + r$ sau $a = m(c+q) + r$, $0 \leqslant r < |m|$, ceea ce constituie aplicarea teoremei împărţirii întregi lui a şi m, deoarece cîtul şi restul din teorema împărţirii întregi fiind unice, nu contează modul cum ajungem la relaţiile care exprimă teorema împărţirii întregi. Se constată că la aplicarea teoremei împărţirii întregi lui a şi m obţinem acelaşi rest ca şi la aplicarea teoremei împărţirii întregi lui b şi m, deci dacă numerele întregi a şi b sînt congruente modulo m după prima definiţie, ele sînt congruente modulo m şi după a doua definiţie.

Reciproc, dacă două numere întregi a şi b sînt congruente modulo m după a doua definiţie, avem, aplicînd teorema împărţirii întregi : $a = mq_1 + r$, $0 \leqslant r < |m|$, $b = mq_2 + r$, $0 \leqslant r < |m|$. Scăzînd membru cu membru aceste două relaţii, obţinem $a - b = m(q_1 - q_2)$, deci $m \mid a - b$, deoarece $q_1 - q_2$ este număr întreg, adică dacă numerele întregi a şi b sînt congruente modulo m după a doua definiţie, ele sînt congruente modulo m şi după prima definiţie.

Cele două definiţii ale relaţiei de congruenţă între numere întregi fiind echivalente în cazul cînd $m \neq 0$, vom nota într-un singur mod

faptul că numerele întregi a şi b sînt congruente modulo m şi anume după cum urmează :

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Această notaţie o vom utiliza şi în cazul cînd $m = 0$, iar relaţia de congruenţă între numere întregi este dată după prima definiţie. Notaţia $a \equiv b \pmod{m}$ se citeşte : a este congruent cu b modulo m. Numărul întreg m se numeşte modulul relaţiei de congruenţă.

Trecem, acum, la proprietăţile relaţiei de congruenţă pe care le vom demonstra conform cu prima definiţie a acestei relaţii. Aceste proprietăţi sînt următoarele :

1. *Relaţia de congruenţă este determinată*, adică două numere întregi a şi b sau sînt congruente modulo m sau nu sînt congruente modulo m, pentru că numărul întreg m sau divide pe $a-b$ sau nu divide pe $a-b$. Se notează cu $a \not\equiv b \pmod{m}$ faptul că două numere întregi a şi b nu sînt congruente modulo m.

2. *Relaţia de congruenţă este reflexivă*, adică $a \equiv a \pmod{m}$, oricare ar fi numărul întreg a, atunci cînd modulul m este dat. Într-adevăr, m divide pe zero, deoarece zero este număr întreg şi înmulţindu-l pe m cu zero obţinem pe zero. Dar $a - a = 0$ deci m divide pe $a - a$ oricare ar fi numărul întreg a şi deci $a \equiv a \pmod{m}$.

3. *Relaţia de congruenţă este simetrică*, adică dacă $a \equiv b \pmod{m}$, atunci $b \equiv a \pmod{m}$. Într-adevăr, dacă $a \equiv b \pmod{m}$, există un număr întreg c astfel încît $a - b = mc$. Dar atunci $b - a = m(-c)$, iar $-c$ este un număr întreg deci m divide pe $b - a$ şi deci $b \equiv a \pmod{m}$.

4. *Relaţia de congruenţă este tranzitivă*, adică dacă $a \equiv b \pmod{m}$ şi $b \equiv c \pmod{m}$, atunci $a \equiv c \pmod{m}$. Într-adevăr, dacă $a \equiv b \pmod{m}$, există un număr întreg q astfel încît $a - b = mq$, iar dacă $b \equiv c \pmod{m}$ există un număr întreg r astfel încît $b - c = mr$. Dar atunci $(a - b) + (b - c) = mq + mr$ sau $a - c = m(q + r)$, unde $q + r$ este un număr întreg deci m divide pe $a - c$ şi deci $a \equiv c \pmod{m}$.

Orice relaţie care este determinată, reflexivă, simetrică şi tranzitivă se numeşte relaţie de echivalenţă. Deci relaţia de congruenţă între numere întregi este o relaţie de echivalenţă.

5.a) *Două relaţii de congruenţă în raport cu un acelaşi modul se adună membru cu membru*, adică dacă $a \equiv b \pmod{m}$ şi $c \equiv d \pmod{m}$, atunci $a + c \equiv b + d \pmod{m}$. Într-adevăr, dacă $a \equiv b \pmod{m}$ există un număr întreg q astfel încît $a - b = mq$, iar dacă $c \equiv d \pmod{m}$ există un număr întreg r astfel încît $c - d = mr$. Dar atunci $(a - b) + (c - d) = mq + mr$ sau $(a + c) - (b + d) = m(q + r)$, unde $q + r$ este un număr întreg deci m divide pe $(a + c) - (b + d)$ şi deci $a + c \equiv b + d \pmod{m}$.

b) *Două relaţii de congruenţă în raport cu un acelaşi modul se scad membru cu membru*, adică dacă $a \equiv b \pmod{m}$ şi $c \equiv d \pmod{m}$, atunci $a - c \equiv b - d \pmod{m}$. Într-adevăr, dacă demonstraţia proprietăţii precedente o modificăm scriind $(a - b) - (c - d) = mq - mr$, obţinem $(a - c) - (b - d) = m(q - r)$, unde $q - r$ este un număr întreg, deci m divide pe $(a - c) - (b - d)$ şi deci $a - c \equiv b - d \pmod{m}$.

c) *Într-o relație de congruență se poate trece un număr întreg dintr-un membru în altul al relației de congruență cu semnul schimbat*, adică dacă $a \equiv b + c \pmod{m}$, atunci $a - c \equiv b \pmod{m}$. Într-adevăr, dacă $a \equiv b + c \pmod{m}$, există un număr întreg q astfel încît $a - (b + c) = mq$. Deci $(a - c) - b = mq$ și atunci $a - c \equiv b \pmod{m}$.

6. a) *Două relații de congruență în raport cu un același modul se înmulțesc membru cu membru*, adică dacă $a \equiv b \pmod{m}$ și $c \equiv d \pmod{m}$, atunci $ac \equiv bd \pmod{m}$. Într-adevăr, dacă $a \equiv b \pmod{m}$, există un număr întreg q astfel încît $a - b = mq$, iar dacă $c \equiv d \pmod{m}$ există un număr întreg r astfel încît $c - d = mr$. Dar atunci $(a - b)c + b(c - d) = mqc + bmr$ sau $ac - bd = m(qc + br)$, unde $qc + br$ este un număr întreg, deci m divide pe $ac - bd$ și deci $ac \equiv bd \pmod{m}$.

b) *Ambii membri ai unei relații de congruență se pot înmulți cu orice număr întreg înmulțind în același timp și modulul*, adică dacă $a \equiv b \pmod{m}$, atunci $ac \equiv bc \pmod{mc}$, oricare ar fi numărul întreg c. Într-adevăr, dacă $a \equiv b \pmod{m}$, există un număr întreg q astfel încît $a - b = mq$. Dar atunci $(a - b)c = mqc$ sau $ac - bc = (mc)q$, unde q este un număr întreg, deci mc divide pe $ac - bc$ și deci $ac \equiv bc \pmod{mc}$.

c) *Ambii membri ai unei relații de congruență se pot simplifica cu orice factor comun al lor diferit de zero care este divizor al modulului, modulul congruenței obținute fiind cîtul dintre vechiul modul și numărul cu care simplificăm*, adică dacă $ac \equiv bc \pmod{mc}$, și $c \neq 0$, atunci $a \equiv b \pmod{m}$. Într-adevăr, dacă $ac \equiv bc \pmod{mc}$ există un număr întreg q astfel încît $ac - bc = (mc)q$ sau $(a - b)c = (mq)c$. Deoarece $c \neq 0$, prin simplificare obținem $a - b = mq$, unde q este un număr întreg, deci m divide pe $a - b$ și deci $a \equiv b \pmod{m}$.

d) *Ambii membri ai unei relații de congruență se pot înmulți cu orice număr întreg*, adică dacă $a \equiv b \pmod{m}$, atunci $ac \equiv bc \pmod{m}$, oricare ar fi numărul întreg c. Într-adevăr, dacă $a \equiv b \pmod{m}$, există un număr întreg q astfel încît $a - b = mq$. Dar atunci $(a - b)c = mqc$ sau $ac - bc = m(qc)$, unde qc este un număr întreg, deci m divide pe $ac - bc$ și deci $ac \equiv bc \pmod{m}$.

e) *Ambii membri ai unei relații de congruență se pot simplifica cu un factor comun, prim cu modulul, al celor doi membri ai relației de congruență*, adică dacă $ac \equiv bc \pmod{m}$, iar c este prim cu m, atunci $a \equiv b \pmod{m}$. Întradevăr, dacă $ac \equiv bc \pmod{m}$, există un număr întreg q astfel $ac - bc = mq$. A spune că c este prim cu m înseamnă a afirma existența a două numere întregi r și s astfel încît $rc + sm = 1$. Dar atunci $(rc + sm)(a - b) = a - b$ sau $a - b = r(ac - bc) + sm(a - b) = rmq + sm(a - b)$ sau $a - b = m(rq + s(a - b))$, unde $rq + s(a - b)$ este un număr întreg, deci m divide pe $a - b$ și deci $a \equiv b \pmod{m}$

7. a) *Relația de egalitate este un caz particular al relației de congruență în cazul cînd modulul este zero și reciproc*, adică dacă $a \equiv b \pmod{0}$, atunci $a = b$ și reciproc. Într-adevăr, dacă $a \equiv b \pmod{0}$ există un număr întreg q astfel încît $a - b = 0.q$, deci $a - b = 0$ sau $a = b$. Reciproc, dacă $a = b$, atunci $a - b = 0$ sau $a - b = 0.1$, unde 1 este un număr întreg, deci 0 divide pe $a - b$ și deci $a \equiv b \pmod{0}$.

b) *Două numere întregi oarecare sînt totdeauna congruente în raport cu modulele* 1 *și* -1, adică $a \equiv b \pmod 1$ și $a \equiv b \pmod{-1}$ oricare ar fi numerele întregi a și b. Acest lucru rezultă din aceea că putem scrie $a - b = 1(a - b)$ și $a - b = -1(b - a)$, unde $a - b$ și $b - a$ sînt numere întregi, deci 1 și -1 divid pe $a - b$ și deci $a \equiv b \pmod 1$ și $a \equiv b \pmod{-1}$.

8. *Orice relație de congruență în raport cu un modul dat este în același timp o relație de congruență în raport cu orice modul care este un divizor al modulului inițial*, adică dacă $a \equiv b \pmod m$ și $n \mid m$, atunci $a \equiv b \pmod n$. Într-adevăr, dacă $a \equiv b \pmod m$, există un număr întreg q astfel încît $a - b = mq$, iar dacă $n \mid m$ există un număr întreg r astfel încît $m = nr$. Dar atunci $a - b = n(qr)$, unde qr este un număr întreg, deci n divide pe $a-b$ și deci $a \equiv b \pmod n$.

9. a) *Cel mai mare divizor comun al numerelor întregi egale respectiv cu primul membru și cu modulul unei relații de congruență este egal cu cel mai mare divizor comun al numerelor întregi egale respectiv cu al doilea membru și cu modulul aceleiași relații de congruență*, adică dacă $a \equiv b \pmod m$, iar d este cel mai mare divizor comun al lui a și m, atunci d este cel mai mare divizor comun al lui b și m. Într-adevăr, dacă $a \equiv b \pmod m$, există un număr întreg q astfel încît $a - b = mq$. A spune că d este cel mai mare divizor comun al lui a și m înseamnă a afirma existența a patru numere întregi r, s, u și v astfel încît $a = rd$, $m = sd$, $d = ua + vm$. Din $a - b = mq$ obținem $b = a - mq = rd - sdq$ deci $b = (r - sq)d$. Apoi $d = ua + vm = u(b + mq) + vm$, deci $d = ub + (uq + v)m$. Deoarece avem $b = (r - sq)\,d$, $m = ds$, $d = ub + (uq + v)m$, unde $r - sq$, s, u, $uq + v$ sînt numere întregi, înseamnă că d este cel mai mare divizor comun și al lui b și m.

b) *Dacă un membru al unei relații de congruență se divide cu modulul, atunci și celălalt membru al aceleiași relații de congruență se divide cu modulul*, adică dacă $a \equiv b \pmod m$ și $m \mid a$, atunci $m \mid b$. Într-adevăr, dacă $a \equiv b \pmod m$, există un număr întreg q astfel încît $a - b = mq$, iar dacă $m \mid a$ există un număr întreg r astfel încît $a = mr$. Dar atunci $b = a - mq = mr - mq$ sau $b = m\,(r - q)$, unde $r - q$ este un număr întreg, deci m divide pe b.

c) *Dacă un membru al unei relații de congruență este prim cu modulul, atunci și celălalt membru al aceleiași relații de congruență este prim cu modulul*, adică dacă $a \equiv b \pmod m$ și a este prim cu m, atunci și b este prim cu m. Într-adevăr, dacă $a \equiv b \pmod m$ există un număr întreg q astfel încît $a - b = mq$, iar dacă a este prim cu m există două numere întregi r și s, astfel încît $ra + sm = 1$. Dar atunci $r(b + mq) + sm = 1$ sau $rb + (rq + s)\,m = 1$, deci b este prim cu m, deoarece r și $rq + s$ sînt numere întregi.

Pentru a putea aprecia utilitatea relației de congruență în teoria numerelor, vom da cîteva exemple de modul în care se rezolvă diverse probleme de divizibilitate cu ajutorul relației de congruență între numere întregi.

Exemplul 1. Să se arate că $19 \mid 5^{203} + 2^{103}\,3^{102} + 2^{102}\,3^{101}$.

Avem $5^{203}+2^{103}3^{102}+2^{102}3^{101}=(5^2)^{101}5+(2\cdot3)^{102}2+(2\cdot3)^{102}=25^{101}5+$ $+6^{102}2+6^{101}2$. Însă $25\equiv6 \pmod{19}$, deci $25^{101}\equiv6^{101} \pmod{19}$, deci $25^{101}5\equiv6^{101}5 \pmod{19}$. Aşadar $5^{203}+2^{103}3^{102}+2^{102}+2^{102}3^{101}\equiv6^{101}5+$ $+6^{102}2+6^{101}2\equiv6^{101}(5+6\cdot2+2)\equiv6^{101}19 \pmod{19}$. Deci

$$5^{203}+2^{103}3^{102}+2^{102}3^{101}\equiv6^{101}19 \pmod{19}$$

şi deoarece $19\mid6^{101}19$, înseamnă că $19\mid5^{203}+2^{103}3^{102}+2^{102}3^{101}$.

Exemplul 2. Să se calculeze restul împărţirii dintre 439^{84} şi 13, împărţitorul fiind 13.

Vom determina un număr întreg nenegativ, mai mic ca 13 care e congruent cu 439^{84} modulo 13 şi acest număr întreg va fi restul căutat, conform cu definiţia a doua a relaţiei de congruenţă. Calculele se fac în felul următor :

Prin aplicarea teoremei împărţirii întregi numerelor 439 şi 13 obţinem

$$439=13\cdot33+10,$$

deci $439\equiv10 \pmod{13}$, conform cu definiţia a doua a relaţiei de congruenţă. Deci $439^{84}\equiv10^{84} \pmod{13}$. Din cauză că $10\equiv-3 \pmod{13}$, mai putem scrie $439^{84}\equiv3^{84} \pmod{13}$. Dar $3^3\equiv1 \pmod{13}$, deci dacă vom scrie că $84=3\cdot28$, vom obţine $439^{84}\equiv3^{84}\equiv3^{3\cdot28}\equiv(3^3)^{28}\equiv1^{28}\equiv$ $\equiv1 \pmod{13}$, deci restul împărţirii dintre 439^{84} şi 13, împărţitorul fiind 13, este egal cu 1.

Dacă am fi ridicat pe 439 la puterea 84 şi apoi am fi împărţit numărul întreg obţinut la 13, nu am fi siguri de rezultatul obţinut din cauza calculelor numeroase şi obositoare pe care ar fi trebuit să le facem.

Exemplul 3. Să se stabilească următorul criteriu de divizibilitate cu 11 : *un număr natural se divide cu* 11 *dacă şi numai dacă diferenţa negativă dintre suma cifrelor cu indice par şi suma cifrelor cu indice impar din numărul natural dat se divide cu* 11.

Se presupune că un număr natural a este scris în baza zece, adică

$$a=a_n10^n+a_{n-1}10^{n-1}+\ldots+a_310^3+a_210^2+a_110+a_0,$$

unde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_3, a_2, a_1, a_0$ sînt luate dintre cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Avem

$$10\equiv-1 \pmod{11},$$

deci ridicînd ambii membri ai acestei congruenţe la diverse puteri, aceleaşi pentru amîndoi membrii, vom avea

$$10^2\equiv1 \pmod{11},$$
$$10^3\equiv-1 \pmod{11},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Înmulţind ambii membri ai acestor congruenţe respectiv cu a_1, a_2, a_3, ..., obţinem

$$a_110\equiv-a_1 \text{ (modul 11)},$$
$$a_210^2\equiv a_2 \text{ (mod 11)},$$
$$a_310^3\equiv-a_3 \text{ (mod 11)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dacă la aceste congruenţe adăugăm si congruenţa

$$a_0 \equiv a_0 \pmod{11}$$

si adunăm, membru cu membru, aceste congruenţe, obţinem

$$a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_3 10^3 + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 \equiv$$
$$\equiv (a_0 + a_2 + \ldots) - (a_1 + a_3 + \ldots) \pmod{11},$$

ceea ce înseamnă că $a \equiv \pm E \pmod{11}$, unde E este diferenţa nenegativă dintre numerele întregi $a_0 + a_2 + \ldots$ şi $a_1 + a_3 + \ldots$, adică $E = (a_0 + a_2 + \ldots) - (a_1 + a_3 + \ldots)$ dacă $a_0 + a_2 + \ldots \geqslant a_1 + a_3 + \ldots$ şi $E = (a_1 + a_3 + \ldots) - (a_0 + a_2 + \ldots)$ dacă $a_0 + a_2 + \ldots < a_1 + a_3 + \ldots$. Din congruenţa $a \equiv \pm E \pmod{11}$ rezultă că dacă 11 divide pe E atunci 11 divide şi pe a, iar dacă 11 nu divide pe E atunci 11 nu divide nici pe a, ceea ce constituie criteriul de divizibilitate cu 11 enunţat mai sus.

Propunem cititorului ca, inspirîndu-se din cele spuse mai sus, să rezolve următoarele probleme :

1. Să se arate că $73 \mid 17^{219} - 2 \cdot 3^{219} \cdot 91^{73} + 1$.

2. Să se arate că expresia $3^{4n+3} + 4^{n+2} + 5^{3n+5}$ se divide cu 11, n fiind un număr întreg nenegativ.

PENTRU CERCURILE DE ELEVI

ASUPRA UNEI EXPRESII ALGEBRICE

În cele ce urmează ne vom ocupa de expresia :

$$E = a_n b_n \sum_{k=1}^{n-1} (a_k b_n - a_n b_k)^2 - a_n b_n \left(a_n \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} b_k^2} - b_n \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2} \right)^2,$$

în care a_i şi b_j $(i, j \in \{1, 2 \ldots, n\})$ sînt numere reale.

1. *Expresia E este pozitivă.*

Trebuie demonstrat că

$$[(a_1 b_n - a_n b_1)^2 + (a_2 b_n - a_n b_2)^2 + \ldots + (a_{n-1} b_n - a_n b_{n-1})^2] a_n b_n \geqslant$$
$$\geqslant (a_n \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_{n-1}^2} - b_n \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{n-1}^2})^2 a_n b_n$$

sau

$$(a_1^2 b_n^2 - 2a_1 b_n a_n b_1 + a_n^2 b_1^2 + a_2^2 b_n^2 - 2a_2 b_n a_n b_2 +$$
$$+ a_n^2 b_2^2 + \ldots + a_{n-1}^2 b_n^2 - 2a_{n-1} b_n a_n b_{n-1} + a_n^2 b_{n-1}^2) a_n b_n \geqslant$$
$$\geqslant [a_n^2 (b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_{n-1}^2) + b_n^2 (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{n-1}^2) -$$
$$- 2a_n b_n \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{n-1}^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_{n-1}^2)}] a_n b_n$$

sau

$$a_n^3 b_n \sum_{k=1}^{n-1} b_k^2 + a_n b_n^3 \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 - 2a_n^2 b_n^2 \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k \geqslant$$
$$\geqslant a_n^3 b_n \sum_{k=1}^{n-1} b_k^2 + a_n b_n \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 - 2a_n^2 b_n^2 \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} b_k^2}$$

sau, efectuînd reducerile,

$$a_n^2 b_n^2 \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k \leqslant a_n^2 b_n^2 \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} b_k^2}. \tag{1}$$

Deoarece a_n şi b_n sînt reale, $a_n^2 b_n^2 \geqslant 0$, deci avem de arătat că

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} b_k^2}.$$

Dacă $\sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k \leqslant 0$, inegalitatea este evidentă. Dacă $\sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k > 0$, atunci ea rezultă din inegalitatea Cauchy-Buniakowski :

$$\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} b_k^2.$$

2. *Dacă există numerele* $p, q \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ *astfel încît* $a_p b_q - a_q b_p \neq 0$, *iar* a_n *şi* b_n *sînt numere nenule, atunci expresia* E *este strict pozitivă.*

Într-adevăr, să presupunem că $E = 0$. Notăm

$$F = a_n^2 b_n^2 \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k - \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} b_k^2}\right).$$

După cum $E \geqslant 0$ implică relaţia (1), în mod analog, dacă $E = 0$ atunci $F = 0$. Întrucît $a_n \neq 0$ şi $b_n \neq 0$,

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k = \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} b_k^2},$$

deci

$$\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k\right)^2 - \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} b_k^2 = 0. \tag{2}$$

Dar

$$\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k\right)^2 - \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} b_k^2 = \left(\sum_{k=1}^{n-2} a_k b_k\right)^2 + a_{n-1}^2 b_{n-1}^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{n-2} a_k b_k\right) \cdot$$

$$\cdot a_{n-1} b_{n-1} - \sum_{k=1}^{n-2} a_k^2 \sum_{k=1}^{n-2} b_k^2 - a_{n-1}^2 \sum_{k=1}^{n-2} b_k^2 - b_{n-1}^2 \sum_{k=1}^{n-2} a_k^2 - a_{n-1}^2 b_{n-1}^2 =$$

$$= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_{n-2} b_{n-2})^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{n-2}^2) \cdot$$

$$\cdot (b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_{n-2}^2) - (a_{n-1}^2 b_1^2 + a_{n-1}^2 b_2^2 + \ldots + a_{n-1}^2 b_{n-2}^2 +$$

$$+ b_{n-1}^1 a_1^2 + b_{n-1}^2 a_2^2 + \ldots + b_{n-1}^2 a_{n-2}^2 + 2a_1 b_1 a_{n-1} b_{n-1} + 2a_2 b_2 a_{n-1} b_{n-1} +$$

$$+ \ldots + 2a_{n-2} b_{n-2} a_{n-1} b_{n-1}) =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n-2} a_k b_k\right)^2 - \sum_{k=1}^{n-2} a_k^2 \sum_{k=1}^{n-2} b_k^2 - \sum_{k=1}^{n-2} (a_{n-1} b_k - a_k b_{n-1})^2.$$

Notînd

$$E_m = \left(\sum_{k=1}^{m} a_k b_k\right)^2 - \sum_{k=1}^{m} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{m} b_k^2,$$

avem

$$E_{n-1} = E_{n-2} - \sum_{k=1}^{n-2} (a_{n-1} b_k - a_k b_{n-1})^2. \tag{3}$$

Înlocuind în relaţia (3) pe n, succesiv, cu $n-1$; $n-2$; ... ; 4; 3, găsim

$$E_{n-2} = E_{n-3} - \sum_{k=1}^{n-3} (a_{n-2} b_k - a_k b_{n-2})^2,$$

$$E_{n-3} = E_{n-4} - \sum_{k=1}^{n-4} (a_{n-3} b_k - a_k b_{n-3})^2,$$

. . . . . .

$$E_2 = E_1 - (a_2 b_1 - a_1 b_2)^2.$$

Însumînd aceste relaţii, inclusiv relaţia (3), obţinem

$$E_{n-1} = E_1 - \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{k=1}^{i} (a_i b_k - a_k b_i)^2.$$

Însă $E_{n-1} = 0$, deci

$$E_1 = \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{k=1}^{i} (a_i b_k - a_k b_i)^2$$

sau

$$(a_2 b_1 - a_1 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_3 b_2 - a_2 b_3)^2 + \ldots$$
$$\ldots + (a_{n-1} b_1 - a_1 b_{n-1})^2 + (a_{n-1} b_2 - a_2 b_{n-1})^2 + \ldots$$
$$\ldots + (a_{n-1} b_{n-2} - a_{n-2} b_{n-1})^2 = 0. \tag{4}$$

Din egalitatea (4) rezultă că $a_p b_q = a_q b_p$ oricare ar fi $p, q \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, ceea ce contrazice ipoteza. Deci $E > 0$.

Observaţii. 1° Avînd în vedere că a_n şi b_n sînt independenţi unul de altul, îi putem interverti în expresia E şi obţinem

$$a_n b_n \sum_{k=1}^{n-1} (a_k a_n - b_k b_n)^2 \geqslant a_n b_n \left(a_n \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2} - b_n \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} b_k^2}\right)^2.$$

2° Punînd $a_n = p$, $b_n = q$ şi n în loc de $n-1$, inegalitatea de mai sus se scrie

$$pq \sum_{k=1}^{n} (a_k p - b_k q)^2 \geqslant pq \left(p \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} - q \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}\right)^2 \tag{5}$$

sau *)

$$\operatorname{sign} p.\operatorname{sign} q\cdot\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k p-b_k q)^2-\left(p\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}-q\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}\right)^2\right]\geqslant 0.$$

3° Dacă există r, $s\in\{1,2,\ldots,n\}$ astfel încît $a_r\,b_s\neq a_s\,b_r$ iar p si q sînt nenule, atunci în relaţia (5) posibilitatea egalităţii este exclusă. În aceste condiţii,

$$\operatorname{sign} p\cdot\operatorname{sign} q\cdot\operatorname{sign}\left\{\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k p-b_k q)^2\right]^{\frac{1}{2}}+\right.$$

$$\left.+p\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}-q\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\operatorname{sign}\left\{\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k p-b_k q)^2\right]^{\frac{1}{2}}-\right.$$

$$\left.-p\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}+q\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}=1.$$

Tudor Zamfirescu, student Bucureşti

NOTE MATEMATICE

1. Generalizarea unei probleme din G.M. —B p. 370/1965

a) Să se arate că locul centrului unui cerc ce trece printr-un punct fix A şi e văzut din B sub un unghi 2α constant, este un cerc.

b) Să se arate că locul centrului unui cerc ce trece prin A şi este ortogonal unui cerc fix cu centrul în B este o dreaptă.

Vom da soluţie sintetică.

a) Fie O centrul cercului, T_1 şi T_2 contactele tangentelor din B la cerc, C intersecţia cercului cu AB, iar O', O'' picioarele bisectoarelor din O în triunghiul AOB. Cercul O fiind văzut din B sub unghiul T_1BT_2 constant 2α, rezultă că şi T_1BO este constant. Atunci,

$$\frac{T_1O}{BO}=\frac{AO}{BO}=k\ \text{(constant)}.$$

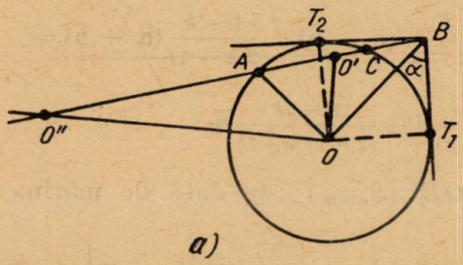
Deoarece $\frac{O'B}{O'A}=\frac{O''B}{O''A}=k$ punctele O' şi O'' sînt fixe şi cum $OO'\perp OO''$ locul lui O va fi cercul de diametru $O'O''$.

---

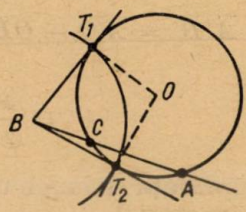
*)— Funcţia reală „signum" se defineşte pe mulţimea numerelor reale prin

$$\operatorname{sign} x=\begin{cases}\dfrac{x}{|x|} & \text{dacă } x\neq 0,\\ 0 & \text{dacă } x=0.\end{cases}$$

Caz particular $\alpha = 45°$ (problema din G.M. — B XVI p. 370, rezolvată analitic la un cerc de elevi din Craiova)



a)



b)

b) Fie C intersecția cercului O cu AB. Cercul (O) fiind ortogonal lui (B) urmează că $BT_1 = k$. Dar, puterea lui B în raport de (O) va fi constantă $BC.BA = k^2$ și deci C este fix. Cercurile (O) formează un fascicul de puncte fixe C și A. Locul centrelor va fi mediatoarea segmentului AC.

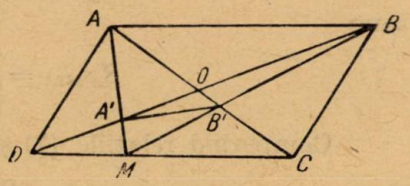
M. I. Focșeneanu, București

2. Asupra problemei 5983

Se dă paralelogramul $ABCD$ și M un punct mobil pe CD. Dreptele AM și BM taie diagonalele BD și AC respectiv în A' și B'. Intersecția diagonalelor fiind O, să se arate că aria $A'MB' = 2$ aria $A'OB'$ (problema 5983).

În cele ce urmează vom da o soluție bazată pe calculul vectorial. Din considerente geometrice avem următoarele relații:

$$\frac{DM}{DC} = \frac{MA'}{A'A} = k \text{ și } \frac{OB'}{OC} = \frac{k}{2-k}. \qquad (1)$$



Notăm $\overline{DC} = \bar{a}$ și $\overline{DA} = \bar{b}$ și avem deci: $\overline{DM} = k.\bar{a}$. În triunghiul ADM vom avea evident:

$$\overline{DA'} = \frac{\overline{DA} + \frac{AA'}{A'M}\overline{DM}}{1 + \frac{AA'}{A'M}} = \frac{\bar{b} + \frac{1}{k}k\bar{a}}{1 + \frac{1}{k}} = \frac{k}{k+1}(\bar{a} + \bar{b}) \qquad (2)$$

Avem relațiile:

$$\overline{A'M} = \overline{DM} - \overline{DA'} = k\bar{a} - \frac{k}{k+1}(\bar{a} + \bar{b}) = \frac{k^2}{k+1}\bar{a} - \frac{k}{k+1}\bar{b} \qquad (3)$$

$$\overline{A'O} = \overline{DO} - \overline{DA'} = \frac{\bar{a}+\bar{b}}{2} - \frac{k}{k+1}(\bar{a} + \bar{b}) = \frac{1-k}{2(k+1)}(\bar{a} + \bar{b}) \qquad 4)$$

$$\overline{OB'} = \frac{k}{2-k}\,\overline{OC} = \frac{k}{2(2-k)}(\bar{a} - \bar{b})\,;\ (\text{deoarece } \overline{OC} = \frac{\bar{a}-\bar{b}}{2}) \tag{5}$$

$$\overline{A'B'} = \overline{A'O} + \overline{OB'} = \frac{k}{2(2-k)}(\bar{a} - \bar{b}) + \frac{1-k}{2(k+1)}(\bar{a} + \bar{b}) =$$

$$= \frac{k^2 - k + 1}{(2-k)(k+1)}\bar{a} + \frac{1-2k}{(2-k)(k+1)}\bar{b} \tag{6}$$

Suprafaţa triunghiului $A'OB'$ ($S_{A'OB'}$) este dată de mărimea produsului vectorial

$$\frac{1}{2}\overline{A'B'} \times \overline{A'O} = \frac{1}{2}\left[\frac{k^2-k+1}{(2-k)(k+1)}\bar{a} + \frac{1-2k}{(2-k)(k+1)}\bar{b}\right] \times$$

$$\times \left[\frac{1-k}{2(k+1)}\bar{a} + \frac{1-k}{2(k+1)}\bar{b}\right].$$

Ţinînd seamă că $\bar{a} \times \bar{a} = 0$, $\bar{b} \times \bar{b} = O$ şi $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$, vom avea după efectuarea calculelor :

$$S_{A'OB'} = \left|\frac{k(1-k)}{4(2-k)(k+1)}\bar{a} \times \bar{b}\right|. \tag{7}$$

Suprafaţa triunghiului $A'MB'$ este :

$$S_{A'MB'} = \left|\frac{1}{2}\overline{A'M} \times \overline{A'B}\right| = \left|\frac{1}{2}\left(\frac{k^2}{k+1}\bar{a} - \frac{k}{k+1}\bar{b}\right) \times \right.$$

$$\left. \times \left[\frac{k^2-k+1}{(2-k)(k+1)}\bar{a} + \frac{1-2k}{(2-k)(k+1)}\bar{b}\right]\right|$$

sau :

$$S_{A'MB'} = \left|\frac{k(1-k)}{2(2-k)(k+1)}\bar{a} \times \bar{b}\right|. \tag{8}$$

Comparînd relaţiile (7) şi (8) se observă evident că :

$$S_{A'MB'} = 2S_{A'OB'}$$

C. Herling, inginer Bucureşti

3. Asupra problemelor 6197, 6741, 6833

Plecăm de la identitatea algebrică

$$z\sum_{k=0}^{n}(-z^2)^k = \frac{(-1)^{n+1}z^{2n+3} - z}{-z^2 - 1} \tag{1}$$

Stabilirea ei se poate face folosind o progresie geometrică, iar prin inducţie matematică se face imediat verificarea.

Notăm $z = \cos x + i \sin x$ şi $z = \cos x - i \sin x$ şi ţinem seamă că $z \cdot \bar{z} = 1$, $z^{-n} = (\bar{z})^n$ şi de formula lui Moivre.

Obţinem succesiv :

$$\sum_{k=0}^{k} (-1)^k \cos(2k+1)x + i(-1)^k \sin(2k+1)x = \frac{[(-1)^{n+1} z^{2n+3} - z](\bar{z}^2+1)}{-(z^2+1)(\bar{z}^2+1)} =$$

$$= \frac{(-1)^{n+1} z^{2n+1} + (-1)^{n+1} z^{2n+3} - \bar{z} - z}{4\cos^2 x}$$

Egalăm părţile imaginare şi obţinem :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sin(2k+1)x = \frac{(-1)^{n+1}[\sin(2n+3)x + \sin(2n+1)x]}{-4\cos^2 x} \qquad (2)$$

sau :

$$-4\cos^2 x \sum_{k=0}^{k} (-1)^k \sin(2k+1)x = (-1)^{n+1}[\sin(2n+3)x + \sin(2n+1)x]$$

Scriem această relaţie pentru $n = 0$, $n = 1$, $n = 2, \ldots$, $n = n$ şi adunînd relaţiile obţinem următoarea identitate :

$$-4\cos^2 x \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (n+1-k) \sin(2k+1)x = (-1)^{n+1} \sin(2n+3)x - \sin x \qquad (3)$$

În cazul particular $n = 3$ avem :

$$-4\cos^2 x(-\sin 7x + 2\sin 5x - 3\sin 3x + 4\sin x) = \sin 9x - \sin x$$

adică, tocmai enunţul problemei 6197.

Observare. — Pentru $n = 5$ şi $\cos x \neq 0$ obţinem :

$$\sin 11x - 2\sin 9x + 3\sin 7x - 4\sin 5x + 5\sin 3x - 6\sin x = \frac{\sin 13x - \sin x}{4\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos 7x \sin 6x}{2\cos^2 x} \text{ unde } x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}. \qquad (4)$$

Transformarea unor sume trigonometrice în produse trigonometrice este necesară în rezolvarea ecuaţiilor trigonometrice, ca exemplu : din egalitatea (4) rezultă că rădăcinile ecuaţiei $\sin 11x - 2\sin 9x + 3\sin 7x - 4\sin 5x + 5\sin 3x - 6\sin x = 0$ sînt date de ecuaţiile :

$$\cos 7x = 0, \quad \sin 6x = 0 \text{ şi } x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}.$$

În acelaş mod am obţinut enunţul şi rezolvarea problemei 6741 din februarie 1965 şi problema 6833 din aprilie 1965.

Pentru un studiu mai complet recomandăm cititorilor articolul publicat în *Gazeta Matematică şi Fizică seria B* pag. 392, iulie 1961.

C. Ionescu-Ţiu

PROBLEME REZOLVATE

Problema 6915

Se dau segmentele AB și A_1B_1 care n-au nici un punct comun, iar O_1 și O_2 respectiv mijloacele lor. Să se arate că $2O_1O_2 \leqslant AA_1 + BB_1$.

Olimpiada matematică, Moscova, 1953

Soluție dată de *Voiculescu Dan*, elev București.

Fie P mijlocul lui A_1B. În triunghiul O_2PO_1 avem :

$$O_1O_2 \leqslant PO_1 + PO_2 = \frac{AA_3}{2} + \frac{BB_1}{2}$$

deci $2O_1O_2 \leqslant AA_1 + BB_1$

Observații : Egalitate avem cînd O_1, P, O_2 sînt coliniare adică atunci cînd AA_1 și BB_1 sînt paralele și formează un trapez convex.

Inegalitatea se menține chiar și dacă segmentele au un punct comun.

O altă inegalitate ce rezultă analog este : $2O_1O_2 \geqslant |AA_1 - BB_1|$ cu egalitate tot cînd AA_1 și BB_1 sînt paralele.

Problema 6919

Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ și $b_1, b_2, \ldots, b_n$ numere pozitive date și $x_1, x_2, \ldots \ldots, x_n$ variabile pozitive. Să se demonstreze inegalitatea :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot x_k \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{x_k} \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k \cdot b_k} \right)^2$$

(In legătură cu problema 6690)

Soluția I dată de *Liliana Bucur*, elevă Sibiu. — Pornim de la inegalitățile evidente :

$$A_1^2x^2 + 2A_1B_1x + B_1^2 \geqslant 0,$$
$$A_2^2x^2 + 2A_2B_2x + B_2^2 \geqslant 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_n^2x^2 + 2A_nB_nx + B_n^2 \geqslant 0.$$

Adunăm inegalitățile membru cu membru,

$$x^2 \sum_{k=1}^{n} A_k^2 + 2x \sum_{k=1}^{n} A_kB_k + \sum_{k=1}^{n} B_k^2 \geqslant 0.$$

Fiind pozitiv pentru orice x rezultă că trinomul are discriminantul negativ :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} A_k B_k \right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} A_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} B_k^2 \cdot$$

Punem $A_k = \sqrt{a_k x_k}$ și $B_k = \sqrt{\frac{b_k}{x_k}}$. Inegalitatea devine :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k b_k}\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{x_k}$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Soluția II dată de *Ioan Dăncilă*, elev Sibiu. — Cunoaștem inegalitatea lui Cauchy-Buniakowski

$$\sum_{k=1}^{n} u_k^2 \sum_{k=1}^{n} v_k^2 \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} u_k \cdot v_k\right)^2,$$

valabilă pentru numerele pozitive u_i și v_i, $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$. Înlocuim în inegalitatea de mai sus $u_k = \sqrt{a_k x_k}$, $v_k = \sqrt{b_k / x_k}$ și celelalte analoage și avem :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k x_k \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{x_k} \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k \cdot x_k} \cdot \sqrt{\frac{b_k}{x_k}}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k\, b_k}\right)^2.$$

Problema 6973

Pentru n natural impar, mai mare ca 1, numărul

$$N = \frac{1}{2^3}(139^n - 133^n - 129^n + 123^n),$$

este întreg, pozitiv și divizibil prin 1965.

E. Onofraș, Ploiești

Soluție dată de autor.

a) Pentru a demonstra că N este întreg să observăm că putem scrie :

$$139 = 136 + 3 = \mathfrak{M}8 + 3\,;\ 133 = 136 - 3 = \mathfrak{M}8 - 3\,;\ 129 = 128 + 1 = \mathfrak{M}8 + 1\,;\ 123 = \mathfrak{M}8 + 3$$

Notînd cu N' numărul din paranteză (din enunț) putem scrie

$$N' = 139^n - 133^n - 129^n + 123^n = (\mathfrak{M}8 + 3)^n - (\mathfrak{M}8 - 3)^n - (\mathfrak{M}8 + 1)^n + (\mathfrak{M}8 + 3)^n$$

Avînd în vedere că $n = 2k + 1$ $(k \geqslant 1)$, rezultă :

$N' = \mathfrak{M}8 + 3^n - \mathfrak{M}8 + 3^n - \mathfrak{M}8 - 1 + \mathfrak{M}8 + 3^n = \mathfrak{M}8 + 3 \cdot 3^n - 1 = \mathfrak{M}8 + 3^{n+1} - 1 = \mathfrak{M}8 + 3^{2(k+1)} - 1 = \mathfrak{M}8 + 9^{k+1} - 1 = \mathfrak{M}8 + (8+1)^{k+1} - 1 = \mathfrak{M}8 + (\mathfrak{M}8 + 1) - 1 = \mathfrak{M}8$. Deci N' se divide prin 8, prin urmare N este întreg (în condițiile din enunț).

b) Să demonstrăm acum că N este pozitiv. Pentru aceasta putem scrie :

$$N' = (139^n - 129^n) - (133^n - 123^n) = 10\,(139^{n-1} + 139^{n-2} \cdot 129 + \ldots$$
$$\ldots + 139 \cdot 129^{n-2} + 129^{n-1}) - 10\,(133^{n-1} + 133^{n-2} \cdot 123 + \ldots$$
$$\ldots + 133 \cdot 123^{n-2} + 123^{n-1}).$$

Cum fiecare termen din paranteza a doua este mai mic decît termenul corespunzător din prima paranteză rezultă că ultima diferență este pozitivă. Deci N' este pozitiv și prin urmare și N este pozitiv.

c) Să observăm că $1965 = 3 \cdot 5 \cdot 131$. Putem scrie succesiv : $N' = (139^n - 133^n) - (129^n - 123^n)$. Cum $a^n - b^n$ se divide prin $a - b$ rezultă că fiecare din diferențele din partea a doua se divid prin $139 - 133 = 129 - 123 = 6$. Deci N' se divide prin 3. $N' = (139^n - 129^n) - (133^n - 123^n)$. Raționînd la fel rezultă că N' se divide prin $139 - 129 = 133 - 123 = 10$. Deci N se divide prin 5. $N' = (139^n + 123^n) - (133^n + 129^n)$. Cum, pentru n impar, $a^n + b^n$ se divide cu $a + b$, rezultă că $139^n + 123^n$ și $133^n + 129^n$ se divid fiecare prin $139 + 123 = 133 + 129 = 262 = 2 \cdot 131$. Deci N' se divide prin 131.

Numerele 3, 5, 131 fiind prime între ele, două cîte două, rezultă că N' se divide prin $3 \cdot 5 \cdot 131 = 1965$. Deci și $N = \frac{1}{2^3} N'$ se divide prin 1965.

Problema 6976

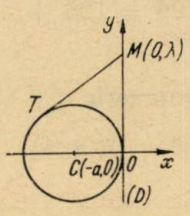
Se dau cercul (C) și dreapta (D) tangentă cercului (C). Din punctul M, mobil pe dreapta (D), se duce tangenta MT la cercul (C).

Se cere: a) locul geometric al punctului care împarte segmentul TM în raportul k (constant), b) să se reprezinte grafic acest loc geometric pentru $k = 1$, $k = -2$.

A. Stanciu, prof. Brăila

Soluția autorului.

a) Luăm axele de coordonate astfel că avem $C(-a, O)$ și $M(0, h)$.



Ecuația cercului (C) este : $(x + a)^2 + y^2 - a^2 = 0$ sau $x^2 + y^2 + 2ax = 0$.

Ecuația polarei punctului M este : $hy + ax = 0$.

Se rezolvă sistemul

$$x^2 + y^2 + 2ax = 0, \quad ax + hy = 0$$

și obținem coordonatele punctului T,

$$y = -\frac{ax}{h}.$$

$$x^2 + \frac{a^2x^2}{h^2} + 2ax = 0\,; \quad x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{2ah^2}{a^2 + h^2}$$

$$y_1 = 0, \; y_2 = +\frac{a}{h} \cdot \frac{2ah^2}{a^2 + h^2}\,; \; y_2 = +\frac{2a^2h}{a^2 + h^2}.$$

Deci avem coordonatele punctului $T\left(-\frac{2ah^2}{a^2+h^2}, \frac{2a^2h}{a^2+h^2}\right)$.

Coordonatele punctului P care împarte segmentul TM în raportul constant k sînt :

$$x = \frac{x_1 + kx_2}{1+k} = \frac{\frac{-2ah^2}{a^2+h^2}}{1+k} = -\frac{2ah^2}{(1+k)(a^2+h^2)}$$

iar

$$y = \frac{\frac{2a^2h}{a^2+h^2} + kh}{1+k} = \frac{2a^2h + kh(a^2+h^2)}{(1+k)(a^2+h^2)}.$$

Deci coordonatele punctului P sînt :

$$x = -\frac{2ah^2}{a^2(1+x)(a^2+h^2)}, \quad y = \frac{h[a^2(a+k)+kh^2]}{(1+k)(a^2+h^2)}.$$

Locul geometric se află eliminînd parametrul h :

$$(1+k)^2(a^2+h^2)\,x + 2ah^2 = 0;$$

$$a^2(1+k)\,x + h^2[(1+k)\,x + 2a] = 0$$

$$h^2 = -\frac{a^2(1+k)x}{2a+(1+k)x}, \quad h = \pm a\sqrt{\frac{-(1+k)x}{2a+(1+k)x}}$$

$$y(1+k)\left[a^2 - \frac{a^2(1+k)x}{2a+(1+k)x}\right] = \pm a\sqrt{\frac{-(1+k)x}{2a+(1+k)x}}\left[a^2(2+k) - k\cdot\frac{a^2(1+k)x}{2a+(1+k)x}\right]$$

$$a^2y(1+k)\cdot\frac{2a+(1+k)x-(1+k)x}{2a+(1+k)n} = a^3\sqrt{\frac{-(1+k)x}{2a+(1+k(x}}\cdot\frac{2a(2+k)+2(1+k)x}{2a+(1+k)x}$$

sau

$$y(1+k) = \pm a\sqrt{\frac{-1(1+k)x}{2a+(1+k)x}}\,[a(2+k)+(1+k)x]$$

deci

$$y = \pm\frac{a(2+k)+(1+k)x}{1+k}\sqrt{-\frac{(1+k)x}{2a+(1+k)x}}$$

ecuația locului geometric.

b) Dacă $k = +1$ (P este mijlocul segmentului TM), avem

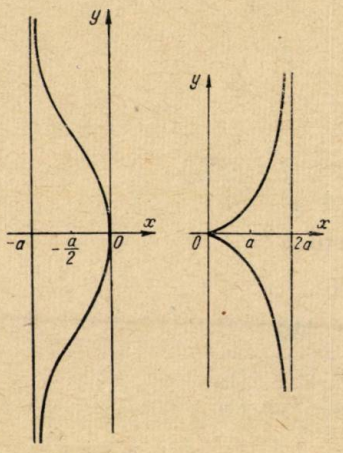
$$y = \pm\frac{3a+2x}{2}\sqrt{\frac{-x}{a+x}} \qquad x \in (-qa,\ 0]$$

curba e simetrică față de axa x-lor. Vom construi ramura pozitivă $y = \frac{3a+2x}{2}\sqrt{\frac{-x}{a+x}}$.

1) $y = 0$ $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{3a}{2}$, acest punct nu aparţine domeniului de definiţie al funcţiei, este un punct izolat.

2) $$y' = \frac{1}{2}\left[2\sqrt{\frac{-x}{a+x}} + (3a+2x)\cdot\frac{\frac{-a-x+x}{(a+x)^2}}{2\sqrt{\frac{-x}{a+x}}}\right] = \frac{-4x^2-6ax-3a^2}{4(a+x)\sqrt{\frac{-x}{a+x}}}.$$

Trinomul : $-4x^2 - 6ax - 3a^2$ are rădăcini complexe, deci $y' < 0$.



Dacă $k = -2$ *găsim cisoida lui Diocles :*

$$y \pm x = \sqrt{\frac{x}{2a-x}}.$$

Curba e simetrică faţă de axa x-lor. Vom studia ramura pozitivă $y = x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}$ domeniul de definiţie $x \in -[0,2a)$.

Asimptota : $x = 2a$.

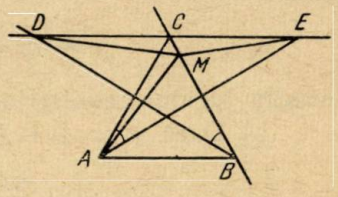
$$y' = \frac{-x^2+3ax}{(2a-x)^2\sqrt{\frac{x}{2a-x}}}$$; avem $y' = 0$ dacă $x = 0$

($x = 3a$ nu aparţine domeniului de definiţie).

Problema 6999

Se consideră triunghiul echilateral ABC. Bisectoarea exterioară a unghiului C întîlneşte bisectoarea interioară a unghiului B în punctul D şi înălţimea din A în punctul E. Să se arate că : a) triunghiul ACE este egal cu triunghiul CDB ; b) $BD < ED$, c) Dacă M este un punct pe dreapta BC triunghiul AEM este isoscel şi $MA + MD \geqslant AC + CD$.

Elena Flondor



Soluţie dată de *Eugen Popa*, elev Iaşi.

a) Bisectoarea exterioară din C este perpendiculară pe bisectoarea interioară din C, deci paralelă cu AB. Triunghiurile ACE şi CBE au $AC = BC$, căci triunghiul ABC este echilateral, $\sphericalangle CAE = \sphericalangle CBD = 30°$; $\sphericalangle ACE = \sphericalangle BCD = 120°$, deci cele două triunghiuri sînt egale. b) De la punctul precedent : $CE = AB$, deci). $ED = EC + CD = CB + CD > BD$, pe baza inegalităţii triunghiului. De la punctul a) avem : $CA = CE$ şi cum BC este perpendiculară pe AE,

rezultă că BC este mediatoarea lui AE, deci : $MA = ME$ şi triunghiul AME este isoscel.

Avem :

$$MA + MD = ME + MD \geqslant DE = AC + CD.$$

Egalitatea are loc cînd M este în C. Raţionamentul nu se modifică dacă M este pe dreapta BC, în afara segmentului BC.

Problema 7013

În triunghiul ABC fie A' piciorul bisectoarei unghiului A, A'' simetricul lui A' în raport cu mijlocul laturii BC, iar B', C' simetricele punctelor în care cercul $AA'A''$ taie laturile AB, AC în raport cu mijloacele acestor laturi. Să se arate că :

$$(AB' + AC')\,(AB + AC) = BC^2.$$

R.M.T. 1935, C. Ionescu-Bujor

Soluţie dată de *Constantin Niculescu*, elev Tîrgovişte.

Vom avea evident :

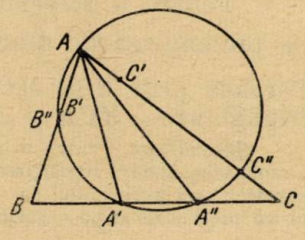
$$AC' = CC''; \quad AB' = BB''; \quad BA' = A''C.$$

Scriem puterea punctelor B şi C faţă de cercul $(AA'A'')$:

$$CA' \cdot CA'' = CC'' \cdot CA = AC' \cdot AC$$

sau, ţinînd seamă că AA' este bisectoarea vîrfului A :

$$\frac{AC \cdot BC}{AC + AB} \cdot \frac{AB \cdot BC}{AC + AB} = AC' \cdot AC,$$



de unde :

$$AC' = \frac{a^2 c}{(b + c)^2}.$$

Avem şi :

$$BA' \cdot BA'' = BB'' \cdot BA = AB' \cdot AB.$$

Procedînd la fel, vom găsi :

$$AB' = \frac{a^2 b}{(b + c)^2}$$

deci :

$$(AB' + AC') \cdot (AB + AC) = \frac{a^2 (b + c)}{(b + c)^2} \cdot (b + c) = a^2 = BC^2$$

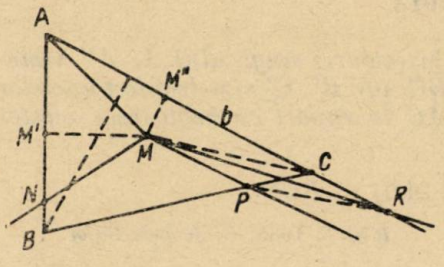
ceea ce trebuia arătat.

Problema 7126

Se dă un triunghi ABC și un punct M în interiorul său. Să se ducă două semidrepte cu originea în M, care împreună cu segmentul MA să împartă triunghiul în trei părți echivalente.

Petre Liviu, Tîrgoviște

Soluție dată de *Lungulescu B. Eugen*, elev. Pitești. — Fie M' și M'' proiecțiile punctului M, respectiv pe segmentele AB și AC, iar h_B și h_A, înălțimile din B și C. Să presupunem, pentru a fixa ideile, că $MM' > \frac{1}{3}h_C$ și $MM'' > \frac{1}{3}h_B$. În acest caz se vede ușor că o semidreaptă întîlnește latura AB într-un punct N, iar cealaltă semidreaptă trebuie să întîlnească latura BC într-un punct P. Va trebui să avem :



$$S_{AMN} = \frac{1}{3}S_{ABC} \text{ deci : } \frac{1}{2}AN \cdot MM' = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}b \cdot h_B\right)$$

de unde,

$$\frac{AN}{b} = \frac{h_B}{3MM'}$$

și se construiește AN ca al patrulea proporțional.

Pentru a determina punctul P, construim ca mai sus, punctul R pe prelungirea de dincolo de C a laturii AC, astfel ca $S_{AMR} = \frac{1}{3}S_{ABC}$. Paralela prin R la MC întîlnește pe BC în punctul P căutat, deoarece triunghiurile MCR și MCP sînt echivalente.

Generalizare. Pentru a împărți un triunghi în n părți echivalente folosim un procedeu asemănător. Pentru împărțirea unui poligon oarecare în n părți echivalente este necesar să se exprime aria poligonului ca sumă de arii: $S_{MAB} + S_{MBC} + S_{MCD} + \ldots$ care se exprimă apoi ca un produs de două segmente.

Problema 7128

Fie xOy un unghi dat și A un punct în interiorul său. Să se construiască grafic două puncte M_1 și M_2 pe Ox și Oy astfel încît $\sphericalangle M_1AM_2 = \alpha$ și $M_1A/M_2A = k$.

Dan Voiculescu, elev, București

Soluția autorului. Fie A_x și A_y simetricele lui A față de Ox și Oy. Avem atunci $AM_1 = A_xM_1 = k \cdot AM_2 = k \cdot A_yM_2$. Rotind în jurul lui A triunghiul AA_yM_2 cu un unghi α astfel încît dreptele AM_1 și AM_2' (unde

A'_y și M'_2 sînt poziții ale punctelor A_y și M_2) să se suprapună. Construind omotetic cu triunghiul $AA'_yM'_2$ triunghiul $AM_1A''_y$ cu centrul de omotetie A și raportul de omotetie k, observăm că M_1 este centrul cercului circumscris triunghiului $A_zAA''_y$ căci $M_1A = M_1A_z = M_1A''_y$. Analog pentru M_2. Punctele M_1 și M_2 se pot obține căci A_z, A_y și A'_z, A'_y, A''_z, A''_y se pot construi. Observăm că există și o a doua soluție luînd unghiul α în sens invers.

Problema 7129

Fie $a > 3$, un număr natural. Să se demonstreze că numerele : $(a-1)^3$ și $(a+2)(a-1)^2$ se scriu în baza de numerație a, cu aceleași cifre, diferind prin ordinea lor.

Corneliu N. Popescu, București

Soluția dată de *Eduard Minasian*, elev Pitești.

Numărul $(a-1)^3 = a^3 - 3a^2 + 3a - 1 = a^2(a-3) + 2a + a - 1$ se va scrie în baza a cu cifrele : $(a-3)$, 2 și $(a-1)$, adică $\overline{(a-3)2(a-1)}$.

Numărul $(a+2)(a-1)^2 = a^3 - 3a + 2$ se va scrie în baza a astfel $a^2(a-1) + a(a-3) + 2$, adică cu cifrele $(a-1)$; $(a-3)$ și 2, deci : $\overline{(a-1)(a-3)2}$, adică cu aceleași cifre ca primul, dar într-o altă ordine.

Problema 7130

Fie $ABCD$ un trapez oarecare (AD și BC respectiv baza mare și baza mică). Paralela dusă prin C la AB, taie diagonala BD în M și paralela tot la AB, dusă prin D, taie prelungirea diagonalei AC în N. Să se arate că AB este geometrică a segmentelor CM și DN.

Simon Petru, Tg. Mureș

Soluție dată de *C. Vasiliu*, elev liceul 1 Ploiești.

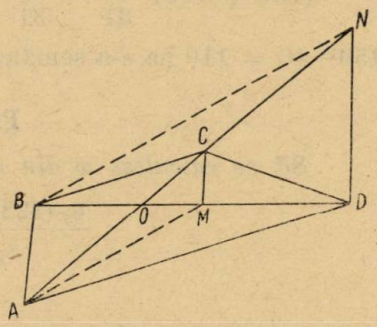
Fie O punctul de intersecție al diagonalelor.

Se știe că diagonalele unui trapez să taie într-un raport egal cu raportul bazelor lui, adică

$$\frac{OB}{OD} = \frac{OC}{OA} = \frac{BC}{AD}.$$

În trapezul $ABCM$ avem atunci

$$\frac{OC}{OA} = \frac{CM}{AB}.$$



În trapezul $ABND$ avem $\frac{OB}{OD} = \frac{AB}{DN}$;

dar $\frac{OC}{OA} = \frac{OB}{OD}$, deci $\frac{CM}{AB} = \frac{AB}{DN}$, adică $AB^2 = CM \cdot DN$.

Problema E : 2326

O cooperativă agricolă de producţie a semănat în prima săptămînă 5/18 din suprafaţa destinată grîului de toamnă ; în a doua săptămînă 8/27, iar în a treia săptămînă 12/31 din suprafaţa semănată în primele două săptămîni ; în a patra săptămînă cu 40 ha mai puţin ca în prima. Să se afle suprafaţa semănată în fiecare săptămînă.

Ion Albescu, Făgăraş

Soluţie dată de *Savu Ion*, elev Fieni :

$\frac{5}{18} + \frac{8}{27} = \frac{31}{54}$ din toată suprafaţa semănată în primele 2 săptămîni,

$\frac{31}{54} \cdot \frac{12}{31} = \frac{2}{9}$ s-a semănat în săptămîna a treia,

$\frac{31}{54} + \frac{2}{9} = \frac{43}{54}$ s-a semănat în primele 3 săptămîni,

$1 - \frac{43}{54} = \frac{11}{54}$ s-a semănat în săptămîna a patra,

$\frac{5}{18} - \frac{11}{54} = \frac{4}{54} = \frac{2}{27}$ s-a semănat mai puţin în săptămîna a patra faţă de prima săptămînă,

$40 : \frac{2}{27} = \frac{40 - 27}{2} = 540$ ha suprafaţa totală,

$540 \cdot \frac{5}{18} = 150$ ha s-a semănat în prima săptămînă,

$540 \cdot \frac{8}{27} = 160$ ha s-a semănat în săptămîna a doua,

$(150 + 160) \cdot \frac{12}{31}$ $\frac{310 \cdot 12}{31} = 120$ha s-a semănat în a treia săptămînă,

$150 - 40 = 110$ ha s-a semănat în săptămîna a patra.

Problema E : 2329

Să se calculeze x din egalitatea :

$$\frac{6,(428571)_{10}}{x_{10}} = \frac{3,(285714)_{10}}{\frac{113_4}{20_9}}.$$

unde indicii 4, 9, 10 arată sistemul de numeraţie în care este scris numărul.

I. Bogatu, Tecuci

Soluție dată de *Marinescu Veronica*, elevă Galați.

Transformăm fracția $\frac{113_4}{20_9}$ în sistemul zecimal:

$$113_4 = 1 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4 + 3 = 1 \cdot 16 + 1 \cdot 4 + 3 = 16 + 4 + 3 = 23_{10}$$

$$20_9 = 2 \cdot 9 + 0 = 18 + 0 = 18$$

Rezultă că:

$$\frac{113_4}{20_9} = \frac{23_{10}}{18_{10}}$$

Transformăm fracțiile periodice în numere mixte:

$$6,(428571) = 6\frac{428571}{999999} = 6\frac{47619}{11111} = 6\frac{15873}{37037} = 6\frac{429}{1001} = 6\frac{3}{7}$$

$$3,(285714) = 3\frac{285714}{999999} = 3\frac{31746}{111111} = 3\frac{10582}{37037} = 3\frac{283}{1001} = 3\frac{2}{7}.$$

Egalitatea dată devine:

$$\frac{6\frac{3}{7}}{x} = \frac{3\frac{2}{7}}{\frac{23}{18}},$$

$$x = \frac{6\frac{3}{7} \cdot \frac{23}{18}}{3\frac{2}{7}} = \frac{45}{7} \cdot \frac{23}{18} : \frac{23}{7} = \frac{5}{2}; \quad x = \frac{5}{2} = 2,5.$$

Problema E: 2330

Patrulaterul $ABCD$ are $\sphericalangle B = \sphericalangle D = 1$ dr; $AD = CD$ și $\sphericalangle BCA = \frac{2}{3}$ dr. Diagonalele lui se taie în P. Să se arate că:

$$\frac{PC}{PA} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ și } \sphericalangle BAD = \sphericalangle BPC.$$

Să se calculeze aria patrulaterului $ABCD$.

Florea I. Dumitrescu, Craiova

Soluția autorului. — Patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil. Atunci avem $AC = 2R$ (diametrul cercului); arc AD = arc $DC = 90°$; arc $BC = 60°$; arc $AB = 120°$.

$AB = R\sqrt{3}$; $BC = R$; $CD = AD = R\sqrt{2}$; $\sphericalangle ABD = \sphericalangle DBC = 45°$ deci BP e bisectoarea unghiului ABC.

În triunghiul ABC avem (teorema bisectoarei):

$$\frac{PC}{PA} = \frac{BC}{BA} = \frac{R}{R\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\sphericalangle BAD = \frac{\text{arc } BC + \text{arc } CD}{2} = \frac{60° + 90°}{2} = 75°;$$

$$\sphericalangle BPC = \frac{\text{arc } BC + \text{arc } AD}{2} = \frac{60° + 90°}{2} = 75°;$$

$$\text{aria } (ABCD) = \text{aria } (ABC) + \text{aria } (CDA); \text{ aria } (ABC) = \frac{BC \cdot AB}{2} =$$

$$= \frac{R \cdot R\sqrt{3}}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}; \text{ aria } (CDA) = \frac{AD \cdot CD}{2} = \frac{(R\sqrt{2})^2}{2} = R^2;$$

$$\text{aria } (ABCD) = \frac{R^2(2 + \sqrt{3})}{2}.$$

Problema E: 2332

Fie $a > 2$, un număr natural. Să se demonstreze că numerele $(a-1)^2$ și $2(a-1)$ sînt în baza a de numerație numere răsturnate.

Corneliu N. Popescu, București

Soluția autorului. — Numărul $(a-1)^2 = a^2 - 2a + 1 = a(a-2) + 1$, care în baza a se va scrie cu cifrele $(a-2)$ și 1, adică $\overline{(a-2)\,1}$.

Numărul $2(a-1) = 1 \cdot a + (a-2)$ se va scrie în baza a cu cifrele 1 și $a-2$, adică $\overline{1\,(a-2)}$. De unde rezultă ceeace trebuia arătat.

Problema E: 2334

Să se afle un număr de patru cifre divizibil cu 3, știind că: suma primelor trei cifre este divizibilă cu 16, suma ultimelor trei cifre este divizibilă cu 4 și cu 5, suma cifrelor e divizibilă cu 7, diferența dintre cifra sutelor și cifra zecilor e divizibilă cu 3. Numărul căutat nu are cifre egale cu zero.

E. Onofraș, profesor Ploiești

Soluție dată de *Barbu Adrian*, elev Iași. Fie N numărul căutat, ale cărui cifre le notăm cu a, b, c, d, adică în scriere simbolică $N = \overline{abcd}$. Deoarece $a+b+c$ se divide cu 16 rezultă $a+b+c = 16k$. Cum $a+b+c$ poate fi cel mult 27 putem scrie numai

$$a + b + c = 16 \qquad (1)$$

Tot din enunț rezultă $b+c+d = 20\ h$, $(4 \cdot 5 = 20)$. Dar cum $b+c+d$ poate fi cel mult 27 putem scrie numai

$$b + c + d = 20 \qquad (2)$$

Cum N e divizibil prin 3 rezultă că suma cifrelor sale se divide prin 3. Tot din enunț știm că suma cifrelor se divide prin 7. Deci, $a+b+c+d$ se divide prin 21 și cum $a+b+c+d$ poate fi cel mult 36 rezultă

$$a + b + c + d = 21 \qquad (3)$$

Scăzînd pe rînd ecuațiile (1) și (2) din (3) rezultă

$$d = 5\,; \quad a = 1$$

Înlocuind $a = 1$ în (1) putem scrie $b + c = 16$. Cum prin ipoteză diferența între b și c este un multiplu de 3, iar suma lor (fiind 15) tot un multiplu de 3, rezultă că b și c sînt multipli de 3. Singurele numere naturale mai mici ca 10 și a căror sumă să fie 15 — ele fiind multiple de 3 — sînt 9 și 6. Deoarece prin enunț b este mai mare decît c (diferența dintre cifra sutelor și cifra zecilor e divizibilă cu 3) rezultă $b = 9\,;\ c = 6\,;$ deci $N = 1965$.

Problema E : 2335

Oricare ar fi baza de numerație, nu există număr de $n>2$ cifre egal cu produsul cifrelor sale.

Dan Voiculescu, elev București

Soluția autorului. — Fie m baza de numerație și $N = x_1x_2 \ldots x_n$ numărul. Trebuie să avem simultan :

$$N = x_1 \cdot m^{n-1} + x_2 \cdot m^{n-2} + \ldots + x_{n-1} \cdot m + x_n$$

$$N = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$$

adică :

$$N \geqslant x_1 \cdot m^{n-1} \text{ și : } N < x_1 \cdot \underbrace{m \cdot m \cdot \ldots \cdot m}_{n-1 \text{ ori}} = x_1 \cdot m^{n-1}$$

ceea ce este imposibil.

CHESTIUNI DE EXAMEN

Subiectele lucrărilor scrise date la admiterea în Institutul de construcții din București, septembrie 1965

7311. a) Să se construiască graficul funcțiunii

$$f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 1}$$

folosindu-se și derivata a doua.

b) Să se determine coordonatele punctelor de intersecție ale curbei obținute la punctul a), cu curba $y = -\frac{x^2}{22}$.

7312. Pe dreapta Δ se iau segmentele $AB = \pm C = 2r$. Pe aceste segmente ca diametru, se construiesc de aceeași parte a dreptei Δ, două semicercuri. Se consideră punctul M mobil pe semicercul de diametru BC. Fie Q simetricul lui M în raport cu tangenta comună din B Se cere : *a*) Să se exprime aria triunghiului BMQ în funcție de $\sphericalangle MBC = \theta$. *b*) Să se determine valoarea unghiului θ, pentru care aria triunghiului este maximă.

7313. Să dă triunghiul ABC, în care $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Pe latura BC se ia punctul D, astfel încît $BD = m$. Cercul circumscris triunghiului ABD mai intersectează latura AC în E. Prin E se duce paralela la BC, care taie pe AB în F. Se cere :

a) Să se exprime lungimile segmentelor ED și EF în funcție de a, b, c, și m.

b) Să se determine m astfel încît patrulaterul $CEFD$ să fie paralelogram.

c) Să se determine m astfel încît triunghiul EDF să fie isoscel având ca bază DF. În ce caz cele două condiții pot fi îndeplinite simultan.

7314. Se consideră un con de rotație cu vîrful în V, de rază a cercului de bază r, și înălțime h. Se construiește un al doilea con, având aceeași înălțime h, cu vîrful în centrul cercului de bază al primului con și cu generatoarele perpendiculare pe ale acestuia.

Se cere : a) Să se afle aria cercului de secțiune între cele două conuri.

b) Să se calculeze aria laterală și volumul celui de-al doilea con.

*

7315. Două mobile M_1 și M_2 sînt pe aceeași axă animate de mișcarea ale cărei ecuații orare în funcție de timpul t, sînt respectiv :

$$x_1 = 2t^2 + t + 4 \quad \text{și} \quad x_2 = -t^2 + 5t + 8.$$

a) Să se calculeze datele la care se întîlnesc cele două mobile.

b) Să se calculeze vitezele algebrice respective ale acestor două mobile la aceste date.

c) Să se deducă de aci, dacă la întîlnirea lor cele două mobile se încrucișează sau dacă unul depășește pe celălalt.

Bacalaureat, Vietnamul de sud, 1964

7316. Mișcarea unui punct M este raportată la două axe rectangulare Ox și Oy. Coordonatele sînt exprimate în funcție de timp prin

$$x = 2t - 1 ; \quad y = 2t^2 - 2t - 1$$

(unități : secunda și centimetrul).

a) Să se determine și să se construiască traiectoria punctului M.

b) Să se calculeze componentele vectorului viteză și să se construiască vectorul viteză la momentul $t = 1$. Să se calculeze componentele vectorului accelerație și să se arate că acest vector rămîne echipolent unui vector fix cînd t variază ; să se construiască vectorul accelerație la momentul $t = 1$.

c) Să se determine și să se construiască hodograful mișcării relativ la punctul O.

d) Să se calculeze valoarea absolută a vitezei și să se indice cînd t variază de la 0 la $+\infty$, natura mișcării (accelerată sau întîrziată).

Bacalaureat, Maroc, 1964

Probleme date la admiterea în Institutul Politehnic Cluj, 1965

7317. Se dă un patrat $ABCD$ de latură $2a$ și pe laturile opuse AB și CD se construiesc triunghiurile echilaterale ABE, în interiorul patratului și CDF în exterior.

a) Să se arate că figura $ADFE$ este un romb și să i se calculeze diagonalele și unghiurile.

b) Să se calculeze perimetrul și aria patrulaterului $FCED$.

7318. Se consideră un con circular drept, avînd raza bazei și înălțimea de 10 m. Se taie acest con prin două plane paralele cu baza, situate respectiv la distanțele 5 m și 8 m de

bază. Să se calculeze volumul și aria laterală a trunchiului de con format de cele două plane de secțiune.

7319. Să se afle derivata funcției

$$y(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x}}+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{x}}$$

și să se construiască graficul funcției $f(x)=4\sqrt{xy(x)}$

7320. Să se rezolve ecuația trigonometrică:

$$\sin 3x-4\sin 2x=0.$$

7321. Fie triunghiul oarecare ABC. Notăm cu a mijlocul segmentului BC, cu b mijlocul segmentului AC, cu c acela al segmentului AB, iar A' este simetricul lui M în raport cu punctul a, B' este simetricul lui M în raport cu b, C' este simetricul lui M față de punctul c; M fiind un punct oarecare din planul triunghiului ABC, să se arate că dreptele AA', BB', CC' sînt concurente într-un punct M'.

Bacalaureat, Maroc, iunie 1963

7322. Fie două plane perpendiculare (P) și (Q); A și B sînt două puncte de intersecție; C este un punct din (P) așa fel ca triunghiul ABC să fie dreptunghic în B; D este un punct din cercul de diametrul AB din planul (Q). Să se demonstreze că triunghiurile CBD, ADB și ADC sînt triunghiuri dreptunghice.

Bacalaureat, Franța, iunie 1963

7323. Să se demonstreze că dacă A, B, C sînt unghiurile unui triunghi avem relația:

$$\frac{\cos A}{\sin B\cdot\sin C}+\frac{\cos B}{\sin C\cdot\sin A}+\frac{\cos C}{\sin A\cdot\sin B}=2.$$

Bacalaureat Paris, iunie 1965

PROBLEME PROPUSE *

7324. Suma a 43 bancnote de 1 leu, 3 lei, 5 lei, 10 lei, 25 lei și 100 lei este de 1567 lei. Numărul bancnotelor de 1 leu, 3 lei, 5 lei și al bancnotelor de 3 lei, 10 lei, 100 lei sînt sînt progresie aritmetică, iar numărul bancnotelor de 5 lei, 10 lei și 25 lei este egal cu numărul bancnotelor de 100 lei. Să se afle numărul bancnotelor de fiecare fel.

Toma Perl, Cluj

7325. Într-un garaj se află în total 81 camioane. Unele sînt de 1,5 tone, altele de 2 tone iar altele de 3 tone. Știind că toate camioanele de 1,5 tone transportă tot atîta încărcătură cît toate camioanele de 2 tone și că toate camioanele de 2 tone transportă tot atîta încărcătură ca cele de 3 tone, să se afle cîte camioane au fost de fiecare fel.

Admitere la școli pedagogice, 1965

IX (7324—7330), X (7331—7338), XI (7339—7345), S (7346—7354). *Soluțiile se primesc numai pînă la 15 mai 1966.*

7326. Să se arate că :

$$\frac{a^3b^2+2a^2b^3+ab^4}{a^3b^2+b^5}+\frac{b^4-ab^3-a^2b^2-2a^3b}{a^4+a^2b^2+b^4}=1.$$

G. Curcanu, elev, Tg. Jiu

7327. Să se găsească $2n+1$ numere întregi consecutive a căror sumă de fie $(n+1)^8-n^8$.

Gh. Buicliu

7328. Să se arate că :

$$(x+y)^3+(2x+y)^3+(9x+y)^3+(10x+y)^3=$$
$$=y^3+(4x+y)^3+(7x+y)^3+(11x+y)^3.$$

* * *

7329. Să dă trapezul $ABCD$ cu vîrful A variabil, iar vîrfurile B, C şi D fixe. Cercul de diametru BD taie bazele CD şi AB respectiv în E şi F. Dreptele FA şi AE taie pe BD în K şi L.

a) Să se arate că există relaţia $\frac{DB}{DL}+\frac{DB}{DK}-\frac{DF}{CD}-\frac{AB}{DE}=2$

b) Să se afle poziţia punctului A pentru care dreptele DB, CF, FA sînt concurente. c) Să se construiască trapezul în cazul b) cunoscînd suma bazelor, înălţimea şi diagonala DB.

I. Siclovan, Petroşani

7330. Să se arate că :

$$\frac{\frac{a_1(a_1-a_2)}{a_2+a_3+\cdots+a_n}+\frac{a_2(a_2-a_3)}{a_1+a_3+\cdots+a_n}+\cdots+\frac{a_n(a_n-a_1)}{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}}{\frac{a_1-a_2}{a_2+a_3+\cdots+a_n}+\frac{a_2-a_3}{a_1+a_3+\cdots+a_n}+\cdots+\frac{a_n-a_1}{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}}=a_1+a_2+\cdots+a_n$$

În cazul particular $n=3$ se obţine problema E : 1033 din G. M. F. nr. 10/1957.

Liviu Pîrşan, student Bucureşti

7331. Să se determine cea mai mică valoare a expresiei $f(x)=\sum_{i=1}^{n}|x-a_i|$ unde $a_i(i=1,2,\ldots,n)$ sînt numere reale date, iar x o variabilă reală.

Petre Liviu, Tîrgovişte

7332. Să se demonstreze inegalitatea :

$$x^n+x^{-n}+2(n^2-1)\geqslant n^2(x+x^{-1})$$

unde x este strict pozitiv şi n natural.

Andrei Rugină, elev Roman

7333. Să se arate că :

$$S = 1^2 \cdot n + 2^2 \cdot (n-1) + 3^2 \cdot (n-2) + \cdots + (n-1)^2 \cdot 2 + n^2 \cdot 1 = \frac{n(n+1)^2 \cdot (n+2)}{12}$$

a) direct şi b) prin inducţie completă.

* * *

7334. În patrulaterul inscriptibil $ABCD$ cu diagonalele AC şi BD perpendiculare notăm cu O intersecţia diagonalelor. Fie h_1, h_2, h_3 şi h_4 perpendicularele coborîte din O pe laturile AB, respectiv BC, respectiv CD, respectiv DA. Să se arate că :

$$(h_1 \cdot AB + h_3 \cdot CD) \cdot (h_2 \cdot BC + h_4 \cdot DA) = AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA$$

Dan Stănescu, elev Ploieşti

7335. Dacă ecuaţia $x^3 + ax^2 + bx + c$ admite ca rădăcini trei numere naturale consecutive, atunci expresia $E = c - ab$ este divizibilă prin 6.

Corneliu Marinov, student Bucureşti

7336. Să se arate că numărul $N = 407^{697^{321}} + 321^{407^{697}} + 697^{321^{407}}$ se divide cu 435.

Ioan Dăncilă, elev Sibiu

7337. Să se rezolve sistemul :

$$\cos^2 x + \sin^2 x \cdot \sec^2 z = \frac{5}{2}$$

$$\cos^2 y + \sin^2 y \cdot \sec^2 x = \frac{5}{3}$$

$$\cos^2 z + \sin^2 z \cdot \sec^2 y = \frac{5}{2}$$

N. Păun, profesor R. Vîlcea

7338. Dacă x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sînt rădăcinile ecuaţiei $x^5 - 1 = 0$ şi n este un număr natural, să se arate că :

$$2(x_1^n + \cdots + x_5^n) = x_1^n x_2^n + \cdots + x_4^n x_5^n = x_1^n x_2^n x_3^n + \cdots + x_3^n x_4^n x_5^n = 2(x_1^n x_2^n x_3^n x_4^n + \cdots + x_2^n x_3^n x_4^n x_5^n)$$

Kiss Elemer, Tîrgu Mureş

7339. Se dă dreptunghiul $ABCD$ de laturi $AB = a$ şi $BC = b$. Se ia un punct variabil M pe baza BC. Paralelele prin M la diagonalele AC şi BD

întîlnesc pe BD şi AC în M_1, respectiv M_2.

Să se afle locul geometric al mijlocului segmentului M_1M_2.

V. Ţîrdea, student Bucureşti

7340. Să se calculeze, fără ajutorul derivatelor,

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left((1+a^x)\cdot\ln(1+\frac{b}{x})\right),\ (a>1).$$

Simon Petru

7341. Fie şirurile :

$$(U_n)_{1,2} = (n^2 \pm n)^a\,;\ (V_n)_{1,2} + (n^2 \pm n + 1)^a\,;\ (W_n) = (n^2+1)^a$$

unde a este un număr raţional exprimat printr-o fracţie ireductibilă şi $n>1$ ($n\in N$). Să se demonstreze că termenii acestor şiruri sînt elemente ale mulţimii numerelor iraţionale.

I. Chiţescu, student

7342. Se dă ecuaţia $x^3 + x - m = 0$. Să se găsească valorile lui m care să satisfacă relaţia :

$$(x_1^9 + x_2^9 + x_3^9)(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) \geqslant \frac{5(x_1^7 + x_2^7 + x_3^7)}{x_1^5 + x_2^5 + x_3^5} - 1$$

unde x_1, x_2, x_3 sînt rădăcinile ecuaţiei date.

Florea Sorin, student Bucureşti

7343. Să se scrie ecuaţia cercului cu raza $R = 2$, tangent la cercul $x^2 + y^2 - 9 = 0$ şi ortogonal cu cercul $x^2+y^2-10x+4y-7 = 0$.

Traian Ionescu, Brăila

7344. Două cercuri C_1 şi C_2 se taie în A şi B. Prin A se duce o secantă care taie pe C_1 în M şi pe C_2 în N. Notăm cu M' punctul diametral opus lui M şi cu N' punctul diametral opus lui N.

a) Să se arate că $M'N'$ trece printr-un punct fix cînd secanta MN se roteşte în jurul lui A.

b) Presupunem cercurile ortogonale. În acest caz să se arate că M' este ortocentrul triunghiului MNN'.

c) Tot în cazul că cercurile sînt ortogonale să se arate că dreptele $M'N$ şi MN' trec prin B.

d) Perpendiculara în M' pe dreapta $M'N$ face cu direcţia pozitivă a axei Ox un unghi α ; să se arate că $\sphericalangle AMM' = \alpha$.

David Haim, Bîrlad

7345. Fie A un punct fix şi M un punct variabil, ambele situate pe un cerc oarecare O. Tangenta în M şi tangenta în A se interesectează în N. Se consideră deasemenea un punct fix I, situat pe dreapta OA. Se cere locul geometric al intersecţiei dreptelor ON şi MI.

C. Săndulache, profesor Negreşti

7346. Considerăm şirurile de funcţii $\{y_n(x)\}$ şi $\{z_n(x)\}$ definite prin $y_1(x) = z_1(x) = x$ şi prin relaţiile de recurenţă

$$y_k = (z_{k-1} + 1)^{y_{k-1}}; \quad z_k = z_{k-1}^{y_{k-1}}.$$

Să se afle

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y_n(x)}{z_n(x)}.$$

Tudor Zamfirescu

7347. Fie T mulţimea tripletelor de numere de forma (a, b, c) unde a, b, c sînt numere reale. Prin definiţie $(a_1, b_1, c_1) = (a_2, b_2, c_2)$ dacă $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$ şi definim în mulţimea T operaţia de înmulţire în felul următor :

$$(a_1, b_1, c_1) \cdot (a_2, b_2, c_2) = (a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2).$$

a) Să se rezolve ecuaţiile :

$$(a_1, b_1, c_1)\cdot x = (a_2, b_2, c_2) \quad \text{şi} \quad x\cdot(a_1, b_1, c_1) = (a_2, b_2, c)$$

unde x este necunoscută din mulţimea T.

b) Să se calculeze expresiile $(a, b, c)^n$ prin care înţelegem efectuarea înmulţirii de n-ori, şi $(1, 1, 1)$ $(2, 2, 2)$,...(n, n, n).

În legătură cu problema 5873.

F. Kacso, Tg. Mureş

7348. Să se arate că într-un patrulater convex inscriptibil, raportul între suma pătratelor diagonalelor şi suma diagonalelor este mai mic decît semiperimetrul patrulaterului.

C. Ionescu-Ţiu

7349. Dacă numerele x_i $(i = 1, 2,...,n)$ satisfac relaţia $x_1 > x_2 > \cdots > x_n \geqslant 0$, atunci pentru $n \geqslant 3$ şi $m \geqslant 2$ numere naturale, are loc inegalitatea

$$(x_1 - x_2)(x_1^m + x_2^m) + (x_2 - x_3)(x_2^m + x_3^m) + \cdots + (x_{n-1} - x_n)(x_{n-1}^m + x_n^m) < (x_1 - x_n)(x_1^m + x_n^m)$$

Dan Voiculescu, elev, Bucureşti

7350. Să dă un triunghi ascuţitunghic ABC şi două puncte M, N în interiorul său, eventual confundate. a) Să se arate cum putem găsi cel

mai scurt drum între M şi N care să atingă una din laturile triunghiului. b) Punctul M fiind fixat să se determine locul geometric (L) al punctului N astfel ca drumul minim să fie nedeterminat. c) Să se arate că punctul N admite o poziţie astfel încît să existe trei drumuri minime între M şi N. d) Ce poziţie trebuie să aibă M pentru a aparţine locului (L)?

Brînzei Dan, Iaşi

7351. În mulţimea numerelor reale R se defineşte operaţia

$$a * b = a + b - 1$$

Să se demonstreze că această operaţie

a) este comutativă şi asociativă,

b) admite un element neutru care se cere să se calculeze,

c) admite element simetric pentru orice element al mulţimii.

În acelaşi mulţime se mai defineşte şi operaţia $\perp$:

$$a \perp b = ab - a - b + 2.$$

Să se demonstreze că această operaţie este comutativă, asociativă calculîndu-se elementul neutru al acestei operaţii dacă îl admite, elementul simetric al unui element a, dacă îl admite. Să se arate că operaţia $\perp$ este distributivă faţă de operaţia $*$.

Corneliu N. Popescu, Bucureşti

7352. Să se arate că

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cos a & -\cos 2a \\ 1 & \cos a & \cos 2a & -\cos 3a \\ 1 & -\cos 2a & -\cos 3a & \cos 4a \\ 1 & -\cos 3a & \cos 4a & \cos 5a \end{vmatrix} = 0$$

C. Ionescu-Ţiu

7353. Fie D, E, F punctele de contact ale cercului I înscris triunghiului oarecare ABC. Dreptele AD, BE, CF se intersectează în S şi întîlnesc pentru a doua oară cercul circumscris O în punctele A_1, B_1, C_1 şi cercul înscris în D_1, E_1, F_1.

Să se arate că cercul I este înscris şi triunghiului A_1, B_1, C_1, punctele de contact fiind D_1, E_1, F_1, iar punctele O, I, S sînt colineare.

C. Ionescu-Ţiu

7354. Fie două funcţii f şi g. Notăm cu $f*g$ compunerea lui f prin g şi cu $g*f$, compunerea lui g prin f.

În general operaţia de compunere a funcţiilor este necomutativă, adică $f*g \neq g*f$.

Să se verifice următoarele :

a) $f=x^2$ şi $g=\sin x$; compunerea este necomutativă, adică $f*g \neq g*f$.

b) $f=2x^2-1$ şi $g=x(4x^2-3)$; compunerea este comutativă $f*g=g*f$.

c) $f=\dfrac{x(3-x^2)}{1-3x^2}$ şi $g=\dfrac{4x(1-x^2)}{1-6x^2+x^4}$; compunerea este comutativă.

d) Să se explice cazurile b) şi c).

Corneliu N. Popescu, Bucureşti

EXERCIŢII ŞI PROBLEME PROPUSE PENTRU CLASELE V—VIII *)

E : 2429. În Directivele Congresului al IX-lea al P. C. R. se arată că G. A. S. deţin în prezent 2 milioane hectare teren agricol. Datorită mijloacelor de producţie cu care vor fi dotate în perioaa 1966—1970, producţia medie va deveni : la grîu 2 200 kg la hectar, iar la porumb 3 300 kg la hectar.

Să se afle cîte hectare se vor cultiva cu grîu şi cîte cu porumb dacă se vor obţine 5 720 000 tone grîu şi porumb la un loc. (Soluţie aritmetică).

D. Acu, student, Cluj

E : 2430. Doi pionieri se găsesc la o distanţă de 4 km. Pornesc unul spre locul celuilalt cu aceeaşi viteză. Ştiind că primul porneşte cu 10 minute înaintea celui de al doilea şi că atunci cînd el parcursese $\frac{2}{3}$ din drum, al doilea parcursese numai $\frac{1}{2}$ din drum, să se aflte viteza lor.

I. Albescu, Făgăraş

E : 2431. Într-un depozit este de două ori mai mult cărbune decît în altul. Dacă s-ar mai aduce la primul depozit 8 tone de cărbune, iar la al doilea 14,5 tone, ar fi în amîndouă depozitele aceeaşi cantitate de cărbune. Cîte tone de cărbune erau la început în fiecare depozit ?

La admitere în clasa IX, Bacău 1965

E : 2432. Să se efectueze exerciţiul :

$$\left[\left(\frac{40}{63}-\frac{8}{21}\right) : 20+\left(5\frac{5}{9}-\frac{7}{18}\right) : 35-\left(\frac{83}{90}-\frac{41}{50}\right) : 2\right]\cdot 21$$

La admitere în clasa IX, Bacău, 1965

---

*) V (E : 2429—2432) ; VI (E : 2433—2439) ; VII (E : 2440—2443) ; VIII (E : 2444—2449). *Soluţiile se primesc numai pînă la 15 mai 1966.*

E : 2433. Să se efectueze :

$$\frac{\left(7+6\frac{6}{19}+6\frac{7}{6}\cdot\frac{66}{11}\cdot\frac{0{,}7}{60}\right)\cdot\left(0{,}2:\frac{1}{5}+\frac{1}{2}:0{,}5\right)}{\frac{196}{743}\cdot\left(\frac{1}{35}-\frac{2}{495}+\frac{3}{7}-\frac{4}{175}+2\right)\cdot}$$

La admitere în clasa IX, Bacău, 1965

E : 2434. Un motociclist a parcurs distanța dus-întors dintre două localități, avînd viteza medie de 49,5 km pe oră.

Știind că la dus motociclistul a avut viteza de 55 km/h, să se afle cu ce viteză s-a întors motociclistul.

C. Baeră, Păunești

E : 2435. Un magazin de confecții a vîndut într-o lună 371 de uniforme școlare și costume bărbătești încasînd în total 177 888 lei.

Un costum bărbătesc costă 1008 lei iar o uniformă 330 lei.

a) Să se afle cîte uniforme școlare s-au vîndut și cîte costume.

b) Cît la sută din numărul total de uniforme existente în magazin au rămas nevîndute dacă cele vîndute reprezentau $\frac{5}{8}$?

Nelu I. Dobre

E : 2436. Să se efectueze operațiile :

$$\frac{7{,}625+\sqrt{129\frac{25}{64}}-\left(9\frac{48}{126}+3{,}116\right)}{4\frac{2}{3}\cdot 0{,}15+0{,}3675:\frac{7}{50}-\sqrt{2{,}89}}:\frac{\left(6\frac{2}{3}+2\frac{4}{15}+5\frac{1}{2}\right):\frac{1}{15}-30\frac{5}{28}}{97\cdot 2\frac{3}{4}\cdot 3\frac{19}{22}:42\frac{1}{2}}$$

La admitere în clasa IX, Ploiești, 1965

E : 2437. Să se rezolve exercițiul :

$$\left[\frac{\left(1{,}5+2{,}(6)+3\frac{3}{4}\right)\cdot 3{,}6}{14\cdot 15\frac{1}{8}:2}+\frac{59}{103}\right]\cdot\frac{\sqrt{5{,}76}\cdot 3\frac{3}{4}+2\frac{2}{11}\sqrt{17{,}0156625}}{5{,}8(3)\cdot 2\frac{4}{7}}$$

La admitere în clasa IX, Ploiești, 1965

E : 2438. Să se efectueze

$$\left(\frac{2{,}5+3\frac{1}{3}}{2{,}5-1\frac{1}{3}}:\frac{4{,}6-2\frac{1}{3}}{4{,}6+2\frac{1}{3}}\right):\left(\frac{0{,}05}{\frac{1}{7}-0{,}125}-0{,}2\right)$$

La admitere în clasa IX, Ploiești, 1965

E : 2439. Să se efectueze operațiile :

$$\left(\frac{\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}{\sqrt{462{,}25}-20\frac{11}{18}}+\frac{1}{2}}{1-\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}}}-\frac{1}{3}\right):\left(1+\frac{1}{3}\times\frac{\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}}+\frac{1}{2}}{1-\frac{3}{8}}\right)$$

La admitere în clasa IX, Ploiești, 1965

E : 2440. La finele anului un elev are la C. E. C. o depunere cu 275 lei mai mare față de depunerea de la finele anului precedent.

Să se determine ce sumă avusese elevul depusă la C.E.C. la finele fiecăruia din cei doi ani, știind că $\frac{1}{25}$ din depunerea anului al doilea este cu 8 lei mai mare decît 8% din depunerea primului an.

Mazarachi Chimon, Galați

E : 2441. Să se efectueze

$$\frac{\left(3\frac{1}{2}-1\right):5+\left(5\frac{3}{4}-2\right):6+\left(4\frac{7}{9}-3\right):5\frac{1}{3}-\frac{11}{24}}{2\frac{1}{5}+\frac{1}{1\frac{1}{3}}-\sqrt{3{,}8025}}.$$

La admitere în clasa IX, București 1965

E : 2442. Să se efectueze

$$\frac{\left(6\frac{5}{9}-3\frac{1}{4}\right)\cdot 2\frac{2}{17}+40{,}5\cdot\frac{2}{9}:9}{4:6{,}25-1:5+\frac{1}{7}\sqrt{38416}+0{,}28}$$

La admitere în clasa IX, București, 1965

E : 2443. Să se efectueze :

$$\left(\frac{20\frac{8}{15} \times 7{,}5 - 54{,}6 : \frac{2}{5}}{3\frac{13}{21} \times 8{,}4 - 1183{,}36 : 14\frac{1}{3}} \right) : \left(\frac{1}{2} : 0{,}125 \right).$$

La admitere în clasa IX seral, Bucureşti, 1965

E : 2444. Volumul de investiţii în noul plan cincinal va fi de aproximativ 250 miliarde lei. Din acestea 57,6% vor fi repartizate industriei, de $4\frac{1}{2}$ ori mai puţin transporturilor şi telecomunicaţiilor iar agriculturii cu 3 miliarde lei mai mult decît transportului şi telecomunicaţiilor.

Să se afle cîte miliarde vor fi repartizate industriei, agriculturii, telecomunicaţiilor şi transporturilor.

Radu Gheorghe, profesor, Mizil

E : 2445. Un excursionist avînd de parcurs cu bicicleta o anumită distanţă, face în prima zi 20% din această distanţă, a doua zi $\frac{4}{15}$ din distanţa rămasă, iar a 3-a zi parcurge cu 14 km mai mult ca în ziua a doua. Făcînd bilanţul după cele 3 zile de drum, constată că a trecut de jumătatea drumului cu 90 km.

Se cere ce distanţă a parcurs în fiecare zi şi care este lungimea totală a drumului.

La admitere în clasa IX, Bacău, 1965

E : 2446. Membrii unei cooperative agricole de producţie au strîns în anul 1964 de pe două loturi 440 tone grîu. În anul 1965 recolta de grîu s-a mărit cu 60% de pe primul lot şi cu 75% de pe al doilea, astfel că au strîns 743 tone grîu. Cît s-a strîns în anul 1965 de pe fiecare lot.

La admitere în clasa IX, Ploieşti, 1965

E : 2447. Într-o secţie de lăcătuşerie a unei întreprinderi pentru confecţionarea unor panouri electrice, se taie plăci metalice avînd cateta $AB = 150$ cm şi ipotenuza $BC = 170$ cm.

La aceste plăci se decupează cîte o ferestruică drepunghiulară $MNPA$, înscrisă în triunghi (M pe AB, N pe BC şi P pe AC), pentru introducerea mînerului de acţionare la declanşarea sau întreruperea curentului.

Să se determine laturile dreptunghiului $MNPA$, ştiind că perimetrul său este de 174 cm.

La admitere în clasa IX, Ploieşti, 1965

E : 2448. La Combinatul de Hîrtie şi Celuloză din Călăraşi o lucrare trebuie terminată de 18 muncitori în 25 de zile.

În cît timp a fost terminată lucrarea dacă doi muncitori au depăşit norma cu 25%, iar alţi doi muncitori cu 125,5%.

La admitere în clasa IX, Bucureşti, 1965

E : 2449. Să se arate că :

$$\frac{a_1 - a_2}{1 + a_1a_2} + \frac{a_2 - a_3}{1 + a_2a_3} + \frac{a_3 - a_1}{1 + a_3a_1} = \frac{(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)}{(1 + a_1a_2)(1 + a_2a_3)(1 + a_3a_1)}.$$

C. Ionescu-Ţiu

CALEIDOSCOP MATEMATIC

1. *O problemă veche.* Se împarte o sumă de bani în modul următor. primului i se dau a lei şi a n-a parte din rest, celui de al doilea i se dau $2a$ lei şi a n-a parte din rest, cel de al treilea primeşte $3a$ lei şi a n-a parte din rest şi tot aşa în continuare, fiecare beneficiar trebuie să primească cu a lei în plus decît precedentul şi a n-a parte din rest. Se constată la sfîrşitul operaţiei că fiecare beneficiar a primit totuşi o aceeaşi sumă. Se întreabă care este numărul beneficiarilor şi partea fiecăruia.

— Această problemă este atribuită lui Euler, dar ea se găseşte şi în lucrările unor autori mai vechi.

Notînd cu x suma de împărţit, cu y partea fiecăruia şi cu z numărul beneficiarilor, se formează, din egalarea sumelor primite de primii doi, ecuaţia :

$$a + \frac{x - a}{n} = 2a + \frac{1}{n}\left[x - \left(a + \frac{x - a}{n}\right) - 2a\right],$$

ceea ce dă $x = (n - 1)^2a$, $y = (n - 1)a$, $z = n - 1$

2. *O problemă curioasă.* Doi bărbaţi Vasile şi Gheorghe, însoţiţi de fiii lor, Petre şi Ion, cumpără cărţi. Fiecare carte costă un număr de lei egal cu numărul cărţilor cumpărate. Tatăl cheltuieşte cu 15 lei mai mult decît fiul. Vasile a cumpărat cu 3 cărţi mai puţin decît Petre. Cum se numeşte tatăl lui Ion?

— Dacă x este numărul cărţilor (şi totodată preţul unei cărţi) cumpărate de tatăl şi y numărul cărţilor (şi preţul unei cărţi) cumpărate de fiul său, avem :

$x^2 - y^2 = 15$ care este o ecuaţie în numere întregi cu soluţiile ($x=4$, $y = 1$) şi ($x = 8$, $y = 7$).

Dar după enunţ, trebuie luat pentru Vasile $x = 4$ şi pentru Petre $y = 7$, deci pentru Gheorghe $x = 8$ şi pentru Ion $y = 1$.

Rudenia se stabileşte deci după cum urmează : Vasile este tatăl lui Ion iar Gheorghe acel al lui Petre.

3. *Ghicirea unui număr.* Spuneți unei persoane să-și aleagă un număr oarecare cu care să efectueze pe rînd următoarele operații:

1. Să multiplice numărul ales cu un număr oarecare a.
2. Să dividă produsul cu un al doilea număr cunoscut b.
3. Să multiplice cîtul obținut printr-un al treilea număr cunoscut d.
5. Să dividă ultimul rezultat prin numărul la care s-a gîndit.
6. Să adauge la ultimul cît numărul ce trebuie ghicit și să comunice rezultatul f pe care l-a obținut. Numărul la care s-a gîndit persoana este:

$$N = f - \frac{ac}{bd}.$$

— Într-adevăr, efectuînd cele 6 operații indicate mai sus, găsim după fiecare operație.

$$1°\ aN;\ 2°\ \frac{aN}{b};\ 3°\ \frac{acN}{b};\ 4°\ \frac{acN}{bd};\ 5°\ \frac{ac}{bd};\ 6°\ f = N + \frac{ac}{bd}\ \text{deci}\ N = f - \frac{ac}{bd}.$$

În practică se dau lui a, b, c, d valori astfel încît să se evite fracțiile de exemplu:

$$a = 12,\ b = 3,\ c\text{-arbitrar și } d = 2 \text{ sau } 4.$$

4. *Rezultate interesante.*

$9^2 = 81$
$99^2 = 9801$
$999^2 = 998001$
$9999^2 = 99980001$

$11^1 = 11$
$11^2 = 121$
$11^3 = 1331$
$11^4 = 14641$

$6666.9999 = 66653334$
$88888.99999 = 8888711112$
$222222.999999 = 222221777778$
$3333.999999 = 3332996667$

$111^2 = 12321$
$1111^2 = 1234321$
$11111^2 = 123454321$
$111111^2 = 1234564321$

CĂRȚI NOI

I. Șt. Mușat, C. Ionescu-Țiu. Exerciții și probleme de matematică pentru concursul de admitere în licee. Biblioteca Societăți de științe matematice din R. S. România, nr. 71, Ed. didactică și pedagogică, 1965. — Lucrarea conține indicații generale de rezolvare a problemelor, formule, date, tabele de numere folositoare, precum și 18 capitole cu un număr de circa 1000 de exerciții și probleme. de *aritmetică*, *algebră* și *geometrie* din materia claselor V—VIII, grupate pe capitole în funcție de chestiunile teoretice a căror cunoaștere face posibilă rezolvarea lor.

În prima parte se găsesc *enunțurile* exercițiilor și problemelor, iar în a doua parte *soluții* sau *răspunsuri*. Această separare a enunțurilor de soluții s-a făcut în ideea de a da cititorilor posibilitatea ca la citirea enunțurilor problemelor să nu fie influențați de prezentarea soluțiilor, înainte de a încerca singuri să le rezolve.

Ordinea de prezentare a capitolelor este în concordanță cu cea din programele școlare, ceea ce face ca lucrarea să intereseze elevii oricăreia din clasele V—VIII și îndeosebi pe cei

ce se pregătesc în vederea examenului de absolvire a şcolii generale de 8 ani şi a concursului de admitere în licee.

Enunţurile exerciţiilor şi problemelor sînt în parte compuse de autori, altele sînt dintre cele propuse în ultimii ani la concursurile de admitere în şcolile medii sau dintre cele publicate în Gazeta matematică seria B.

Atît chestiunile de *Aritmetică*, cît şi cele de *Algebră* şi de *Geometrie* conţin cîte un capitol cu *exerciţii şi probleme recapitulative* la care se îmbină materia celorlalte capitole.

La partea a doua cu *indicaţii, soluţii* sau *răspunsuri* s-a ţinut seama ca unor probleme mai dificile să li se dea soluţii şi indicaţii complete pentru rezolvarea lor.

Lucrarea poate fi de folos şi elevilor de liceu pentru o pregătire temeinică la matematică.

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME *

Soluţii bune primite pînă la 1 octombrie 1965 de la:

PLOIEŞTI *(urmare)* Liceul 3. clasa XI Rădulescu Nicolae (6927, 8, 30, 3, 7, 8, 40, 1, 3, 5—7, 50, 4). *L. 5* cl. IX. Nicolae Florea (6952, 4, 5, 7—61, 6, 86, 7, 7001—3, 7, 10, 3, 4, 24, 8, 48—51, 66, 7, 9, 70, 3, 6, 7, 80, 91). Cl. X. *Voicilaş Cornelia* (6795—7, 9, 801—3, 5, 8, 9, 11—3, 5, 7—9, 21, 4, 34, 5, 8, 40—4, 7—59, 62—70, 2—4, 8—81, 95—9, 901, 2, 9). Cl. XI. Lungu Valeria 6840—3, 7—57, 62—5, 7—70, 2, 3, 8, 9, 81, 3, 7, 8, 95, 7002, 3). L. 6 cl. VII. Nicolae Daniela (E: 2312, 23, 5, 6, 33, 8, 49, 80, 93, 5). Cl. VIII. Stan Constantin (E: 2319, 25—8, 33, 6—9, 50, 6930—4, 96). Cl. XI. Rizea Emilia (6841, 7—50, 2, 4, 64, 6, 9—71, 9, 81). Absolvenţi: Minculescu Gh. (6808, 13, 47—55, 4, 62, 8—70, 6, 9, 81, 4, 6, 92, 7, 8, 30—4, 40, 7, 9, 51, 4, 6, 7, 9, 60, 3), *Oprescu Gabriel* (6816, 31, 6, 9—43, 5—53, 5, 6, 9—70, 3, 6—89, 914, 6).

PLOPENI (Ploieşti). Cl. VIII serală. Voinea Gheorghe (E: 2291, 3—6, 9—302, 7, 8, 12, 3, 6, 9—22, 4—7; 6847—50, 64—8, 927, 8, 30—4). Cl. XI. Moroiţă Dumitru (6840, 2, 3, 51, 6, 72, 4, 88, 9, 901, 21, 3, 4, 6, 8, 42, 5, 56, 7, 91, 7013, 9, 22, 4, 8).

POTCOAVA. Dinu Valeriu (6720, 2, 4, 9, 83, 6, 91, 41, 7, 8, 62, 4, 7—9, 81, 8, 927, 8, 31—3, 76).

PRUNDUL BÎRGĂULUI (Cluj). Cl. X. Dragotă Dinu (6797—9, 801, 2, 47—50, 2, 4, 9, 62, 4—6, 9, 70, 4, 81, 927, 8, 30, 7, 8, 41, 3, 5, 6). Cl. XI. Boidriu Octavian (6843, 51, 3, 63, 6, 8, 74, 80, 927, 9, 31, 2, 38, 46).

PUCIOASA (Ploieşti). *L. 1* cl. X. Cimpoca Gheorghe (6936, 41, 5, 51, 2, 7048, 9, 7050, 9, 60, 1, 6, 9, 73, 5, 6, 8), Cămătăroiu Maria (6921, 43, 55, 7, 8, 95, 6, 8, 7002, 3, 4, 24, 76, 91), Diaconu Gheorghe (6920, 1, 38, 41, 9, 52, 5, 7, 9, 63, 87, 9, 95—7, 7000—4, 21, 2, 4, 70, 8, 80), Enăchescu Adrian (6847—50, 5, 62, 4, 6—9, 79, 84, 8), Pavel Cristian (6927, 8, 30—3, 5, 8, 45, 6, 9, 52, 7, 95, 6), Mărculescu Carmen (6847—50, 3, 62—4, 7, 79, 816, 93, 931, 2, 4, 60, 95, 8, 7002, 3), Mărculescu Corneliu (6843, 50, 1, 3, 9, 61, 3, 86, 93, 902, 28, 51, 5, 60, 88, 9, 98, 7000, 2—6, 14, 22, 7), Pavel Cristian (6847—9, 62, 4, 6—70, 8, 9—81), Poll Elisabeta (6855, 66, 88, 927, 8, 30—4, 42, 6, 9), Tabacu Ion (6862, 3, 70, 9, 81, 7—9, 34, 46, 9, 88, 96, 7003, 4). Cl. X. Mac Nicolae (6846, 9, 62, 83, 6, 8, 90—2, 5—8, 7000, 2—5), *Vasilescu Nicolae* (6922, 3, 56, 60, 83, 6, 8, 90—2, 5—8, 7000, 2—5, 7—9, 14, 6, 7, 22, 6—8, 30, 9, 41, 2, 4—7, 50—2, 4, 9, 60, 2—5, 72, 3, 5—8, 80, 1, 95, 7105, 10, 2, 3), *Zecheru Gheorghe* (6843, 56, 9, 63, 70, 1, 3, 85, 6, 95, 920, 3, 35, 6, 9, 43, 7, 51—3, 82, 6—9, 95—7, 9, 7000—5, 7028, 45). Cl. XI. Aldea Ion (6928—36, 42, 5—7, 7002), Niţescu Ştefan (6921—3, 5, 8—30, 33—5, 43, 7—52, 4, 6—8, 61, 3, 9, 73, 5, 80), Rîmbu Nicolae (6847—55, 7, 9, 62—9, 80, 8, 96). Absolvent *Bîrlog Corneliu* (6797, 8, 800, 2, 3, 11—5, 7, 8, 29, 31, 5—9, 42, 6, 9, 60, 1, 4, 7, 72—4, 6—9, 81, 6, 8, 93, 902, 9, 14, 5).

RĂCARI (Bucureşti). cl. IX. Marcu Ioana (6847—9, 62—6, 8—70, 9—81, 3, 4). Cl. XI. *Andrei Ion* (6843, 7—52, 4, 7, 9, 64—70, 9, 81, 4, 927, 9—34, 6, 8, 41—3, 5, 6, 50, 4, 6, 7), Antonescu Aurelia (6936, 7, 42, 5, 90, 5, 7, 9, 7001—3, 7, 10, 4, 24), Catană Gheorghe

---

Evidenţiaţii ca rezolvitori de probleme sînt scrişi cu litere cursive.

(6844, 7—9, 51, 4, 62, 4, 8, 97, 80, 1, 4, 8), Niculescu Cecilia (6955, 87, 9, 92, 8, 7000, 1, 10, 14, 24, 45, 9, 55, 66, 9, 73, 7, 88, 91).

RĂDĂUȚI. L.2 cl. VII. Weinstein Bertha (E : 2307, 8, 11—3, 24—6, 8, 38). Cl. IX. Guşetu Dorin (6860, 8, 9, 70, 2, 8, 87—9, 909, 31, 4, 8).

RĂSUCENI (București). Cl. IX. — (6840, 1, 7—53, 5, 9, 62—70, 9—81, 7, 8, 921, 7, 8, 30—4, 6, 7, 41, 2, 5, 6, 9).

REȘIȚA. S. g. 1 cl. VIII. Andrei Radu (E : 2307, 8, 13, 9; 6847—9, 53, 62, 4—6, 8—70, 80). Cl. XI. Joiart Ioan (6927—9, 31—3, 8, 40—3, 5—7, 50, 4, 5, 63, 7002—4, 28, 45). Absolvent *Somide Horiana* (6847—9, 5â, 3, 5, 9—70, 7—81, 3—6, 92, 6, 920, 7—9, 31, 4, 8, 43, 6, 9—53).

RÎMNICUL SĂRAT. Cl. IX. Motaş Emil (6927, 8, 31, 2, 4, 38, 46, 9, 60, 80, 7, 8, 96, 7003, 22, 51, 2, 9, 66, 8, 70, 3, 6). Cl. XI. *Vraciu Constantin* (6920—3, 7—60, 2—4, 6, 9, 70, 2, 3, 5, 8, 80, 92—7—7000, 10, 3, 4, 6—22, 4, 30, 5—7, 9—40, 2, 4, 5, 7, 9—52, 4—6, 9—61, 3, 4, 6, 73, 6—8, 80, 1, 3, 9, 105).

RÎMNICUL VÎLCEA. Cl. X. Dănescu Emilia (6842, 7—50, 9, 62, 4—70, 9—81), Siretchi Roman (6927, 8, 30—4, 6, 8, 41—3, 6, 9, 50). Cl. XI. Catargiu Virginia (6923, 38, 43, 5—7, 63, 70, 6—8, 80, 91, 110), Diaconescu Elena (6927, 31, 3, 6, 7, 8, 46, 9, 50, 4, 6, 7002, 3, 5), Droaşcă Florin (6874, 921—4, 7, 8, 30—7, 42, 3, 9, 54), Moldoveanu Floriana (6842, 7—52, 4, 5, 7, 62, 4, 5, 7—9, 79, 81, 4, 8, 927), 34, 8, 41, 50, 4, 95, 6, 7002, 3), Popescu Constantin (6920, 2, 7, 8, 31, 2, 4, 6, 8, 43, 9, 50, 73),) Roman Traian (6920,7, 8, 30—3, 7, 8, 46, 50, 2, 4). Absolvent Constantinescu Nicolae (6847—50, 9, 62, 4—9, 79—81, 927, 9, 31—4, 7, 40, 4—6, 9, 51, 4, 6, 7002, 4).

ROMAN. Cl. X. Haret Janeta (6922, 3, 7, 31, 2, 4, 5, 41—3, 5, 6, 9, 50, 2, 4, 7, 86), Pădurariu Ioan (6927—34, 46, 9, 50, 4, 95, 7, 7002—4), Smit Petru (6632, 5, 42, 8, 9, 62, 70—8, 80, 2, 720, 1, 5, 6, 20, 2, 4, 31, 50—2, 5, 7, 8, 76). Cl. XI. *Bercovici Nelu* (6842—5, 7, 8, 60, 92, 7, 909, 15, 9, 20—4, 7—57, 9, 60, 2—4, 70—3, 86—92, 5—7005, 19, 21, 4, 8, 39, 40, 4, 5, 7, 9—51, 60, 1, 3, 4, 9, 70, 3, 6, 7, 8, 80, 1, 4, 8, 9, 91, 105, 7, 10, 2), Blumenfeld Mirel (6927, 30—3, 8, 41, 3, 6, 9, 50, 4, 6, 7003—5, 28). Absolvent *Dolteanu Temistocle* (6840, 1, 4, 7—55, 62—71, 4, 6, 8, 9—88, 920— 7—47, 9—55), Orenstein Romeo (6927, 31—3, 6, 8, 40, 1, 3, 4, 6, 9—51, 4).

ROȘIORII DE VEDE. L.1. cl. VII. Dobrin Ion (E : 2307, 8, 11, 4—6, 8, 23—5; 6932). Cl. XI. Ceapă Iancu (6847—50, 2, 6, 9, 62, 5, 7, 79, 81, 9), Georgescu Grațiela (6847, 8, 52, 4, 62, 4, 5, 7, 8, 81, 8, 927, 31), Săndulescu Ion (6808, 40—4, 7—9, 62—70, 2—4, 8—81, 7—90, 5—900), Stanciu Gheorghe (6927, 8, 30, 43, 5, 6). L. 2 cl. X. Popescu Theodor (6942, 6, 57, 87, 95—8, 7002—5, 24, 61, 6, 9, 70, 8), Simion Florian (6927—36, 4, 5, 6, 52, 7, 95, 6, 8, 7002—5, 59—61, 6—70, 3, 5—8). Cl. XI. Buzea Dobra (6921—3, 31—7, 5, 6, 9—52, 7, 8, 90—2, 5, 6, 9, 7001—3, 24, 44, 5).

ROZNOV (Bacău). Cl. XI. Corfu Maria (6848, 50, 62, 4, 927, 30—3, 8, 41, 6, 9, 50, 4), Negrea Eugenia (6847, 59, 62, 6, 927, 8, 30, 1, 3, 41, 69, 50, 4).

RUDINA (Oltenia). Absolvent Cangiuc Costel (6895, 6, 904, 1, 2, 6, 20—3, 7—37, 41, 5, 7, 9).

RUPEA (Braşov). Cl. X. Vlad Ioan (6847—9, 52, 4, 62, 4, 7—9, 79, 81, 3, 916).

SĂCELE (Dobrogea). S.g. cl. VIII. Boboc Maria (E : 2324—8, 33, 6, 41, 50, 6927, 30, 1, 3, 5, 6). L.1 cl. XI. Cseke Lenke (6841, 3, 7, 52, 4, 9, 65, 7, 9, 70, 84, 7, 8, 95, 6, 922, 7, 8, 31—4, 6, 9, 42, 3, 6, 9, 50, 2, 7002, 3, 5).

SAGNA (Roman). Cl. VI. Bogza Adrian (E : 2307, 8, 10—2, 23—8, 36—8).

SALCIA (OLTENIA). Cl. X. Beznă Gheorghe (6923, 7, 31, 2, 7, 41, 6, 9, 50, 2—6, 7005), Grasu Ovidiu (6842, 7—9, 51, 62—8, 79, 81, 4), Vasile Nelu (6863, 7, 80, 927, 8, 30—3, 5, 42, 6, 9, 57).

SĂRMAȘ. Cl. XI. Cubleşan Ioan (6927, 8, 30—4, 7, 8, 41, 3, 5, 6, 9, 50, 2, 6—8, 63).

SATU MARE. L. 1 cl. IX. *Mitaru Alex.* (6921, 35—7, 41, 51, 2, 5, 7, 8, 64, 95—8, 7000—5, 14, 21, 48, 51—3, 60, 1, 3, 66, 8, 73, 6—8), Mureşan Smaranda (6847, 50, 62, 4, 8, 9, 70, 9, 81, 4, 30, 7002, 3), Sichet Margareta (6841, 51, 72, 84, 88, 912, 30, 6, 42, 53, 5, 88, 7001, 3). Cl. X. Marka Gavril (6850, 2, 4, 63, 5—7, 9, 87, 8, 927, 8, 31, 41, 5, 54, 6), Noje Georgeta (6928, 34, 5, 8, 60, 87, 8, 9, 95, 7001, 2, 4). Cl. XI. Bokor Carol (6927—33, 6—9, 11—3, 6, 50, 4, 7, 8), *Pop Gheorghe* (6750, 2, 3, 60, 1, 82, 7, 91, 6, 7, 801, 3, 10, 2, 3, 5, 7, 9, 31, 3, 41, 2, 7—9, 50, 2—4, 62—5, 7—9, 73, 9,84, 5, 7, 8, 95, 916, 20—4,30—4, 6—9, 41, 50, 4, 5, 7, 60), *Taloş Gheorghe* (6841, 7—55, 9, 62—9, 79—81, 4, 7, 8, 96, 927, 32, 4, 8, 41, 5, 6, 53, 6).

SĂVENI. Cl. IX. Vrabie Remus (6847—50, 62, 4, 5, 79, 81, 927, 31, 46, 95, 702, 3). Cl. X. Toler Aron (6847, 8, 50, 9, 62, 4, 5, 7—70, 8—84, 920—3, 41—3, 9, 50, 4, 95, 6, 7001—3). Cl. XI. Clocotici Valentin (6921—3, 7—38, 41—3, 45, 6, 9, 50, 2, 4, 7, 90—2, 5, 6, 8, 7001—4).

SEBIŞ (Crişana). Cl. IX. Jurcă Ştefan (6847—9, 64, 7—70, 8, 9, 82, 927, 30, 2—4, 8, 45—7, 7002, 3). Cl. X. Killik Arcadie (6795—7, 9, 801—3, 12, 8, 31, 5, 47—9), Kojcsa Attila (6927, 30—3, 5, 8, 46, 52, 7, 95, 7002, 3).

SIBIU. *S.g.1* cl. VIII. Zaharia Nicolae (E : 2281—3, 6, 8, 91—8). *S.g.4* cl. VII. Laschescu Dorin (E : 2307, 8, 11, 6, 22, 5—8, 33). *S.g.15* cl. VIII. Bucur Ioan (E : 2311, 2, 9, 24—8; 6927). *L.1.* cl. X. (6927—36, 40, 2, 5, 6, 9, 57, 62—4, 95, 9—7003), Lesciacu Dan (6847—9, 62—5, 8, 9, 79—81, 927, 31—3, 46, 95, 6, 7000, 2—4), Nemeş Sorin (E : (6847—54, 62—70, 8—81, 93—3, 49, 50, 90, 6), Vasile Alexandra (6847, 51, 4, 62, 4, 8, 70, 9, 927, 8, 30—6, 41, 6, 50, 4, 7). Cl. XI. Avram Ruxandra (6927, 31—3, 42, 6, 9, 50, 95, 6, 7002, 3, 64). Buzoianu Rodica (6927, 31, 2, 43, 6, 7, 50, 2, 4, 5, 6, 96, 7003), Dobra Mariana (6928, 9, 31—3, 6, 7, 42, 6, 9, 50, 4, 7), Rusnac Doina (6927, 8, 30—3, 42, 5—7, 88, 95, 7002, 3, 60), Todor Elvira (6859, 66, 8—70, 83, 927—34, 41, 5, 6, 50, 4, 7, 95, 7002, 3, 5). *L.2* cl. X. Tulea Mihai (6840, 56, 920, 1, 7—33, 4—6, 9, 52), Itu Aurelia (6927—9, 31—3, 6, 8, 46, 9, 7000—3), Solomon Aurelia (6927, 9, 31—4, 6, 8, 45, 9, 55, 7002, 3), *Trif Nicolae* (6920—4, 7—39, 41—7, 9, 63, 8, 9, 713, 5), Tipău Cornelia (6927—9, 31—3, 6, 8, 42, 6, 9, 80, 7003). *L.3* cl. X. *Zăgan Dumitru* (6840—3, 51, 51, 3, 5, 61, 3, 5, 6, 9, 70, 2—4, 8, 92, 5—8, 909, 14—6, 9, 31, 2, 8, 43, 9—51, 4—7—60, 7, 8, 71, 80, 3, 5, 7002, 39). Cl. XI. Ostap Ioan (6920, 7, 8, 30—3, 5, 40—7, 50, 2, 96, 7, 99—7006), Popescu Adriana (6909, 20, 1, 8, 35—7, 40, 2, 53, 6—8, 89, 93, 5—7000, 2, 3, 14, 6, 7, 22, 30, 7, 43, 4)., Pricop Sorin (6856, 7, 84, 90, 5—7, 922, 3, 32, 5, 43, 60, 2, 92, 5, 8, 9, 7002—5, 22), Sîrbu Sanda (6340 1, 3, 4, 56, 9, 72, 4, 8—80, 920, 1, 3, 4, 38, 9, 43, 5, 7, 52—4, 7, 9, 87—9, 91, 2, 7010, 4, 9, 23, 5, 30, 40).

SIMERIA. Cl. VII. Oprea Alex. (E : 2336—8, 41, 54, 67, 9, 73).

SINEŞTI (Argeş). Cl. VIII. *Rădoi Marin* (E : 2248, 52, 4, 8, 63, 5, 8, 71, 8) 81, 91, 3, 4, 6, 301, 2, 7, 8, 12, 3, 20, 4—6, 37, 57, 8, 9, 64—6; 6858, 62, 4, 81, 930, 2, 96).

SÎNNICOLAUL MARE (Banat). Cl. VIII. Voichiţă Doina (E : 2324, 9, 38, 40, 6—9, 61, 6).

SLATINA. *L.2* cl. X. *Stăncescu Ştefan* (6920, 1, 8, 30, 2—7, 41, 2, 5, 9, 52, 5, 7—64, 86—9, 95—7005, 20—2). Cl. XI. Eftodie Mircea (6847, 83, 915, 27, 8, 41, 3, 5, 9, 54, 6, 7, 95, 6, 7002, 3).

SUCEAVA. *L.1* cl. IX. Andriu Ion (6847, 9, 62, 4—6, 9, 81, 927, 8, 31, 2, 6, 8*l* 57, 61, 95). Cl. X. Cazan Sergiu (6847—52, 6, 62, 4, 5, 8—70, 8, 9, 81, 4, 90, 921, 7, 8, 30, 1, 4, 6, 49, 57, 7001—3), Olaru Radu (6941, 5, 52, 7, 60, 4, 95, 6, 7001—4, 59—61). *L.2* cl. X, Tebarcea Petru (6920, 4, 43, 53, 63, 7, 80, 95—7005, 9, 14, 24, 8, 48, 9, 60, 2, 4, 6, 70, 6—80, 91).

SIMLEUL SILVANIEI. Cl. VII. Ferenczi Ştefan (E : 2307—19, 21, 2). Cl. X. Atodiroaiei Mihai (6840, 7—52, 4, 6, 9, 62, 5—70, 8—80, 7, 9, 90, 927, 31, 3, 50, 2, 4, 6, 7, 7003).

ŞTEFĂNEŞTI (Argeş). *S.g.17* cl. VII. Popescu Cristian (E : 2324, 8, 9, 33, 6—40, 50).

STĂNEŞTI (Oltenia). Absolvent David Gh. Ioan (6862—4, 78, 89, 95, 6, 9, 902, 16, 20, 2, 31, 6, 8, 43, 4, 6—52, 4, 5, 7—9, 69, 7022, 4, 39, 44, 5, 7).

TABĂRA (Iaşi). Cl. X. Macovei Gheorghe (6801—3, 18, 9, 84, 9, 47—50, 62—6, 80, 1, 3—5, 923, 4, 7—32, 40—2, 52, 4).

TECUCI. *S.g.5.* Cl. VIII. Giuscă Dana (E : 2324—6, 9, 36, 7, 8, 56, 9, 60, 1).

TIMIŞOARA. *S.g.10* Cl. VIII. Meclejan Nicoletta (6325, 35, 8, 53, 5—7, 9, 66). *L. muzică şi arte plastice* cl. VIII. Mitrofan Lucia (E : 2336—40, 5, 53, 4, 8, 9). *L.1* cl. VIII. Teleagă Maria (6847—51, 62—4, 6, 7, 79, 81, 3, 927, 8, 31, 3, 96, 7002). Cl. X. Rogojan Dorina (6847—52, 5, 7, 62, 4—70, 81, 3, 927, 30—2, 41, 2, 56, 60, 7, 96, 7, 7002—4). *L.2* cl. XI. Growisch Richard (6847—50, 2, 4, 60—9, 927, 30—4, 8, 40, 4, 6, 9—51, 6, 7, 7002, 3).

TITU. Cl. XI. Pantazi Cristina (6841—3, 52, 9, 64, 84, 8, 96, 922, 36, 8, 41—3, 50, 4, 9, 90).

TÎRGOVIŞTE. *S.g.2* cl. VII. Chivăran Laura (E : 2308, 11, 2, 4, 6, 24—6, 38—40). *L.1* cl. VIII. Popa Cornel (E : 2307, 8, 11, 2, 24—6, 8, 36—9). Cl. IX. Frăţiloiu Nicolae (6840,

1, 7—50, 62, 4—70, 1—81, 3, 4, 7—9, 927, 9—34, 6, 8, 45, 6, 9, 50). *L.2* cl. IX. Soare Nicolae (6847—50, 62, 4, 5, 7—70, 8, 9, 81, 4, 31, 4, 7002). Cl. X. Bănică Aurel (6849, 52, 64, 79, 81, 927—31, 3, 5, 6, 41—3, 5—7, 49, 50, 62, 3, 7003), Săvulescu Florina (6927, 9, 31—4, 6, 42, 57, 7061, 3, 6, 73, 6). Cl. XI. *Enache Gheorghe* (6924, 8, 30, 3—9, 41—3, 50, 2—66, 9, 71, 3, 80, 8—92, 5, 6, 8—7000, 2, 3). Pîrvu Constantin (6956—8, 80, 9, 95—8, 7002—5, 24, 45, 69, 70). L.3. cl. X. Gheorghiu Aurelian 6866, 8, 9, 79, 80, 1, 3, 927, 8, 33, 4, 8). *Stanciu Virgil* (6920, 39, 49, 50, 2—5, 7, 9, 60, 2, 3, 8, 80, 3, 5—9, 91, 2, 5—7005, 7, 8, 10, 3—5, 21, 2, 6, 8, 37), Ţîrdea Gheorghe (6920, 7, 8, 30—8, 41, 2, 4—6, 52, 5, 7, 8, 63, 4). Cl. XI. Ştefănescu Călin (6921, 7, 8, 30—5, 40, 1, 3, 9, 50, 3, 4). Absolvent Atanasiu Adrian (6867, 90, 7, 8, 916, 9, 21, 3, 30, 1, 46, 9—52, 4, 6, 62, 83).

TÎRGU BUJOR. Cl. XI. Sufaru Gheorghe (6847, 8, 51, 3, 5, 9, 62, 5, 7—70, 9, 81, 8, 90, 931, 6, 8, 41, 4, 5).

TÎRGU LĂPUŞ. Cl. IX. Sonta Virgil (6855, 63, 8, 72, 87, 90, 921, 7—36, 41, 2, 5, 6, 9, 52, 7, 95—7, 9—7005, 10). Tapu Ion (6847—9, 62, 4—6, 8, 79, 81, 930—2, 8, 46, 57). Cl. X. Mureşan Roman (6923, 7—37, 41, 5, 6, 9, 50, 7).

TÎRGU JIU. *S.g.3* cl. VIII. Dănău Pepile (E : 2324—6, 36, 50, 8, 932, 6, 7), Udrică Mioara (E : 2324—6, 33, 8, 56, 7, 9, 60, 6, 6930). *L.1* cl. IX. Ciocîrlie Valeriu (6841, 52, 9, 72, 83, 928, 30, 3—8, 41, 3, 6, 9, 52, 9—61, 3, 81, 95—8, 700—3). Cl. X. Isac Const. (6847—50, 62—5, 7—9, 79, 81, 8) 927, 31, 46, 57), Mălăiuş Ilie (6923, 35, 6, 52, 89, 92, 5—7004, 14, 21), Petrescu Constantin (6841, 2, 7—50, 2, 4, 5, 7, 9, 62, 4, 5, 9, 79, 81, 3, 8). Cl. XI. Buşe Florian (6851, 5, 9, 933, 7, 41, 3, 5, 7, 52, 7, 63, 7002, 3, 7, 15, 9, 52, 77, 110), *Pestroiu Daniel* (6928, 35, 6, 9, 41—3, 9, 52—60, 2—4, 72, 88, 95, 7002—4, 60, 3,4, 6, 8—70, 81, 112). Petrescu Constantin (6923, 7—34, 41, 6, 9, 50, 4, 63, 80).

TÎRGU MUREŞ. *L.1* cl. X. Cistelecan Livia (7048, 50—2, 4, 5, 73, 7, 80, 1, 3, 8, 9, 96, 7, 110, 4), Păsat Mihaela (6927, 8, 31—4, 6—8, 41, 2, 5, 6, 9, 50, 2, 4, 7, 80), Păsat Gheorghe (6927, 8, 30, 1, 3, 4, 45, 6, 52, 63, 38, 49, 57, 98). *L.4* cl. X. Doboş Alexandru (6847, 50, 3, 5, 62, 5, 7, 9, 88, 927, 31, 4, 8, 43, 6, 50, 2—6, 9).

TÎRGU NEAMŢ. Cl. X. Andreescu Gheorghe (6849, 51, 2, 4, 9, 62, 4, 927, 30, 1, 4, 8, 46, 50, 4, 8, 7002, 3, 5).

TRUŞEŞTI (Suceava). Cl. IX. Roşu Mircea (6848—51, 62, 4—70, 9—81, 927—24, 8, 42, 5, 6, 9). Cl. X. Corduneanu Dumitru (6967, 86, 96—9, 7005, 7, 10, 3, 5, 9, 20, 2, 8, 30. 41, 9—52, 66, 8—70, 6, 7, 80, 2, 4, 91). Cl. XI. *Aionesei Ioan* (6920—4, 7—57, 60, 9, 71, 3, 80, 6—92, 5—7005, 7, 9, 15, 21, 4—7, 30, 5, 9, 42, 5, 51—5), *Arcip Petre* (6840—3, 6—55, 62, 4—8, 81, 920—5, 7—55, 7), Bălan Gheorghe (6922, 3, 7, 8, 30—3, 5—8, 40—2, 5, 6, 9, 50, 2, 5, 7, 75, 83, 6), Carpiuc Dumitru (6927, 8, 30, 3, 5, 6, 8, 42, 6, 9, 50, 88, 92, 5—7, 9, 7001, 3, 5, 20, 2, 4), *Gavril Ştefan* (6841, 3, 7—54, 62, 4—6, 8, 9, 70, 9, 80, 1, 4, 7—9, 96, 922, 7, 9—36, 43, 6, 9, 50, 4), *Schiopu Constantin* (6923, 4, 7—9, 31—4, 6—43, 5—7, 9, 50, 4, 6, 8, 60, 3, 90, 3, 5, 6, 7, 9, 7002—4, 31, 45), Simion Constantin (6927, 8, 30—3, 6, 8, 40, 3, 6, 7, 50, 4, 6, 60, 3, 7002).

TULCEA. *L.1* cl. VII. Ionescu Maria (E : 2307, 14, 6, 24—6, 8, 37, 8). Cl. VIII. Ilie Adrian (E : 2308, 11, 3, 4, 25, 8, 33, 8, 42, 5).

TURDA. *S.g.6* cl. VI. Bonţeanu Marius (E : 2307, 8, 11, 8, 23, 5, 6, 38, 9). *L.1* cl. X. Bogdan Mircea (6870, 1, 916, 20, 2, 7, 8, 30—4, 6, 7, 41—3, 5, 7, 9, 53, 6, 8, 82, 6, 90, 5, 8, 7000—5, 14), Chirilă Radu (6865, 942, 56, 80, 928, 43, 5, 60, 5, 6, 7002, 3, 7, 8), Chişiu Ioan (6847—50, 2, 5, 62, 4—70, 9, 81), Muntean Dumitru (6931, 4, 6, 8, 42, 5, 6, 50, 2, 7, 9, 99, 7003, 5, 88, 99). Cl. X. Tata Nicolae (6929, 31, 43, 54, 6, 8, 75, 88, 95, 7003, 81, 4, 109). *Pop Gheorghe* (6922, 7, 9—34, 6—58, 60, 3, 8, 72, 5, 80, 6, 88, 9, 93—5, 8, 7000, 2, 3, 5—7, 14, 6, 7, 22, 8, 33, 8, 9, 43—5, 7, 7005—12, 4, 60, 3, 6, 8—70, 80, 110). *L.2* cl. X. Şerban Viorel (6920, 1, 7—38, 40—2, 5, 6, 9, 50, 2, 7, 9—62). Cl. XI. *Dobre Iosefina* (6922, 8, 30, 4, 6—9, 41—51, 3, 4, 6, 8, 60, 88—90, 5—8, 7002—5, 14, 6, 7, 22, 7, 44, 5, 7, 60, 1, 76), *Reda Lucia* (6847—50, 4, 62, 4, 76, 9, 81, 3, 4, 6, 8, 909, 27, 9, 31, 4, 6—51, 4, 60, 7003, 14, 6, 33, 47).

TURNU MĂGURELE. *L. Unirea* cl. IX. Odăgescu Ioan (6931—3, 8, 46, 7, 9, 56, 7, 95, 9, 7003, 4).

TURNU SEVERIN. *S.g.1.* cl. VII. Burlea Dan (6323—6, 33, 6, 8, 56, 9, 65). Stocker Marina (E : 2336—40, 54, 6—9). Cl. VIII. Bădescu Iulian (E : 2336—9, 56, 7, 9, 63—6). *L.1* cl. X. *Popescu Constantin* (6842, 3, 73, 4, 87—90, 2, 4—7, 20—2, 7—57), *Vişan Ion* (6872, 3, 8—81, 3—5, 7—9, 916, 20—3, 7—39, 41—3, 50, 2—5, 7, 63—5, 72, 3, 5). *L.2* cl. X. *Zinţa Florentin* (6920, 1, 7, 8, 40—7, 9, 50, 2, 4, 6, 7, 61, 3, 5, 88, 9, 95—7005, 17, 24).

VĂLENII DE MUNTE. Cl. IX. Toader Ion (6847—9, 62—6, 8—70, 8—81). Cl. XI. *Bocan Ion* (6921—3, 7—38, 40—3, 5, 6, 9—58, 80, 3, 3, 7, 95—7004). Absolvenți: Popescu Victoria (6987—7047), Zaharia Ion (6841—50, 64, 5, 79, 81, 4, 6, 927, 31, 4, 44, 6, 8—51, 88, 7003).

VEDEA (Argeș). Cl. XI. Oprescu Simion (6843, 7, 9, 52, 4, 62, 4—6, 70, 9, 81, 4, 9, 27, 31—3, 8, 46, 9, 50, 4, 7002, 3, 5).

VIȘINA NOUĂ (Oltenia). Cl. X. Geară Petre (6927, 31—3, 7, 8, 41—3, 6, 9, 50, 4, 6, 71, 7002—4).

VÎRTOAPELE DE SUS (București). Cl. VIII. Nedelea M. (E: 2324—8, 36, 44, 51, 6, 8, 9, 65, 6).

ZLATNA (Hunedoara). Cl. IX. Oprea Niculae (6840, 7, 8, 50, 62—7, 9, 70, 8, 81, 4).

Pînă la 1 noiembrie 1965 s-au mai primit soluții bune de la:

ARAD. *L.1.* cl. 5. Negru Mariana (E: 2336—9, 54, 6, 9, 64—6). Cl. X. Betea Dan (6987—9, 95—7, 7000, 1, 4, 5, 14, 19, 21, 2, 4, 59, 66, 9, 73), Pop Ovidiu (6995—7, 7002—4, 59—61, 9, 77, 80), Cl. XI. Pîrvănescu Maria (6987—92, 5—7005, 7, 10, 4, 9, 21, 2, 4, 39, 40, 5, 7). L.2 cl. VI. Podea Delia (E: 2336—9, 54, 6, 7, 9).

ARDUD (Maramureș.) *L.1* cl. IX. Furman Clara (6840, 1, 7, 51, 5, 6, 62, 4, 7, 9, 70, 9, 81, 8).

AVRIG. *L.1* cl.IX. Vintilă Maria (6847—50, 62, 4, 7, 71, 2, 9, 81, 8).

BACĂU. *L.2* cl. 2. Cotma Aurel (6987, 8, 90—2, 7000, 2, 3, 7, 14, 9—22, 4—6, 8, 39, 40, 4, 5, 6,7, 50—2, 73). L.3 cl. VII. Giurgean Valeriu (E: 2337, 8, 40, 3, 52—4, 6, 7, 9).

BABANA (Argeș). Absolvent Nicolae Constantin (E: 2307, 25, 6, 50; 6931, 2, 66, 7004).

BĂICOI (Ploiești). *L.1* cl. IX. Boeru Ștefan (E: 2350, 65, 6, 79, 80; 6996, 7003, 4, 51, 2, 77, 134), Roman I. Ion (6989, 7051, 2, 66, 7, 70, 3, 5—7, 80, 91, 110).

BELINT. (Banat). *L.1* cl. VII. Neghină Dan (E: 2354, 6—9, 65, 8, 9, 76), Nicoli Florica (E: 2354, 6, 7, 9, 65, 9, 70, 6).

BISTRIȚA (Cluj). Absolvent Verveagă T. (6987, 8, 90, 1, 3, 5—7006, 10, 2, 6, 7, 21—5, 7, 8, 30, 2, 3, 8—40, 3—5, 7). L.1 cl. XI. Lupșa Nicolae (6991, 5—7, 7000, 2—5, 40, 5, 7), Mocodean Melania (6987—9, 95—8, 7000, 2, 3, 33, 44, 5), Weiss Frich (6988, 9, 95—7, 7000, 2—5, 45, 7).

BÎRCA (Oltenia). Absolvent Popa Ștefan (E: 2337—40, 9, 50, 3, 69, 70; 7004, 66, 70).

BÎRLAD. L.2. cl. XI. Rebegea Dan (6988—90, 2, 5—7003, 28, 49, 54). *L.3* cl. X. Nichifor Ionel (6996—8, 7000, 4, 5, 10, 49, 59—63, 70, 3, 6—8, 80, 91, 109, 20, 4, 7, 9—31, 4—6).

BOCȘA (Banat. *Șc. prof.* an III. Cioloca Adam (E: 2336—9, 50, 3; 6989, 95—7, 7002, 4).

BOLINTINUL DIN VALE (București). *L.1* cl. IX. Grigore Nicolae (E: 2322, 33; 6868, 88, 927, 31—3, 46, 95, 7002, 3, 24). Cl. XI. Tăchescu Ionel (6943, 4, 6, 50,22, 4, 5, 60, 1, 3, 5, 72).

BOZOVICI (Banat). Cl. VIII. Ignea Ana (E: 2340, 55, 63—6, 9—71, 3, 4), Piescu Cătălina (E: 2340, 56, 7, 9, 61, 3—6).

BRAN (Brașov). *Student* Dumitraș C. Dan (7050—2, 4, 5, 9—64, 6, 8—70, 3, 4, 6—8, 80, 1, 9, 91, 105).

BRAGADIRU (București). *L.1* cl. XI. Gheorghe Marian (6934, 52, 96, 7, 9, 7002, 5, 45, 52, 5, 62—4, 9, 70, 3, 6, 7, 80, 1, 8, 91, 110).

BRAȘOV. *S.g.2* cl. VIII. Ionașcu Ligia (E: 2356—9, 63—6), Melenciuc Alex. (E: 2336, 7, 9, 50, 6, 7, 9, 65). S.g.6. Oniga Viorica (F: 2354, 6—9, 62, 3, 5, 60). *L.1* cl. X. Bătătorescu Anton (6988—90, 2, 5, 9, 7002—4, 10, 5, 30). *L.4* cl. VIII. Barbu Gabriela (E: 2326, 8, 36, 7, 9, 59, 60, 6), Popovici Dan (E: 2326, 3, 36, 7, 9, 59, 60, 6). Cl. XI. Cotora Gheorghe (6988—92, 5—7005, 7, 10, 9, 21, 2, 4, 37, 9, 45, 7).

BRĂILA. *Absolvent* Mihai Ion (6988, 90, 9, 7001, 10, 6, 21, 2, 344, 5, 50—2, 69, 77, 8, 107). *L.3* cl. X. Climescu Alexandrina (6995, 6, 7002—4, 60, 1, 6, 9, 70, 7, 80).

BUCUREȘTI. *S.g.3* cl. VIII. Stoicu Gh. (E: 2339, 42, 5, 58, 66—8, 76). *S.g.21* cl. VI. Dumitriu Liana (E: 2336, 54, 6, 9, 67, 70, 3, 6). Cl. VIII. Dumitru Adrian (E: 2337, 8, 54, 6, 9, 66, 8, 71, 6, 9). *S.g.121* cl. VII. Donescu Florin (E: 2336—40, 2—6, 50). *S.g.122* cl VII. Brătescu Șt. Anea (E: 2359, 63, 5, 7—72), Rotchild Mihai (E: 2362—4, 6—70, 2). Cl. VIII. Drăgușin Adrian (E: 2336—41, 6, 50, 3, 4, 6, 9), Nistor Irina (E: 2337—40, 54, 6, 7, 9, 62). *S.g.146* cl. VIII. BădescuSmaranda (E: 2336—44, 6, 8, 50—2, 4, 6, 8—60,5, 6).

S.g. 156 cl. VIII. Ştefănescu D. Cătălin (E : 2336—9, 45, 50, 7—9). *L.1* cl. X. Adrian Sorin (7004), 22, 4, 69, 70, 3, 7, 80, 119, 29—32, 6), Andrei Aurel (7050, 2, 9, 60, 4, 6, 9, 73, 80, 1, 91, 131), Udrea Mircea (6998, 9, 7022, 4, 59, 61, 4, 6, 9, 77, 80, 119, 30, 1, 4,5). *L.2* cl. XI. Nicolae Dan (6995, 7002, 3, 5, 14, 45, 51, 63, 4, 6, 9, 80). *L.4* cl. X. Pandu Teodor (6987—9, 7050, 1, 119, 22, 3, 30—3, 5). Cl. XI. Marin Corneliu (7022, 8, 77, 80, 1, 4, 119, 20, 3, 4, 30, 6), Nedelcu Ilie (6990, 7022, 8, 77, 8, 80, 1, 4, 9, 119, 20, 1, 36, 44), Soare Elena (6990, 7022, 8, 77, 8, 80, 1, 4, 9, 119—22). *L.10* cl. 7 B. Corici Cezar (E : 2336—41, 4, 5, 52) cl. VIII. I Sanda (E : 2336—9, 41, 53, 6, 9). Cl. X. Cleja Sanda (6949, 50, 2, 6—8, 98, 7000—3, 14), cl. IX. Mihăileanu Nicoleta (6927, 34, 7076, E : 2333, 50, 63, 64, 65, 66, 76, 79, 83). *L.11* Cl XI Lutaşu Marius (6987, 90, 6, 5, 7001—3, 21, 2, 4, 28, 45, 59, 63, 4, 6, 9, 73, 6, 7, 81). *L. 12* cl. X. *Bărcănescu Şerban* (6987—9, 95, 6, 8—7004, 9, 10, 9, 21, 4, 35, 9, 45, 8—52, 9, 64, 6, 8—70, 3, 7, 80, 91, 107, 11, 7). *Cartianu Dan* (6842, 56, 73, 95, 6, 8, 918, 22, 4, 56, 61—3, 9—71, 83, 7002, 4, 10, 45, 6—50, 2, 66, 8—70, 6—8, 80, 3, 8, 9, 91, 105, 11, 9—25, 9—36, 8, 45, 59, 63). *L.13* cl. IX. *Lăzărescu Răducu* (E : 2363—6, 78—80; 7048—50, 62, 4, 6, 7, 70, 3, 7, 91, 6, 110, 1, 9, 22—4, 30—2, 4—6, 51, 9, 63). Cl. X. *Petrescu Andrei* (6840, 1, 7—52, 5, 6, 62—70, 2, 8—81, 3—5, 8—90, 921, 7—9, 31—8, 41, 2, 5, 6, 50, 2, 5, 7, 63, 4, 86). Cl. XI. Căpraru Valentin (6959, 7000—4, 75—7, 80, 1, 9, 91), Mioc Vasile (6957—61, 7075—7, 80, 1, 9, 91). *L.15* cl. IX. Antonescu Bogdan (E : 2350, 1, 63—6 ; 6995, 6, 7002, 3, 60, 1). *L.16* cl. X. Mendelsohn Nadia (6989, 95, 7002, 3, 21, 3, 4, 51, 2, 66, 73, 7). *L.17* cl. X. *Suciu Paul* (6987—92, 5—7006, 10, 6, 7, 9, 21, 2, 4, 7, 37, 9, 44, 5, 7, 50, 1, 60, 1, 3, 6, 9, 70, 3, 7, 80). *L.18* cl. X. Musceleanu Ion (6988, 95, 6, 7002—4, 59, 61, 4, 6, 70, 3, 7, 9—81, 8, 131). *L.23* cl. X. Hulţescu Marin (6927, 8, 30—5, 43, 5, 6, 9, 50, 2). Cl. XI. Zaharia Dragoş (7051, 9, 70, 6, 7, 80, 91, 119, 20, 4, 30, 1) *L.25* cl. X. Bote Cătălina (6957, 95, 7002, 50, 70, 3, 8, 80, 91, 110, 7, 9). *L.28* cl. IX. Mureşan Mihaela (6957, 95, 6, 7002, 761 ; E : 2336—41, 4—6, 50, 3, 4, 6, 66). *L.30* cl. IX. Cochela Cristian (E : 2350, 63—6, 78—80 ; 7059, 60, 76, 7, 131). *L.32* cl. VII. Celenti Dan (E : 2300, 2, 56, 8, 9, 63—5). *L.37* cl. X. Kalisz Eugenia (6989, 96, 9, 7000—2, 4, 10, 4, 24, 66). *L.39* cl. VIII. Pantelimon Florinela (E : 2336, 8, 9, 67, 9—72, 4, 5, 7). Soldat David Gh. Ioan (6954, 5, 7, 9, 69, 7024, 39, 44, 5, 7).

BUZĂU. *L.1* cl. VIII. Croitoru Viorica (E : 2336—9, 56, 9, 61, 2, 6), Grigorescu Adriana (E : 2336, 8, 9, 56, 7, 9, 61, 2, 6, 77, 9). Cl. XI. *Filipoiu Alexandru* (6723, 7, 9, 50, 2—66, 74, 8, 80, 2—6, 8—91, 3, 5—809, 11—9, 21 , 3, 4, 6, 7, 9, 31, 5, 6, 8, 9), Gheorghe Petre (6995—7000), 2, 4, 5, 24, 45, 50, 60—4, 9, 70, 1, 3, 6, 7, 80, 1), Manea Nicolae (6988, 95—8, 7000, 2—5, 45, 60, 70, 3, 8, 117).

CARACAL. *L.1* cl. IX. Alexandru I. Alexandru (E : 2350, 2, 64—6, 78, 9, 80 ; 6898, 95, 6, 7002, 4, 5, 59).

CARANSEBEŞ. *L.1* cl. VI. Vonica Alexandru (E : 2336, 7, 9, 55—9, 63—6). *L.2* cl. IX. Bartolf Fred (6989, 95—7, 9, 7001—3, 48, 59—61, 3, 6, 7, 9, 77, 8, 80, 119, 25, 30, 1 ; 2348, 50, 1, 3, 63—6, 78—80).

CALAN (Hunedoara). *L.1* cl. XI. Marincaş Mircea (6995—7005, 14, 30, 46).

CĂLĂRAŞI (Bucureşti). *L.1* cl. IX. Harth Viorel (6840, 1, 7—50, 5, 52, 4—9, 79, 81).

CÎMPINA (Ploieşti). *L.1* Salcu Simona (E : 2367—76, 8, 80). Cl. X. Popa Gabriel (6995, 7, 7004, 5, 24, 60, 1, 6, 77, 119, 30, 1, 5), Văcăroiu Ioana (6989, 99, 7048, 51, 60, 1,6, 76—8, 119, 30, 1, 5). C.l XI. *Popescu Florin* (6987—92, 5—7005, 8, 10, 3, 21, 5, 8, 30,45, 59, 64, 6, 70, 3, 8, 80, 1, 8, 91).

CÎMPULUNG MOLDOVENESC. *L.1* cl. X. Popescu Ovidiu (6987—9, 91, 2, 5—7004). *Liceul militar* cl. X. Georgescu Şt. Ioan (6847—9, 51, 3, 62—5, 8—70, 2), Sabou Ioan (6957, 8, 61, 3, 71, 5, 87—95, 6, 8, 7002—4, 7, 30, 50, 1, 66, 9, 73, 6, 7, 81, 4). Cl. XI.Ciofoaia Vasile (6995, 6, 9, 7000, 2—4, 22, 4, 51, 2, 60, 3, 7, 9, 70, 3, 7. 80, 1, 4, 110).

CLUJ. *S.g.2* cl. VII. Coţiu Neguţa-Lia (E : 2336—8, 50, 8, 64—6, 76). *S.g.7* cl. VII. Zglobiu Nicolae (E : 2340, 2, 4, 5, 50, 3—8). *L. G. Coşbuc* cl. VIII. Grecu Daniela (E : 2338, 56, 7, 9, 65, 6, 76, 7). *L.7* cl. VIII. Geltch Elisabeta (E : 2336, 7, 9, 54, 6, 9, 65, 6). *L.8* cl. IX. Şeimeanu Rodica (E : 2337, 8, 52, 5, 6, 8, 9, 66). Cl. X. Lazăr Aurel (6987, 8, 98, 6, 8—7000, 2, 3, 5, 14, 19, 22, 4, 8). Cl. XI. Trif Damian (6987, 8, 90—2, 7014, 24, 50—2, 70, 117). *Inginer* Şeimeanu Tudor (6936—47, 9—52, 4, 6).

CONSTANŢA. *L.1.* Ficu Elisabeta (E : 2337, 40, 2, 6, 54, 6, 8, 9, 65, 6 ; 6927, 95, 7072). *L.3* cl. VIII. Iruc Tita (E : 2357—60, 3—6).

CRAIOVA. *L.1* cl. IX. Boanţă Valeriu (E : 2319—22 ; 6855, 63, 6, 8—70, 2, 8, 9, 83, *A*, 7—90, 915, 6). Cl. XI. Pascu Doina (6936, 63, 75, 80, 95—7, 9, 7002—4, 7). *L.2* cl. X. Buşe Gabriela (6988, 95, 6, 8, 9, 7002, 3, 5, 63, 9, 91, 110, 7). Cl. XI. Albu Teodor (6991,

5, 6, 8, 9, 7001—3, 5, 7, 14, 21, 2, 4, 8). Georgescu Dan (6858, 9, 62—70, 2—4, 9—81, 3—5, 8, 95, 6, 927, 31, 46, 9, 50, 2, 4). *L.3* cl. X. *Gheorghe Cicel* (6841, 3, 7—50, 2, 9, 62—70, 9—81, 3—5, 8, 916, 20, 1, 7—33, 46, 9, 50). Cl XI. Paveliu Florica (6945, 6, 50, 2—4, 7, 9, 62, 87, 8, 91). *L.5* cl. XI. Moraru Dorin (6847, 9, 59, 62, 4, 81, 931, 46, 50, 4, 80, 7002, 3).

DETA (Banat). *L.1* cl. VI. Ciurea Mioara (E : 2327, 36—9, 54, 6, 7).

DUMBRĂVENI. *L.1* cl. X. Widman Wilhelm (7049, 50, 9—61, 6, 9, 70, 3, 6, 7, 80, 91, 107).

FĂGĂRAȘ. *L.1* cl. VIII. Laschescu Dorin (E : 2336—9, 50, 4, 6, 9, 66).

FĂLTICENI. Absolvent Zoița Vasile (6958, 63, 80, 7, 90, 1, 7000, 3, 14, 44, 5, 7).

FÎNTÎNELE (Ploiești). *S.g.*cl. VIII. Avram Alexandru (E : 2354—60, 2), Costache Lucia (E : 2354—60, 2), Davîncescu Violeta (E : 2354—60, 2), Minculescu Alexandru (E : 2354—60, 2).

FIENI (Ploiești). *L.1* cl. IX. Popescu Florin (E : 2311—9, 22, 37—9, 42, 50; 6927, 8, 30—4, 45, 96, 7002, 4, 8).

FOCȘANI. *L.1* cl. XIII. Baner Alexandru (E : 2336—8, 45, 54, 69, 70, 4, 6, 80). Cl. X. Tănăsescu Constantin (6990, 7007—10, 3, 27, 45, 81, 3, 4, 94, 5, 107).

GALAȚI. *S.g.24* cl.VII. Costiniuc Florin (E : 2340, 54, 8, 9, 64, 5, 9, 70). *S.g.28* cl. VIII. Budu Nicolae (E : 2356—8, 61, 2, 7—71, 6, 7), Hogaș Ionel (E : 2367, 9, 70, 1, 6, 7, 56, 7, 56, 7, 9, 62), Voinescu Ionel (E : 2336, 7, 56, 9, 61, 9—71, 6, 7). *L.1* cl. X. Rosenzweig Niky, (7050, 1, 60, 9, 73, 6, 7, 80, 110, 7, 30, 1, 5, 6, 63). *L.2* cl. IX. Burlacu George E : 2350, 1, 3, 63—6; 7002, 61, 6, 9, 73, 6, 7, 91), Neicu V. Claudiu (E : 2350, 1, 3, 63—6; 7002, 61, 6, 9, 73, 7, 9), Cl. XI. Pascu Constantin (6990, 5, 9, 7003, 45, 50—2, 63, 9, 70, 7, 80, 1), Postelnicu Iuliana (6988, 7002—5, 50, 66, 8, 73, 105, 31, 5). *L.4* cl. IX. Georgescu Horia (E : 2363—6, 76, 9, 80; 6995, 7002, 63, 9, 73). Cl. X. Tiribegea Maricel (6987, 9, 95, 6, 8—7003, 10, 20, 1, 4).

GIURGIU. S. g. 3 cl. VIII. Isar Aurelian (E : 2336—9, 50, 5, 7—9, 65—7, 9, 71—3, 6, 9, 80), Măceșanu Mugur (E : 2356—9, 63—6). *L.1* cl. IX. Marinescu Stelian (6990, 5, 8, 7002, 3, 5, 45, 8, 66, 9, 73, 7).

HALEȘ. Cl. VII. Marinescu Elena (E : 2354, 6, 7, 9, 65, 6, 9, 74, 6). Cl. XIII. Dogaru Vasilica (E : 2354, 6, 7, 9, 65, 6, 9, 73, 6, 7, 9).

HOREZU (Argeș). *L.1* cl. X. Costescu Ștefan (6989, 97, 7001, 2, 10, 51, 63—6, 8—70, 3, 6, 7, 80, 1, 91).

HUNEDOARA. *Absolvent* Schrammer Carol (7050, 1, 68, 9, 73, 7, 8, 80, 91, 119, 21, 31). *L.1* cl. X. Pop Radu (6995, 6, 7002—4, 61, 6, 8, 9, 70, 3, 7, 8, 80). Cl. XI. Păduran Tiberiu (6995—9, 7001—5, 14, 45).

HUȘI. L.1. cl. X. Bursuc Gheorghe (6847—51, 5, 6, 63, 5, 8, 72, 8—81, 4, 8, 9).

IANCA (Galați). Cl. X. Pătrinoiu Vasile (6847—52, 4, 9, 6a—70, 81, 3).

IAȘI. *S.g.7* cl. VI. Bălan Carmen (E : 2336—9, 54, 6—9, 63, 5), Bobînc Georgeta (E : 2324—6, 36—8, 54, 6, 7, 9, 65), Bercovici Zelda (E : 2323, 36—9, 54, 6, 7, 9, 65, 6), Horoviț Sergiu (E : 2325, 6, 36—9, 54, 6, 7, 9, 65, 6), Leizer Lili (E : 2323, 4, 36—9, 54, 6, 7, 9), Roibu Ion (E : 2324, 6, 36, 8, 9, 56, 7, 9, 65, 6), Zarif Iulia (E : 2336—9, 53, 4, 6, 9, 65—7). Cl. VII. Alexa Tonia (E : 2336—40, 54, 6, 7, 9, 61, 5), Barbu Gelu (E : 2323, 5, 7, 33, 7—9, 54, 6—9, 63—6), Bercu Constantin (E : 2336—9, 54, 6, 7, 9, 60, 4—6), Cerlinco Doina (E : 2336—9, 54, 6, 7, 9, 60, 5, 6), Constantin Costache (E : 2336—9, 54, 6, 7, 9, 60, 3, 4, 6), Fotea Paul (E : 2336—9, 54, 6, 7, 9, 63, 5, 6), Chiriac Liviu (E : 2336—40, 2, 54, 6, 9), Ghirguț Angela (E : 2325, 6, 37, 8, 54, 6, 7, 9, 60, 5, 6), Hagianu Doru (E : 2336—9, 54, 6—9, 63, 5), Malcoci Eugenia (E : 2336—9, 54, 6, 9, 65), Rusu Elena (E : 2336, 8, 40, 6, 54, 6, 8, 9, 65, 6), Smochină Mihai (E : 2327, 36—8, 50, 6, 9, 60, 5, 6), Tănăsachi Dragoș (E : 2336—9, 50, 4, 6—60, 4). Cl. VIII. Acatrinei Ion (E : 2339, 50, 4, 6, 60, 4, 6, 9, 70, 4, 6, 7), Agavriloaie Leon (E : 2339, 45, 50, 4, 6, 61, 3, 9, 74, 5, 7, 9), Comăniță Constantin (E : 2354, 7, 9, 60, 1 5, 6, 9, 70, 4, 6), Drochină Elena (E : 2325, 36, 7—9, 44, 57, 9, 60, 1, 5, 6), Drăgan Gh. (E : 2337—9, 54, 6, 9, 64, 5, 9, 70, 4, 6), Hörer Silvia (E : 2340, 50, 7, 9, 60, 1, 4, 9, 76), Pătrăchioiu Doina (E : 2340, 5, 50, 8, 9, 60, 1, 3, 5, 6, 77), Pătrăchioiu Dorin (E : 6340, 5, 50, 7—61, 4—6, 76, 7), Radu Bianca (E : 2345, 50, 4, 6, 8, 61, 3, 4, 6). *S.g.12* cl. VII.... (E : 2337—9, 56, 7, 9, 65, 6). *L.1* cl. VIII. Mîrzanca Magda (E : 2336—50, 6, 7, 89). *L.3* cl. XI. Alupului Neculai (6840—2, 51, 3, 4, 7, 9, 62, 3, 5—70, 3, 4, 8, 9, 80, 1, 3, 8, 95—7, 920—2, 7—36, 54). *L.4* cl. VII. Condurovici Rodica (E : 2337, 40, 6, 57, 9, 60, 2), Husan Eugen (E : 2337, 8, 40, 6, 54, 7, 9, 60), Roșu Emilia (E : 2336—40, 2, 54, 79). Cl. VIII. Rusu Dorina (E : 2354, 6, 7, 9, 60, 3, 5, 7—71, 4—6, 8—80). *L.6* cl. XI. Barbu Petrică C. (6936, 8, 41, 6, 9, 50, 2, 4, 6, 70, 7002, 3, 51, 69, 73, 88, 91, 110)

FOCŞANI. *Cl. VI.* Iacob Dan (E : 2372—4, 6, 7, 9, 85, 7). *L. 1 cl. X.* Tănănescu Constantin (7097, 100, 14, 33—6, 8, 45, 6, 8, 53, 5, 9, 63).

GALAŢI. *Student Andrei Viorel* (7048—52, 5, 6, 9—64, 6, 7, 9, 70, 3, 6—8, 80, 1, 4, 6—9, 91, 8, 102, 4, 5, 10, 5, 7, 9—25, 7, 9—31, 6, 8, 40, 2—6, 8, 50, 63, 4). *S. g. 14 cl. VII.* Ciupercă Pompiliu (E : 2354, 6, 7, 9, 64, 6, 9, 70), Dumitrescu Ştefan (E : 2354, 6, 7, 9, 63—6, 9, 70), Enache Viorica (E : 2354, 6, 7, 9, 63—6, 9, 70), Filiuţa Constanţa (E : 2354, 6, 7, 9, 65, 6, 9, 70), Savin Anca (E : 2354, 6, 7, 9, 66, 8—70). *Cl. VIII.* Bucur Marcelyna (E : 2354, 6, 7, 9, 63, 6), Iacobsohn Ana (E : 2356, 7, 9, 63—5, 9, 70), Dănăilă Mariana (E : 2354, 6, 7, 9, 63, 5, 9, 70). *S. g. 21 cl. VIII.* Costin Elena (E : 2356, 7, 9, 60, 2, 6, 9, 74, 6, 7, 80), Mocanu Florică (E : 2356—9, 65, 6, 70, 7, 80), Neagu Dana (E : 2356, 9, 60, 5, 6, 9, 70, 6, 7, 80), Roşca Daniela (E : 2356, 7, 9, 60, 4—6, 9, 70, 6). *S. g. 23 cl. VIII.* Baicu Ioan (E : 2356, 7, 9, 65, 9, 73, 4, 80). *S. g. 24 cl. VIII.* Costiniuc Florin (E : 2363, 7, 8, 71, 3—5, 7). *S. g. 26 cl. VIII.* Buiucaş Monica (E : 2354—62). *L. 1 cl. IX,* Katz Marian (E : 2365, 6, 78, 9, 80, 92; 7131, 88), Weschsler Adrian (E : 2363—6, 76—80. 91, 130, 1). *Cl. X.* Herşcovici Isaia (7066, 73, 6, 80, 1, 122, 4, 7, 30—2, 6, 85, 8). *Cl. XI.* Scurtu Nicolae (7054, 6, 61, 3, 4, 7, 8, 80, 91, 105, 20, 2, 36, 43, 5). *L. 4 cl. VII.* Anton Petrică (E : 2357, 62, 5, 9, 74, 6, 81, 2). Cl. X. Tiribegea Maricel (7049—52, 66, 9, 73, 5—8, 80, 1, 91, 110, 7).

GIURGIU. *L. 1 cl. X.* Mărăcineanu Eugen (7048, 9, 59, 66—9, 73, 6, 80, 1, 91). *Cl. XI.* Coporan Emil (7048, 9, 60—4, 6, 9, 70, 3, 7, 80), Manea Adrian (7065, 6, 8, 73, 7, 8, 80, 1, 91, 105, 15, 9, 21, 36, 43), Marinescu Stelian (7049, 59—61, 3, 70, 6, 80, 1, 91, 6, 110, 20).

GOLFŞTI (Argeş). *Cl. VIII.* Stoican Biorel (E : 2354, 6, 8, 9, 64—74, 6, 7, 9, 80; 7073, 119, 30, 2).

GURA BĂRBULEŢ (Ploieşti). *Cl. VIII.* Drugă Ion (E : 2354, 6, 7, 9, 60, 6, 7, 74), Mateoiu Cornel (E : 2354, 6, 7, 9, 60, 6, 7, 74), Predoiu Vasilica (E : 2354, 6, 7, 9, 60, 6, 7, 74), Voiculescu Zenaida (E : 2354, 6, 7, 9, 60, 6, 7, 74).

HALFŞ. *Cl. VII.* Matara Toma (E : 2354, 6, 9, 66, 9, 70, 6, 7), Pinţoi Dumitru (E : 2354, 6, 9, 66, 9, 70, 6, 7), Vişan Ştefan (E : 2354, 6, 9, 66, 9, 70, 6, 7). Cl. VIII. Jantea Elena (E : 2354, 6, 7, 66, 9, 70, 6, 7, 9), Panait Aurelia (E : 2354, 6, 7, 66, 9, 70, 6, 7, 9), Potcovaru Maria (E : 2354, 6, 7, 66, 9, 70, 6, 7, 9), Voicilă Ioana (E : 2354, 6, 7, 66, 9, 70, 6, 7, 9).

HAŢEG. *L. 1 cl. XI. Marton Virgil* (7048—52, 4, 6, 9—64, 6, 9, 70, 2, 3, 7, 8, 80, 45, 7, 9, 91, 3, 6, 105, 7, 8, 10, 5, 7).

HÎRLĂU (Iaşi). *L. 1 cl. X.* Solomon Ady (7049, 66, 9, 77, 8, 80, 91, 110, 4, 30, 1, 3,).

HOREZU (Argeş). *L. 1 cl. XI.* Buşe Marcu (7084, 119—25, 7, 9—32, 4—8, 43, 5, 8, 51, 5, 7, 9, 63, 5).

HUNEDOARA. *Absolvent* Schrammel Carol (7050, 1, 68, 9, 73, 7, 8, 80, 91, 119, 21, 31). *L. 1 cl. VIII.* Jula Angela (E : 2354, 6, 9, 63, 6, 9, 70, 4, 6, 7, 80). *Cl. X.* Chiuciu Viorel (7051, 66, 8, 9, 77, 8—80, 91, 130, 1, 6), Ciotescu Ion (7051, 9, 61, 6, 8—70, 3, 6, 7, 8, 80, 91, 120, 2, 4, 31, 5, 6, 51), Pop Elena (7051, 61, 6, 8—70, 3, 7, 8, 80, 91, 136), Sînc Elena (7066—70, 3, 80, 91, 119, 30, 1, 6). *Cl. XI. Căpăţînă Octavian* (7048, 51, 9, 60, 2, 3, 6, 8, 9, 72, 3, 6—8, 80, 91, 3, 6, 107—9, 12, 4, 7, 9—22, 4, 5, 9, 31, 5, 6, 42, 3, 5).

IANCA (Oltenia). *Cl. VIII,* Medianu Janeta (E : 2354, 6, 9, 60, 3—7).

IANCA (Galaţi). *Cl. XI.* Manta Ionel (7048—52, 9—64, 6, 7, 9, 70, 3, 6, 7, 8, 80, 1, 3, 91).

IAŞI. *S. g. 7. cl. VI.* Davideanu Ion (E : 2323—6, 38, 54, 6, 7, 65, 6). *Cl. VIII.* Groapă Ioana (E : 2336—40, 5, 54, 6, 9, 62, 6), Obreja Dorel (F : 2354, 6, 7, 9, 61, 5, 9, 70, 85, 9), Schvram Hermina (E : 2356, 9, 60, 1, 5, 6, 9, 76), Soroceanu Lilica (E : 2337, 8, 54, 6—9, 62, 5, 6, 9, 70, 4, 6, 9), Stavarache Mioara (E : 2336—9, 54, 6, 7, 9, 61, 5, 6, 72). *S. g. 12 cl. VIII.* Leonte Alina (E : 2356, 7, 9, 64—6, 9, 72, 4, 6). *S. g. 14 cl. VII.* Poroşnicu Gabriela (E : 2354, 6, 8—60, 3—70, 2, 4, 6, 9, 80). *Cl. VIII.* Stanciu Viorel (E : 2354—6, 9, 64—7, 9—71, 4, 5). *G. g. 15 cl. VI.* Surpăceanu Marian (E : 2367, 9, 70, 3, 6, 7, 80). *L. 1 cl. V.* Deleanu Dan (E : 2354, 6, 9, 65, 8—70, 7). *Cl. VIII.* Mirzanca Magda (E : 2358, 63, 5, 6, 9, 70, 8, 9, 80). *Cl. X.* Cărare Victor (7075—84, 8, 95, 6, 710, 9, 10), *L. 2 cl. VII.* Iftimescu Radu (E : 2354, 6—60, 3—6), Pandefunda Liviu (E : 2356, 7, 9 66, 9, 73, 4, 6, 9). *L. 4 cl. VII.* Mironescu Carmen (E : 2354, 6, 7, 9, 68—71, 4, 6). *Cl. VIII.* Daneliuc Cristina (E : 2356, 9, 62, 5—7, 9, 70, 9, 80), Pavelescu Angela (E : 2356, 7, 9, 66, 8, 70, 1, 4, 6), Pavelescu Iolanda (E : 2368—74, 8—80), Wechsler Paula (E : 2356, 67—72, 8—80). *L. 6 cl. X.* Apfelbaum Emil (7076, 7, 9, 80, 127, 30, 1, 5, 86, 8, 94, 215), Aronovici Paula (7076—80, 122, 7, 31, 5, 85, 8, 94), Fetescu Emil (7076, 7, 9, 80, 119, 27, 30, 1, 4, 5, 85, 8), Gabor Hevita (7076, 7, 80—2, 127, 90, 1, 5, 6, 8, 94). *L. 4 cl. VII.* Ananiescu Carmen (E : 2354, 6, 9, 62, 5, 6, 70—2, 7), Cehan Mihaela (E : 2354, 6, 9,

65—7, 9, 70, 3), Crulikovscki Ariadna (E: 2337—9, 54, 6, 7, 9, 65, 6), Tună Cristian (E: 2356, 7, 9, 61, 3, 7, 7, 70, 1, 4), Vulpoiu Grigore (E: 2354, 6—9, 61—3, 5, 6). *Cl. VIII.* Bîrleanu Dorel (E: 2357, 62, 4, 9, 71, 3, 4, 7, 8—80), Popa I. Ioan (E: 2357, 9, 69, 71, 3—7). *L. 8 cl. XI.* Amariței Gheorghiță (7048, 9, 51, 2, 5, 61—4, 6, 9, 70, 2—4, 5, 7, 9, 80, 4, 91, 119, 30), Baraboi Adrian (7048, 9, 51, 2, 5, 6, 9, 70, 2—4, 7, 9, 84, 91, 3), Lotzur Alexandrina (7059, 61—4, 6, 9, 70, 3, 8, 80, 91, 115, 9, 20, 1, 2, 4), Iacob Dumitru (7060, 6, 9, 70, 3, 6—8, 91; 7110, 5, 9, 21, 2). *L. 9 cl. X.* Leoncu Georgică (6995—7, 2—5, 14, 31, 5, 6, 61, 70, 5). *Liceul Costache Negruzzi cl. VII.* Mirțu Mihai (E: 2369—80). *L. Mihail Eminescu cl. VI.* Davideanu Cătălina (E: 2356—9, 61, 3, 71—4, 6, 9).

LUGOJ. *L. 1 cl. X.* Duncescu Virginica (7050, 1, 60, 1, 6, 7, 9, 73, 7, 80, 119, 31, 4), Lovănescu Ioan (6927, 8, 30—3, 7, 41, 3, 4, 9, 50, 1, 4, 8, 7005, 7, 17, 44, 5).

MĂCIN (Dobrogea). *Cl. XI.* Simion Andrei (7048—52, 4—6, 9—64, 6—70, 2—4, 6—8, 80, 1, 6, 8, 91, 3, 106, 7, 12, 7).

MEDIAȘ. *L. 2 cl. X.* Brădișteanu Smaranda (7048, 60, 1, 4, 8, 80, 6—8, 80, 119, 22, 4, 30, 1, 3—6). *Cl. XI.* Georgescu Cle ment (6987, 9—91, 7, 7000—5, 45, 8, 50—2, 60—4, 6, 70, 5, 7, 80, 7).

MEHADIA. *Cl. XI.* Vrăjitoru Isac (7059—64, 6, 70, 5, 7, 8, 80, 1, 120, 1, 4, 30, 1, 6).

MOGOȘANI. *Cl. VII.* Badea Gheorghe (E: 2367—80).

NĂSĂUD. *Cl. X.* Scurtu Vasile (7060, 6, 9, 77, 80, 1, 119, 20, 2, 7, 31, 3, 6, 63, 85, 8).

NEGRU VODĂ (Dobrogea). *Cl. X.* Vlădulescu Petre (7048, 9, 51, 2, 6—9, 76, 7, 80, 91, 119, 30—2, 85, 8).

NOVACI (Oltenia). *Cl. VII.* Cosor Ofelia (E: 2354, 6—9, 61, 4—6). Cl. VIII. Toader Ionel (E: 2354, 6—60, 3—6). *Cl. IX.* Popa Emilia (E: 2357—80; 7077, 130).

OLTENIȚA. *L. 1 cl. X.* Crișan Liviu (6710—2, 4—6, 20—4, 31, 5, 6, 8, 51, 3, 5—7, 61, 3, 4, 88, 92), Ulmeanu Vasile (7051, 66, 8, 70, 6, 7, 9, 80—3, 108, 17, 20, 4, 30, 1). *L. 2 cl. X.* Vasilian Mihai (7049, 52, 9, 61, 2, 4, 6, 70, 6—8, 80, 91, 110). *Cl. XI. Vlăsceanu Stan* (7050—2, 4, 60—4, 6, 8—70, 2, 3, 6—84, 91, 105, 8, 10, 5, 7, 120, 2, 30, 1, 43).

ORADEA. *L. 1 cl. X.* Sălăjan Gheorghe (7049, 51, 66—9, 81, 93, 118, 30—2, 4, 6, 46, 63). *L. 2 cl. X.* Maghiar Ion (6988, 99, 7051, 66, 9, 70, 7, 80, 119, 22, 30, 1, 4), Pop Gavril (7049, 51, 66, 8, 77, 81, 93, 111, 9, 30—2, 4, 6), Urdă Ioan (7049, 66—9, 81, 93, 111, 9, 39—2, 4, 6, 46, 63). Cl. XI. Lucuș Teodor (7063, 4, 6, 8—70, 3, 8, 91, 117, 31), Mănucu Dumitru (7066, 70, 80, 117, 20—2, 4, 31, 4, 6, 44). *L. 4 cl. X.* Brădău Florian (7060, 1, 3, 66, 8, 9, 73, 6, 7, 80, 1, 91, 111, 14, 9, 30, 1, 5).

ORĂȘTIE. Cl. VII. Deteșan Suzana (E: 2354, 6, 7, 9, 60, 70, 4—7), Istrate Luminița (E: 2356, 7, 9, 60, 9, 70, 4—7), Păcuraru Ileana (E: 2354, 6, 7, 9, 60, 70, 4—7), Pîrvu Alina (E: 2346, 54, 6, 7, 59—61, 77), Florescu Constantin (E: 2356, 9, 65, 6, 60, 70—2, 4).

ORȘOVA. *L. Ștefan Plavăț cl. VI.* Bildea Tatiana (E: 2354, 6, 7, 9, 67—71, 6), Krutsch Günther (E: 2354, 6, 7, 67, 8, 9, 76), Sperdea Mircea (E: 2354, 6—9, 68, 9, 76). *Cl. VII.* Moruzi Nicolae (E: 2338, 54, 6, 7, 9, 69, 70, 6). *Cl. VIII.* Albu Mircea (E: 2354, 6—9, 69, 81—3), Ivanovici Dragotin (E: 2331, 54, 6—9, 66, 70, 6), Sperdea Rodica (E: 2354, 9, 68, 70, 81—3, 5), Vasilescu Mariana (E: 2354, 6, 7, 66, 76, 7, 81, 5). Cl. IX. Stoișici Miodrag (7059—61, 6, 9, 75, 7, 9, 80, 1, 130, 1, 88). Cl. X. Croici Tiberiu (6095—7, 7059, 60, 1, 7002—5, 66, 9, 70), Erimescu Ion (7069, 77—81, 119, 22, 30—2, 4, 5).

OȚELUL ROȘU. Cl. IX. Anghelescu Ana (6847—50, 63, 5, 7—70, 9, 81, 4, 927—36, 8, 41, 6, 96, 7, 7002, 3).

PANCIU. *L. Ion Slavici cl. VI.* Seciu Romeo (E: 2336—9, 56, 7, 9, 69, 71). Cl. VII. Iordaniu Rodica (E: 2338, 54, 6, 7, 9, 60, 71, 3, 6), Soroiu Doina (E: 2337, 8, 54, 6, 9, 60, 73, 5, 6).

PĂTIRLAGELE. Cl. XI. Bîrjoveanu Constantin (7048, 51, 2, 4, 5, 60—4, 6, 9, 70, 3, 5—8, 80).

PĂUNEȘTI (Bacău). *Cl. VI.* Anghel Zarafina (E: 2339, 40, 50, 2, 8, 9, 65, 79, 81), Roșu Elena (E: 2336—8, 49, 53, 4, 6, 9, 69). *Cl. VII.* Dumitru Vasile (E: 2324, 5, 37, 9, 53, 6, 9, 65, 6, 9, 70, 5, 6), Neagu Viorica (E: 2337, 8, 64, 6, 7, 9, 70, 3, 81), Sandu Mariana (E: 2340, 52, 3, 7, 65, 9, 70, 5—7, 9). *Cl. VIII.* Anghel Florica (E: 2336, 8, 9, 52—4, 6, 9, 66), Stroescu Neculai (E: 2535, 9, 52 4, 6, 9, 70, 4, 6, 7, 9). PETROȘANI. Cl. VI. Butulescu Valeriu (E: 2356, 65, 6, 9, 70, 6, 7, 9, 80). Cl. VIII. Sternberg Margit (E: 2356, 7, 9, 60, 2—6), Thiszkes Ladislau (E: 2356, 9, 65, 7, 71, 4—7, 8, 80). *cl. VI.* Gociu Șerban (E: 2354, 6, 7, 9, 65, 6, 8—70). *Cl. X.* Paicu Nicolae (7048, 51, 2, 9—64, 6, 9, 70, 3, 6—9, 80, 3).

PIATRA NEAMȚ. *S. g. 3 cl. VI.* Coricovac Virginia (E: 2354, 6, 9, 62, 7, 10, 1, 4), Florescu Otilia (E: 2354, 6, 9, 67, 70, 1, 4, 5), Krumholtz Sorin (E: 2354, 6, 9, 66, 9, 70, 1, 6),

Lăzărescu Dan (E : 2356, 7, 9, 66, 9—71, 6). *L. Petru Rareş cl. XI.* Lazarovici Antonie (7051, 61, 8, 70, 3, 6, 8, 80, 121, 2, 4, 31).

PITEŞTI. *S. g. 3 cl. VIII.* Antrassian Olis (E : 2356, 7, 65, 9, 74—6, 80), Haret Viorel (E : 2354, 6, 7, 64, 9, 70, 9, 80). *L. 1 cl. X.* Dumitrache Ion (6988, 95—7, 9, 7001—5, 8, 9), Iordache Romana (7052, 3, 61, 7, 9, 77, 8, 80, 91, 3, 130, 2), Marin Speranţa (7750—2, 66, 8, 9, 70, 3, 6—8, 80, 1), Stoica Vasile (7049—52, 73, 6—8, 80, 1, 91, 3, 112, 4, 7, 9, 22, 4, 5, 135, 6). *Cl. XI. Lunguleecu Bogdan Eugen* (6840—3, 6—53, 5, 6, 9, 60—74, 7—81, 3, 4, 7—90, 3, 5—8, 902, 9, 16, 20, 1, 4, 5, 7—34, 6—55, 7, 61—4, 71—3, 5, 80, 7—90, 25, 5, 8, 7000—7, 18, 21, 2, 4, 6, 38, 44, 5, 8,—53, 5, 60, 1, 3, 4, 6, 8, 9, 73, 6—81, 3, 4, 9, 101, 14, 5, 7, 9—24, 6, 7, 9—31, 3—8, 43, 5, 51, P), Somîndroiu Elena (7048—52, 66, 8—70, 3, 6, 7, 8, 80). *Cl. XI.* Pietreanu Cristian (7060, 70, 3, 7, 80, 91, 110, 7, 21—3, 31, 43). *L. 2 cl. XI.* Achim Virgil (7076, 7, 81, 4, 91, 105, 131, 2, 5, 6, 45, 6, 63), Preda Vasile (7048, 50, 1, 3, 4, 9, 60, 2, 72, 6, 9, 89, 96, 107, 8, 12).

PÎNCOTA. *L. 1 cl. X.* Chebelea Petru (7052, 66, 70, 3, 7, 80, 8, 114, 9, 22, 4, 31, 5). Cl. XI. Dăncăescu Lucian (7050—2, 66, 70, 3, 6, 7, 80, 1, 119, 30, 1).

PLOIEŞTI. *S. g. 9 cl. VIII.* Ailenii Luminiţa (E : 2354, 6, 9, 66, 7, 9, 70, 5, 7), Bucur Daniel (E : 2356, 7, 9, 63, 9, 70, 4, 5, 7), Chiru Dan (E : 2354, 6, 7, 9, 64, 6, 9, 75,.7), Cîlnic Atena (E : 2354, 6, 7, 9, 65, 6, 9, 70, 6, 7), Marinescu Monica (E : 2354, 6, 7, 9, 65, 9, 70, 6, 7), Vasilescu Ileana (E : 2354, 6, 9, 63, 6, 9). *S. g. 10 cl. VII.* Minduţeanu Dan (E : 2367—71, 3, 5, 6, 9, 80). *S. g. 12 cl. VII.* Dinu Ileana (E : 2356, 9, 65, 6, 9, 70, 4, 6), Dumitrescu Dumitru (E : 2357, 9, 65, 6, 9, 74, 6). *S. g. cl. VI.* Calufo Denisa (E : 2355, 6, 8, 68—71 3). Cl. VII. Moisescu Dorina (E : 2354, 6, 65, 9—71, 6, 7), Zelinski Roxana (E : 2360, 3, 4, 6, 71—4, 78, 80). Cl. VIII. Popa Norica (E : 2367, 9, 70, 4, 6, 9, 81, 3), Stoicescu Marian (E : 2354, 67—70, 4—6), Turţudău Florian (E : 2366, 7, 9, 71, 4, 6, 7, 9). *S. g. cl. VIII.* Avramescu Mircea (E : 2354, 6, 9, 61, 4—7, 9, 70, 1, 4, 6), Nicolae Daniela (E : 2354, 6, 7, 9, 70, 6, 7, 81, 5), Răduţă Viorel (E : 2365, 9, 73, 4, 6, 7, 9, 81, 3, 4). *L. I. L. Caragiale cl. VI.* Breazu Valeriu (E : 2354, 5—60, 4—6), Bucheru Raluca (E : 2336—9, 53, 4, 6, 7, 9), Dragomir Sabina (E : 2336—9, 53, 4, 6, 7, 9), Ionescu Mihail (E : 2336, 7—9, 53, 4, 6, 9), Mitroi Carmen (E : 2336—9, 53, 4, 6, 7, 9), Munteanu Suzana (E : 2336—9, 53, 4, 6, 7, 9), Olteanu Horia (E : 2336—9, 53, 4, 6, 7), Popescu Marta (E : 2336—9, 53, 4, 6, 7, 9), Schuller Elisabeta (E : 2336—9, 53, 4, 6, 7, 9), Topoleanu Lucia (E : 2337—9, 53, 4, 6, 7, 9). *Cl. VIII.* Enescu Daniela (E : 2354, 6, 7, 9, 64—6, 9, 76), Mărgăritescu Rodica (E : 2356, 7, 9, 65, 9, 71, 6, 9), Mihalache Cristina (E : 2354, 6, 9, 60, 9, 74, 6—8, 9), Necula Luiza (E : 2354, 6—60, 2—6), Olteanu Gh. (E : 2358—60, 4—6, 71—5, 7), Rotaru Mihaela (E : 2354, 6, 7, 9, 60, 3, 6). *Cl. IX.* Boaldă Nicolae (6988, 95, 9, 7003, 59, 63, 6, 9, 73, 6, 7, 81, 107, 14). Cl. X. Călţaru Tiberiu (6095, 7020, 59, 63, 6, 9, 70, 3, 7, 80, 1, 112, 27, 31), Căsăndroiu Dănuţ (6996, 7, 9, 7059, 60, 3, 6, 9, 70, 3, 6—8, 80—2, 91, 126, 7, 9), Dumitru Ion (6988, 95, 8, 7002—4, 20—2, 59, 66, 9, 72, 7, 81), Enne Constantin (7059—61, 3, 9, 70, 3, 5—82, 91, 119, 36, 37), Nicolescu Amelia (7081, 107, 19, 21, 7, 30, 1, 3, 4, 6, 40, 5, 63), Prelipceanu Minodora (6987, 9, 95, 9, 7001, 20—2, 4, 51, 9, 60, 1, 3, 6, 9, 73, 6—8, 107, 10, 1, 30, 1, 4, 5, 6), Roman Dan (7022—4, 52, 9, 60, 76, 8, 80, 1, 3, 8, 91, 117). *Cl. XI.* Andronescu Dan (6988, 95, 6, 8, 7003, 66, 9, 61, 70, 3, 7, 8, 80, 3, 8, 105, 7, 10, 31), *Apostolescu Dan* (6995, 6, 8, 9, 7002—5, 21, 2, 4, 59, 60, 1, 3, 6, 9, 70, 3, 5, 7—81, 3, 91, 100, 7, 10, 22, 4, 7, 30—5), Bîzu Rarius (6998, 92, 6, 7, 8, 7001—5, 7, 20—2, 4, 8, 45, 60, 4, 6, 9, 72—4, 81, 3, 5, 135), Brandaburu Liviu (6988, 95, 6, 8, 7066, 70, 3, 5, 8—80, 3, 105, 7, 10, 31, 3, 7, 40), Cherchez Daniela (7066, 9, 70, 3, 8, 83, 100, 5, 10, 9, 20, 31), Dumitrescu Gheorghe (6996, 7003, 59, 63, 6, 73, 7, 8, 107, 10, 4, 22, 4, 31, 4), Dima Ştefan (7060, 3, 6, 9, 72, 3, 16—8, 80, 1, 91), Dumitru Marcel (6988, 95, 6, 7003, 61, 6, 9, 70, 3, 7, 8, 80, 3, 100, 7, 10, 31, 4, 40), Ganea Gabriel (7062, 4, 6, 8, 70, 3, 6, 8, 80, 117, 20—2, 4, 31, 8, 44), Grigorescu Cornelia (7059, 63, 6, 107, 14, 22, 4, 31, 4, 40, 65, 80), Ionescu Radu (6988, 95, 6, 7003, 61, 6, 9, 70, 3, 7, 8, 80, 3, 8, 100, 10, 31, 4, 40), Luca Constantin (6995, 6, 7002, 3, 59, 63, 6, 73, 7, 107, 10, 4, 22, 4, 31, 4), Minescu Florea (6988, 95, 6, 7003, 61, 6, 9, 70, 3, 7, 8, 80, 3, 8, 100, 7, 10, 31, 4), Pădure Nicolae (6988, 95, 6, 8, 7003, 61, 6, 9, 70, 3, 8, 80, 3, 8, 105, 7, 10, 31), Paină Constantin (6995, 7002, 3, 6, 66, 77, 107, 10, 14, 22, 4, 31, 4, 40), Petrescu Mircea (E : 2365, 6, 80, 95, 6, 7003, 59, 63, 6, 73, 77, 88, 107, 10, 4, 22, 4, 31, 4, 40), Petru Stelian (6995, 6, 7002—4, 17, 60, 73, 6—8, 80, 8, 120, 2, 31, 4, 40, 51), Rădulescu Natalia (6995, 7059—62, 9, 83, 100, 7, 10, 9, 20), Stănescu Dan (6987—92, 5—8, 7000—5, 7, 10, 3, 8, 9, 21, 2, 4—8, 30, 2, 7, 9, 40, 5, 7, 50, 1, 2, 66, 73, P), Stan Ion (7049—52, 66, 8, 9, 70, 2, 7, 8, 84, 6, 8), Stanciu Grigore (7002—4, 17, 31, 40, 51, 60, 73, 6, 8, 80, 8), Stere Marin (6995, 7, 7003, 59, 63, 6, 73, 7, 8, 107, 10, 4, 22, 4, 31, 4, 40), Stoian Liviu (6988, 95, 6, 7003, 61, 9, 70, 3, 7, 8, 83, 8, 100, 5, 7, 10, 20, 31), Ştefănescu Doru (6995, 6, 7002—4, 17, 60, 73, 6—8, 80, 8, 13, 14, 40), Ştefănescu Elena (6995, 6, 7003, 61, 6, 9, 70, 3, 7, 8, 80,

8, 100, 5, 7, 10, 20, 31), Tănase Sergiu (6988, 95, 6, 8, 7003, 61, 6, 9, 70, 3, 8, 80, 3, 8, 100, 5, 7, 10, 31, 7), Tănăsescu Octavian (7002, 3, 51, 9, 66, 70, 3, 6, 8, 80, 115, 7, 22, 4), *Vasiliu Constantin* (7048—52, 4—6, 9—64, 6—70, 2—4, 6—7, 80, 1, 3, 4, 8, 9, 91, 3, 7, 102, 5, 7, 8, 10, 4, 7, 9, 21, 2, 30, 1, 4, 6, 7, 40). *L. 2 cl. VI.* Miu Gabriela (E: 2354, 6, 7, 9, 69, 60, 6, 7, 81, 5). *Cl. VII.* Lupulenco Livia (E: 2360, 2—9), Marinescu Sergiu (E: 2357, 60, 1, 75, 6, 81—3, 9), Matei Nicoleta (E: 2354, 6—70, 4, 6, 81), Mignea Dănuța (E: 2356—9, 56, 9, 74, 81, 9), Miron Alexandru (E: 2362—70), Pastia Alexandru (E: 2355—9, 66—70), Radnev Sorin (E: 2356—9, 81—3, 9). *Cl. VIII.* Anastasiu Răzvan (E: 2354, 9, 70, 1, 5, 9—81), Boulescu Daniel (E: 2354, 6, 9, 61, 5, 6, 73—7), Coropcea Luiza (E: 2354, 6, 9, 66, 9, 57—7, 80, 3), Cososki Adrian (E: 2354, 6, 9, 61, 5, 6, 74, 6), Dacian Plaiu (E: 2356, 7, 9, 61, 6, 75—7, 9, 80), Ene Liana (E: 2354, 9, 66, 75, 7, 80, 69, 76, 83), Ioneci Elena (E: 2354, 6, 9, 66, 9, 75, 6, 80), Pîrvan Anca (E: 2356, 9, 63, 5, 6, 77, 80, 3, 99), Ungureanu Gabriela (E: 2356, 7, 9, 61, 6, 75, 6, 7, 81, 2). *Cl. IX.* Stan Gheorghe (E: 2366, 80; 7051, 2, 6, 70, 3, 6, 7, 77, 80, 130, 40). *Cl. X.* Mazăre Alexandru (7052, 60—3, 8, 70, 6, 80, 3, 4, 8, 91), *Orășanu Laurențiu* (6973, 7004, 17, 8, 26, 8, 32, 40, 53—5, 64, 8, 76—84, 6, 91, 107, 10, 1, 4, 7, 9—25, 6, 8, 30—2, 50, 9). *Cl. XI. Stan Emil* (7056—8, 71, 2, 5, 9, 82, 3, 5—91, 3, 8, 105, 6, 9—15, 9—25, 31, 2, 63), Țintă Mircea (6987—92, 5—7, 7002—4, 21, 2, 6, 8). *L. 3 cl. X.* Spiegel Wilhelmina (7048—52, 6, 60—3, 9, 73, 7, 80, 8, 91). *L. 4 cl. VIII.* Grigori Rodica (E: 2356—9, 61, 2, 6, 71). *Cl. IX.* Vasilache Dan (7059—61, 3, 6, 9, 70, 3, 5, 6, 80). *Cl. X.* Ionescu Elena (7059, 63, 76, 80, 119, 20, 2, 4, 40, 1, 2, 6, 40). *L. 6 cl. VII.* Stoica Valentin (E: 2354—6, 8, 60—6). *Cl. X.* Fetter Livia (7066, 9, 70, 3, 5, 80, 1, 119, 30, 1, 4, 94). *Absolvent* Minculescu Gheorghe (7000, 30, 1, 5, 5, 60, 3, 4, 8, 9, 78, 81, 3, 4, 96, 7005, 8, 10, 7, 21, 20, 2, 4, 31, 7, 42, 5, 78, 81, 5, 8).

POIANA MARE (Oltenia). *Cl. IX.* Caragea Aurel (E: 2365, 6, 7064, 6, 70, 3, 6, 7, 8, 80, 131, 88).

RĂDĂUȚI. *L. 2 cl. VII.* Weinstein Bertha (E: 2356, 7, 9, 69, 77, 81—5).

REȘIȚA. *S. g. 1 cl. VIII.* Borș Adriana (E: 2368—71, 5, 6, 8, 80). *L. 1 cl. XI.* Joiart Ioan (7051, 4, 61, 108, 10, 63, 8, 70, 5, 7, 8, 80, 115).

RICIU. *Cl. XI.* Dîmbeanu Vasile (7077, 80, 1, 91, 108, 10, 2, 30, 1, 2, 4, 5).

RÎMNICUL SĂRAT. *L. 2 cl. XI.* Crintea Mișu (7051, 69, 73, 7, 80, 1, 4, 91, 110, 20, 4, 30—2, 5, 85).

RÎMNICUL VÎLCEA. *Cl. XI.* Marinescu Alexandru (7059—61, 4, 9, 76, 8, 80, 91, 124, 30, 1), Popescu Constantin (7048—52, 4, 5, 60—4, 8—70, 3, 6—8, 80, 1, 3), Schidu Alexandru (7119—25, 30, 1, 4, 43, 96). *L. 2. cl. X.* Marinescu Silvian (7075, 7, 80, 1, 91, 6, 117, 9, 22, 4, 30, 4). *Cl. XI.* Buricescu Buricea (6947, 9, 50, 2—4, 7, 8, 62, 4, 51, 2, 4), Voinescu Dumitru (7064, 6, 70, 3, 6, 80, 110, 9, 20, 1, 4, 31).

ROMA (Suceava). *Cl. VIII.* Chițanuc Elena (E: 2356, 7, 9, 61, 2, 6, 9, 70, 6), Iacob Adela (E: 2356, 7, 9, 62, 6, 9, 70, 6).

ROMAN. *S. g. 7 cl. VII.* Platon Emilia (E: 2354, 6, 9, 67—72, 6). *L. 1 cl. XI.* *Ruginâ Andrei* (7050—2, 4—6, 9—66, 8—70, 3, 6, 80, 1, 3, 4, 9, 95, 7, 105, 12, 4, 7, 9—31, 3, 5, 6, 9, 42—7, 51, 60, 3, P).

ROMÂNEȘTI (Ploiești). *Cl. VIII.* Herea Ion (E: 2356, 7, 9, 64—6, 9, 70, 1, 3, 4, 8, 80).

ROȘIORII DE VEDE. *L. 1 cl. X.* Bucur Dan (6998, 7002, 10, 66, 9, 70, 3, 6, 80, 119, 31, 5), Cîmpeanu Gheorghița (6988, 98, 7003, 22, 66, 9, 70, 3, 4, 80, 110, 9, 31, 2, 5), Georgescu Grațiela (6995, 6, 8, 7002, 3, 5, 62, 3, 6, 9, 70, 3, 6, 8, 80, 91, 131), Nagea Ștefan (6988, 95, 6, 8, 7002—5, 24, 49, 60, 1, 3, 9, 70, 7, 80, 91, 131). *Cl. XI.* Ivan Pastorel (6988, 95, 6, 7002—4, 22, 59, 61, 73, 5, 80, 91, 119), Șerban Floarea (7059, 63, 70, 3, 5, 80, 1, 110, 21, 31). *L. 2 cl. XI.* Sandu Marin (7060, 8—70, 3, 80, 119, 24, 31, 8, 40, 5).

RUDINA (Oltenia). Cl. XI. Giurgiuc Costel (7050, 2, 4, 9—61, 3, 6, 9, 70, 3, 7, 81, 6, 120—2, 4, 5, 7, 30, 4, 5).

SĂCELE (Dobrogea). Cl. VIII. Ștefan Eliza (E: 2324—6, 33, 6—41, 50).

SĂRMAȘ (M.A.M.). *Cl. XI.* Cubleștean Ioan (7051, 2, 9, 60—2, 4, 6, 9, 70, 6, 7, 7, 80, 96).

SĂVENI (Suceava). Cl. XI. Buruiană Emil (7049, 51, 62, 6, 9, 73, 8, 80, 1, 9, 91, 111, 22, 31), Clocotici Valentin (7051, 2, 9, 60, 4, 6, 7, 9, 73, 7, 81, 9, 91, 119, 20, 7, 30).

SATU MARE. *S. g. l.* Mitaru Angela (E: 2360, 2, 3, 5, 6, 76, 9, 80). *L. 1 cl. X.* Mitaru Alex. (7056, 91, 119, 22, 30, 1, 2, 4, 35, 6, 45, 51, 63). Cl. XI. Ciornău Nicolae (7066, 9, 70, 3, 7, 70, 1, 91, 105, 9, 22, 4, 30, 1, 6, 42, 3), Taloș Gheorghe (7051, 60, 1, 3, 4, 6, 8—70, 2, 3, 6, 7, 80, 1), Timac Dorel (7051, 66, 70, 3, 4, 6, 8, 80, 110, 20, 21, 2, 4, 31, 6). *(va urma)*

KOSMUSZAKI KIÁLLÍTÁCIÓS

1966 MAR 23

CĂTRE REZOLVITORII DE PROBLEME

— *Rezolvînd probleme pregătiți și Olimpiada Matematică 1966.*

Corespondenții care ne trimit probleme rezolvate trebuie să redacteze fiecare problemă separat, însoțind-o de toate calculele necesare și de figuri desenate cu îngrijire.

Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceeași foaie.

Evidențiații trebuie să aibă cel puțin 35—40 soluții bune.

Problemele care se propun de către colaboratorii revistei să fie clar alcătuite și însoțite de soluții, să fie personale, iar nu luate din cărți sau reviste. Elevii sînt sfătuiți să înceapă a propune probleme numai după ce au rezolvat un număr destul de mare de exerciții și probleme. Problemele propuse, dar necorespunzătoare, nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse au fost publicate în cărți sau reviste, este rugat să arate precis volumul și pagina unde a mai apărut enunțul sau soluția problemei respective.

Solicităm probleme interesante legate de practică.

— *Problemele propuse urmînd a fi publicate ținînd seama de predarea la clasă a materiei respective, autorii lor sînt rugați să trimită problemele din vreme însoțite de una sau mai multe soluții îngrijit scrise precum și observări, discuții sau uneori generalizări, arătînd și modul cum au fost stabilite.*

— *Problemele propuse* (P), *note matematice* (N), *articole* (A), *materiale privind cercurile de elevi* (C), *se vor trimite redacției* G.M.-B. *de preferat într-un plic separat de problemele rezolvate.*

Corespondentul nostru care a citit și a înțeles deplin multe din soluțiile publicate, a rezolvat multe din problemele propuse poate și este îndemnat să încerce să schițeze cîte o notă rezultată dintr-o observație făcută cu ocazia rezolvării unei chestiuni mai grele. Aceste note să fie *revăzute de mai multe ori înainte de a fi trimise*, pentru ca redactarea lor să fie *cît mai clară și concisă*. Figurile să fie făcute separat. În redactare se vor evita prescurtările.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

La publicarea problemelor rezolvate se vor menționa rezolvitorii care au dat o bună redactare și o soluție interesantă sau mai multe metode de rezolvare.

Elevii claselor a IX-a pot trimite soluții și la problemele propuse pentru clasa VIII-a. Problemele rezolvate trebuie să fie din ultimile trei numere apărute în G.M.B. *Problemele rezolvate*, vor fi expediate în cursul unei luni și vor fi însoțite de un borderou cu numărul problemelor, scrise în ordinea crescîndă. Pe plic se va scrie școala, clasa și localitatea rezolvitorului. Problemele propuse vor fi separate, corect rezolvate și citeț semnate. Desenele să fie făcute îngrijit pe foi separate.

Elevii claselor V—VIII vor fi anunțați în rubrica rezolvitorilor de probleme dacă trimit odată cel puțin 8 probleme bine rezolvate, iar elevii claselor IX—XI, pentru cel puțin 12 probleme bine rezolvate.

Autorii sînt rugați să semneze clar la sfîrșitul lucrării personale pe care o trimit pentru publicat și să dea adresa lor exactă.

*

În vederea stimulării elevilor clasei XI premiați la olimpiadele internaționale de matematică sau olimpiadele interne (etapa finală), care devin studenți ai facultății de matematică-mecanică sau fizică de la Universități, conducerea Ministerului Învățămîntului a hotărît să li se acorde următoarele forme de sprijin material:

a) bursă în primul an de studii, indiferent de situația lor materială. În următorii ani de studii bursa să fie menținută în aceleași condiții dacă obțin media generală cel puțin 9,00.

b) la începutul primului an de studii să li se acorde cărți și manuale de specialitate în valoare de 500 lei.

c) în vacanțele anului I de studii să fie trimiși cu prioritate la odihnă în taberele studențești (iarna sau vara la alegerea studentului) dacă rezultatele școlare sînt foarte bune.

*

Tirajul fiind limitat, gazetele se trimit mai întîi abonaților și de aceea rugăm colaboratorii noștri să se aboneze de îndată. Prețul este de 2 lei exemplarul. *Abonamentele se pot face prin oficiile poștale locale.*

I. P. „Inforamția" — c. 4951

INDEX 41601

Lei 2

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

E 1426

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE
DIN REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA

GAZETA MATEMATICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XVII — martie 1966

3

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

GAZETA MATEMATICĂ
SERIA B
Anul XVII, nr. 3 — martie 1966

SUMARUL

	Pag.
1. Alexandru Pantazi de Gh. Th. Gheorghiu	97
2. Observaţii asupra rezolvării problemelor date la a VII-a Olimpiadă internaţională de matematică, de T. Roman	100
3. Note matematice de Corneliu Georgescu, Eftimie Grecu, Liviu Petre, Theodor Theodoridis	111
4. Rezultatul întrecerii între liceele din ţară privind activitatea extraşcolară la matematică în anul 1965	118
5. Probleme rezolvate (7007, 7018, 7019, 7022, 7024, 7027, 7028, 7029)	119
6. Chestiuni de examen (7423—7436)	126
7. Probleme propuse (7437—7474)	129
8. Exerciţii şi probleme propuse pentru clasele V — VIII (E: 2464—2478)	134
9. Cărţi noi	137
10. Rubrica rezolvitorilor de probleme	137

ANUL XVII 3 MARTIE

COMITETUL DE REDACŢIE

Dincă N., profesor ; *Grosu A.*, profesoară ; *Ionescu-Bujor C.*, prof. univ. emerit ; *Ionescu-Ţiu C.*, profesor, redactor şef adjunct ; *Kiss E.*, conf. univ. (Cluj) ; *Kovacs K.*, conf. univ. (Cluj) ; *Muşat I.*, profesor ; *Ottescu C.*, profesor ; *Plăviţu M.*, profesor ; *Sacter O.*, conf. univ., redactor şef ; *Simionescu Gh.*, conf. univ. ; *Ţene L.*, profesoară şi *Voinea R.*, prof. univ.

REDACŢIA : Str. Academiei, 14 — Tel. 14.46.53 — Bucureşti

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică a şcolilor, precum şi orice material informativ se vor trimite pe adresa de mai sus.

GAZETA MATEMATICĂ

SERIA B

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XVII nr. 3 martie 1966

MAGYAR ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT

ALEXANDRU PANTAZI

de *GH. TH. GHEORGHIU*

La începutul secolului pe care-l trăim, învățămîntul matematic în liceele din țara noastră era puțin dezvoltat. Universitățile din București și Iași, care și-au sărbătorit de curînd centenarul, aveau puțini studenți și care, în general, nu se îndreptau spre meseria de profesor, ingrată și fără importanță pe atunci. Înseși universitățile sufereau din lipsă de cadre bine pregătite, încît în general viața matematică era slabă și fără vlagă. În aceste momente grele, apar trei factori hotărîtori care produc o mare cotitură în învățămîntul matematic de toate gradele. În primul rînd apar primii doctori în matematici *Spiru Haret*, *Constantin Gogu*, *David Emanuel* cărora le urmează în scurt timp *Gheorghe Țițeica*, *Dimitrie Pompeiu*, *Traian Lalescu* și *Alexandru Myller*. În al doilea rînd, apare reforma învățămîntului prin care iau ființă secțiile reale ale liceelor și în al treilea rînd, începe să apară *Gazeta matematică*. Importanța acestor trei evenimente a început să se facă simțită repede. Au început să apară în țară licee care prin absolvenții pe care-i scoteau, deveneau, din ce în ce mai cunoscute și mai apreciate. Și acest lucru se remarca în special prin elevii care lucrau la Gazeta matematică. Unii din aceștia luau parte la Concursurile anuale pe care Gazeta matematică le organiza (începînd din 1905) cu scopul de a evidenția și încuraja elementele de valoare. Așa au început să se remarce liceele Gh. Lazăr, Matei Basarab și Mihai Viteazul din București, liceele din Bîrlad, Iași, Galați, Focșani, Botoșani, Turnu-Severin, Buzău, Ploiești și altele. În 1915, în rîndul acestor licee se înscrie și liceul din Piatra Neamț prin unul din strălucitii săi elevi *Alexandru Pantazi*. Învățămîntul nostru matematic intră într-o nouă fază, într-o epocă de consolidare. Și-au făcut apariția profesori și ingineri de valoare, oameni cu prestigiu mondial, care au început să scrie istoria științei românești. Noile generații de tineri datorează recunoștință acestor pionieri ai culturei noastre, de aceea, este bine ca din cînd în cînd să ne

mai întoarcem privirile spre ei, menționînd munca și aportul științific pe care l-au adus.

În a doua falangă de matematicieni, mult mai numeroasă decît prima, apare printre primii Alexandru Pantazi ca unul care a îmbogățit matematica românească cu rezultate impunătoare slujind în același timp învățămîntul ca profesor universitar. Ne propunem să scriem astăzi cîteva rînduri despre el.

S-a născut la Piatra Neamț în 21 august 1896. Tatăl său, Mihai Pantazi era învățător și a căutat să dea o educație aleasă fiului său : l-a învățat să fie modest și muncitor. Așa se explică faptul că Pantazi a fost în liceu elev silitor fiind distins la fiecare sfîrșit de an cu premiul întîi al clasei. De mic dovedea o pasiune deosebită pentru matematică și în special pentru geometrie. Începe să lucreze la Gazeta matematcă cînd era elev în clasa VI (cl. X de astăzi) și apare pentru prima dată în no. 3, vol. XVIII din 15 noiembrie 1912. Dar nu apare întîmplător, căci în același an în paginile revistei numele său apare de 23 ori. În anii care urmează această activitate sporește apărînd în vol. XIX de 65 ori ș.a.m.d. Nu și-a întrerupt activitatea ca student ci din contră și-a intensificat-o. S-a remarcat pentru prima dată prin soluția problemei 1758 (vol. XIX, p. 180) ; în același număr îi apare prima notă „Asupra binomului de factoriale". De asemeni, prima problemă i-a apărut sub nr. 2083 (vol. XIX, p. 280) căreia nici pînă astăzi nu i s-a publicat soluția. În această problemă se cere să se calculeze determinantul

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} C_p^1 & C_{p+1}^2 & \cdots & C_{2p-1}^p \\ C_{p+1}^2 & C_{p+2}^3 & \cdots & C_{2p}^{p+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{2p-1}^p & C_{2p}^{p+1} & \cdots & C_{3p-2}^{2p-1} \end{vmatrix}$$

unde C_m^n reprezintă combinări de m obiecte luate cîte n.

Primul articol, cum era natural de geometrie, apare în vol. XX, pag. 81 sub titlul : Proprietăți ale patrulaterelor inscriptibile și conține 14 proprietăți foarte interesante. Alex. Pantazi a luat parte și la concursurile Gazetei Matematice ocupînd locul al 8-lea în cl. VII (1914), și primul în cl. VIII (1915). Iată ce scrie Gh. Țițeica, raportorul concursului, cu această ocazie : „În fruntea listei noastre de premianți din anul acesta merită să punem pe unul din cei mai harnici corespondenți, cunoscuți tuturor celor care lucrează la Gazetă, d-l Al. Pantazi, elev în clasa VIII la liceul Piatra Neamț. Proba scrisă de geometrie analitică a tratat-o afară de o mică greșeală de calcul — cu siguranța celui care stăpînește bine materia de liceu și care mai cunoaște multe lucruri și dincolo de ea : ultima parte a problemei a rezolvat-o prin trei metode deosebite ; cea de algebră a făcut-o foarte bine iar răspunsurile orale au fost la aceeași înălțime prin stăpînirea materiei și siguranța răspunsurilor". Iată o caracterizare a elevului de liceu Alex. Pantazi care avea să devină om de știință mai tîrziu. Ce-am putea să mai spunem noi în plus, decît că aprecierea Gazetei matematice i-a fost de bun augur pentru activitatea sa viitoare. Să-l urmărim mai departe.

Vine la Universitate în 1914 unde îl are profesor pe *Gh. Țițeica* unul din cei mai mari geometri ai timpului său. Îi urmărește cursurile și

seminariile cu pasiune. Culege subiecte interesante propuse de marele său maestru, le dezvoltă și le publică ca articole în Gazeta matematică cum sînt cele publicate în vol. XXI, pag. 206 și 243 în 1915 sub titlurile „Două teoreme de geometrie plană" și „O generalizare și o extindere a teoremei ortologiei a două triunghiuri". Din cauza vremurilor grele prin care trecea țara în acele timpuri, Pantazi este nevoit să-și întrerupă studiile luînd parte la războiul din 1916—1918 ca sublocotenent. Dar nu și-a întrerupt activitatea nici în aceste momente grele. Numele lui apare mereu în paginile revistei care și ea nu și-a oprit apariția în timpul războiului fiind purtată în rănițele celor ce o iubeau și care o aveau în suflet. Căci Gazeta matematică se contopea pentru mulți din corespondenții ei, cu pasiunea de a cerceta adevărul, de a cultiva progresul matematicii, progresul științific.

După terminarea războiului, în 1918 își reia studiile obținînd licența în 1920 cu calificativul „foarte bine". Dar Pantazi nu era omul să se oprească aci. Pleacă la Paris în același an unde își continuă studiile cu un alt mare geometru din timpurile acelea, cu Elie Cartan sub conducerea căruia lucrează teza de doctorat și pe care o prezintă în 1928 cu titlul „Asupra aplicabilității proiective a hipersuprafețelor desfășurabile". Ascultînd pe Cartan, a venit în contact cu cele mai importante probleme care se puneau în geometrie pe atunci. Nu este cazul aici să intrăm într-o analiză a operei sale științifice, dar putem spune că rezultatele lui Alex. Pantazi în geometria proiectivă a congruențelor, familiilor de suprafețe și varietăților neolonome sînt remarcabile. În cartea sa „Teoria Congruențelor" geometrul sovietic Sergiu Finikof vorbește de lucrările lui Alex. Pantazi asupra congruențelor stratificabile cu multă admirație.

Alex. Pantazi a scos de asemenea o monografie intitulată *Elemente de Geometrie Diferențială Proiectivă a curbelor și suprafețelor* cartea avînd 150 pagini, în care autorul arată pe cale elementară metoda reperului mobil aplicată curbelor și suprafețelor din spațiul cu două și cu trei dimensiuni.

Reîntors în țară de la Paris, este numit în 1929 asistent la Catedra de Geometrie analitică condusă de Gheorghe Țițeica la Universitatea din București și apoi în 1940 a fost numit profesor de Geometrie Descriptivă și Proiectivă de la Școala Politehnică, unde a funcționat pînă la sfîrșitul vieții sale. A murit la 4 noiembrie 1948 în plină activitate științifică în vîrstă numai de 52 ani cînd cultura sa matematică i-ar fi permis încă mulți ani să producă lucrări științifice de valoare.

Alexandru Pantazi avea o calitate care-l scotea din comun : îi plăcea să îndrume pe cei din jurul lui să citească și să lucreze în domeniul matematicilor superioare. Îi plăcea să gîndească nu numai pentru el ci și pentru alții dîndu-le idei de cercetare științifică, căutînd să descopere talente noi pentru dezvoltarea și îmbogățirea matematicii românești. Iată dece Alexandru Pantazi se așează cu cinste alături de Gheorghe Țițeica, Dimitrie Pompeiu, Traian Lalescu și alții, care împodobesc fresca oamenilor de știință a poporului român. Asemenea figuri au menirea de a întări încrederea în viitorul nostru și de a ne da puterea convingerii că poporul român poate sta cu cinste, în noua epocă pe care o trăim, alături de celelalte popoare ale lumii care doresc pacea, prosperitatea și buna stare a omenirii.

OBSERVAȚII
ASUPRA REZOLVĂRII PROBLEMELOR DATE LA A VII-a OLIMPIADĂ INTERNAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ *

de *T. ROMAN*

Gazeta matematică seria B a încetățenit bunul obicei de-a publica comentarii asupra „comportării matematice" a elevilor noștri la fiecare olimpiadă internațională. Se urmărește astfel să se ofere cititorilor soluțiile problemelor, cu mai multe variante de obicei, dar și observații asupra

Liliana Bucur vorbind la închiderea O.I.M., în numele tuturor elevilor participanți

unora din greșelile comise. Toate acestea contribuie la mai buna pregătire a elevilor pentru concursul intern de matematică și pentru viitoarele O.I.M.

Problemele date la a VII-a O.I.M. s-au publicat în această revistă, nr. 10/1965, pag. 476. Observații asupra rezolvării fiecăreia de către „olimpicii" noștri se dau mai jos.

Problema I (7178)

Să se găsească toate numerele reale x *din intervalul* $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, *care satisfac inegalitățile*

$$2\cos x \leqslant |\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x}| \leqslant \sqrt{2}.$$

Prima soluție (dată de *L. Bucur* și *J. Weinstein*).

Mulțimea căutată a numerelor x este intersecția mulțimilor numerelor x, situate în intervalul $[0,2\pi]$ și care verifică relațiile (1) și (2) și anume :

$$2\cos x \leqslant |\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x}| \tag{1}$$

$$|\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}| \leqslant \sqrt{2}. \tag{2}$$

a) Dacă $\cos x \leqslant 0$, adică $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$, (1) este satisfăcută.

* Vezi și articolul „A VII-a Olimpiadă internațională de matematică din G.M.—B., nr. 10/1965.

b) Dacă $\cos x > 0$, adică $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ ambii termeni ai inecuației (1) sînt pozitivi și prin ridicare la pătrat se obține o relație echivalentă cu (1),

$$4\cos^2 x \leqslant 2 - 2\sqrt{1 - \sin^2 2x}$$

sau

$$|\cos 2x| \leqslant 1 - 2\cos^2 x$$

sau

$$|\cos 2x| \leqslant -\cos 2x,$$

care nu-i posibilă decît cu semnul egal, dacă $\cos 2x \leqslant 0$, deci pentru $2x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right]$ sau $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$ (căci $2x$ poate lua valori în intervalul $[0,4\pi]$).

Ținînd seama de rezultatele de la a) și b) se deduce că mulțimea numerelor x care satisfac (1) este intervalul

$$J = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right].$$

c) Relația (2) avînd ambii termeni pozitivi, prin ridicare la pătrat se obține o relație echivalentă,

$$2 - 2\sqrt{1 - \sin^2 2x} \leqslant 2$$

sau

$$-2|\cos 2x| \leqslant 0,$$

care este verificată de orice x.

Așadar, mulțimea numerelor x care satisfac inecuațiile date este intervalul J.

A doua soluție (dată de *O. Bîscă* și *I. Ștefănescu-Sabba*).

Radicalii din enunț se pot scrie

$$\sqrt{1 + \sin 2x} = \sqrt{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)} = \sqrt{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} = \sqrt{2}\left|\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right|$$

$$\sqrt{1 - \sin 2x} = \sqrt{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)} = \sqrt{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} =$$

$$= \sqrt{2}\left|\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right| = \sqrt{2}\left|\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\right|.$$

Relațiile din enunț sînt echivalente cu (3) și (4):

$$\sqrt{2}\cos x \leqslant \left|\left|\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right| - \left|\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\right|\right| \tag{3}$$

$$\left|\left|\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right| - \left|\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\right|\right| \leqslant 1. \tag{4}$$

a) Din $|u - v| = \begin{cases} u - v, \text{ pentru } u \geqslant v \\ v - u, \text{ pentru } u < v \end{cases}$

se obține $\begin{cases} |u-v| < u, \text{ pentru } u \geqslant v \\ |u-v| < v, \text{ pentru } u < v \end{cases}$

dacă u și v sînt pozitivi.

Notînd $u = \left|\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right|$, $v = \left|\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\right|$ și ținînd seama de inegalitățile precedente rezultă că (4) este verificată de orice x.

b) Dacă $\cos x \leqslant 0$, adică $\frac{\pi}{2} \leqslant x < \frac{3\pi}{2}$, (3) este satisfăcută.

c) Deoarece (4) este verificată pentru orice x, urmează să se studieze dacă și (3) este verificată în intervalele $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right]$, $\left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right)$.

c_1) Dacă $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, atunci

$$\frac{\pi}{4} - x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right), \quad \frac{\pi}{4} + x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$$

și $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) > 0$, $\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) > 0$, $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) > \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$.

Relația (3) devine

$$\sqrt{2}\cos x \leqslant \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right),$$

$$\sqrt{2}\cos x \leqslant 2\sin\frac{\pi}{4}\sin x,$$

sau $\cos x \leqslant \sin x$, imposibilă în intervalul considerat.

c_2) Dacă $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, relația (3) devine

$$\sqrt{2}\cos x \leqslant \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$$

sau $\cos x \leqslant \cos x$, care este satisfăcută cu semnul egal.

c_3) Dacă $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right]$, relația (3) devine

$$\sqrt{2}\cos x \leqslant \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

satisfăcută, ca la c_2).

c_4) Dacă $x \in \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right)$, relația (3) devine

$$\sqrt{2}\cos x \leqslant \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

sau $\cos x \leqslant -\sin x$, imposibilă în intervalul considerat.

Așa dar, mulțimea numerelor care satisfac inecuațiile date este $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right] = J$.

A treia soluție (dată de *E.Popa* și *D. Voiculescu*)

Se notează :

$$E = |\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x}|.$$

Se observă că această expresie este reală și că se poate aduce succesiv la forma

$$E = |\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x} - \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x}|$$

$$= ||\cos x + \sin x| - |\cos x - \sin x||.$$

Valorile lui E depind de semnele expresiilor $\cos x + \sin x$ și $\cos x - \sin x$ ceea ce impune fracționarea intervalului $[0, 2\pi]$ prin punctele $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$.

a) În intervalul $\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$ se obține

$$E = |\cos x + \sin x - \cos x + \sin x| = 2\sin x,$$

așa că relațiile din enunț devin

$$2\cos x \leqslant 2\sin x \leqslant \sqrt{2}.$$

Prima inegalitate este imposibilă.

b) În intervalul $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ se obține

$$E = |\cos x + \sin x - \sin x + \cos x| = 2|\cos x|,$$

așa că relațiile din enunț devin

$$2\cos x \leqslant 2|\cos x| \leqslant \sqrt{2},$$

care sînt verificate. Relația din stînga este satisfăcută cu semnul egal în intervalul $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ și cu semnul mai mic în intervalul $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$.

c) În intervalul $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ se obține

$$E = |-\sin x - \cos x - \sin x + \cos x| = 2|\sin x|$$

așa că relațiile din enunț devin

$$2\cos x \leqslant 2|\sin x| \leqslant \sqrt{2}$$

care sînt satisfăcute cu semnul mai mic.

d) În intervalul $\left[\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$ se obține

$$E = |-\sin x - \cos x - \cos x + \sin x| = 2|\cos x|,$$

așa că relațiile din enunț devin

$$2\cos x \leqslant 2|\cos x| \leqslant \sqrt{2},$$

care sînt verificate; cea din stînga cu semnul mai mic în intervalul $\left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right)$ și cu semnul egal în intervalul $\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right]$.

e) În intervalul $\left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$ se obține

$$E = |\sin x + \cos x - \cos x + \sin x| = -2\sin x$$

așa că relațiile din enunț devin

$$2\cos x \leqslant -2\sin x \leqslant \sqrt{2}$$

care nu sînt verificate.

Observații. 1°. Trebuie subliniată ingeniozitatea și puterea de muncă a elevilor noștri care au dat trei soluții. Ele sînt enumerate mai sus, începînd cu cea mai simplă.

2°. Problema s-a dovedit în general accesibilă, 37 elevi obținînd cîte 4 puncte și 9 cîte 3 puncte.

Elevii noștri s-au prezentat bine: 5 au obținut cîte 4 puncte, unul 3 puncte, ceilalți cîte 2 puncte.

3°. Cîteva lipsuri semnalate:

– din $\cos 2x \geqslant 0$, deduce greșit $2x \in \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ și $x \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

– deși pune condiția $\cos x < 0$, ridică la pătrat (în prima soluție);

– deși presupune $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ studiază ca subcaz $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$;

– afirmă că relația $\cos x \leqslant -\cos x$ nu este satisfăcută în intervalul $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$, nefiind atent la semnul funcției $\cos x$.

Problema II (7179)

Se dă sistemul de ecuații

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0$$

ai căror coeficienți satisfac condițiile:

a) a_{11}, a_{22}, a_{33} *sînt pozitivi,*
b) *ceilalți coeficienți sînt negativi,*
c) *în fiecare ecuație, suma coeficienților este pozitivă.*

Să se demonstreze că singura soluție a sistemului dat este

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

Prima soluție (dată de *L. Bucur*).

Presupunînd că există și soluții diferite de cea banală ($x_1 = x_2 = x_3 = 0$), fie $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3$ și deci

$$x_2 = x_1 + m, \quad x_3 = x_1 + m + n \text{ cu } m \geqslant 0, \; n \geqslant 0.$$

Prima și a treia ecuație a sistemului devin

$$(a_{11} + a_{12} + a_{13})x_1 + (a_{12} + a_{13})m + a_{13}n = 0, \tag{1}$$

$$(a_{31} + a_{32} + a_{33})x_1 + (a_{32} + a_{33})m + a_{33}n = 0. \tag{2}$$

Din ipotezele $a_{31} + a_{32} + a_{33} > 0$ și $a_{31} < 0$ rezultă

așa că $$a_{32} + a_{33} > 0$$

$$(a_{32} + a_{33})\, m \geqslant 0,\ a_{33} n \geqslant 0$$

Din (2) rezultă $x_1 \leqslant 0$.

Ținînd seama de ipotezele $a_{12} < 0$, $a_{13} < 0$, $a_{11} + a_{12} + a_{13} > 0$ și de rezultatul precedent, rezultă

$$(a_{11} + a_{12} + a_{13}) x_1 \leqslant 0,\ (a_{12} + a_{13})\, m \leqslant 0,\ a_{13} n \leqslant 0.$$

Suma acestor trei termeni nepozitivi fiind nulă conform relației (1), se deduce că fiecare termen este nul și deci

$$x_1 = 0, \quad m = 0, \quad n = 0$$

adică sistemul nu admite decît soluția banală.

Dacă s-ar considera o altă ordine, de pildă $x_2 \leqslant x_1 \leqslant x_3$ atunci se va lucra cu a treia și a doua ecuație.

A doua soluție (dată de *Al. Bădescu*).

Dacă determinantul sistemului este nenul, nu există decît soluția banală. Se poate arăta însă că $D > 0$.

Din ipoteze rezultă

$$a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} = k_i > 0, \quad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

Determinantul sistemului devine succesiv:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + a_{12} + a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= k_1 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - k_2 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + k_3 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Din $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, $a_{21} < 0$, $a_{31} < 0$, se obține

$$a_{22} + a_{23} > 0, \quad a_{33} + a_{32} > 0$$

și deci $$a_{22} > -a_{23}, \quad a_{33} > -a_{32}.$$

Deoarece acestea sînt inegalități între numere pozitive, rezultă

$$a_{22} a_{33} > a_{23} a_{32} \tag{1}$$

Dezvoltînd determinantul D se poate scrie:

$$D = k_1 (a_{22} a_{33} - a_{32} a_{23}) + k_2 (-a_{12} a_{33} + a_{13} a_{32}) + k_3 (a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22}).$$

Prima paranteză este pozitivă, după (1); fiecare din produsele situate în celelalte paranteze este pozitiv, în baza ipotezelor.

Așa dar D este pozitiv și sistemul dat nu admite decît soluția banală.

A treia soluție (dată de *D. Voiculescu*).

Ca și în soluția a doua, urmează a arăta că $D \neq 0$.

Se va nota :

$$a_{ij} = -m_{ij} \, (i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3; \quad i \neq j), \tag{1}$$

unde numerele m_{ij} sînt pozitive. Din ipoteza

$$a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} > 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

rezultă

$$a_{11} > m_{12} + m_{13}, \; a_{22} > m_{21} + m_{23}, \; a_{33} > m_{31} + m_{32}.$$

Există așa dar 3 numere pozitive m_{11}, m_{22}, m_{33} care satisfac relațiile

$$a_{11} = m_{11} + m_{12} + m_{13}, \; a_{22} = m_{31} + m_{22} + m_{23}, \; a_{33} = m_{31} = m_{32} + m_{33}. \tag{2}$$

Se exprimă D cu ajutorul coeficienților m_{ij} și se dezvoltă după regula lui Sarrus. Se obține succesiv :

$$D = \begin{vmatrix} m_{11} + m_{12} + m_{13} & -m_{12} & -m_{13} \\ -m_{21} & m_{21} + m_{22} + m_{23} & -m_{23} \\ -m_{31} & -m_{32} & m_{31} + m_{32} + m_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= (m_{11} + m_{12} + m_{13})(m_{21} + m_{22} + m_{23})(m_{31} + m_{32} + m_{33}) - m_{13}m_{21}m_{32}$$
$$- m_{12}m_{23}m_{31} - m_{13}m_{31}(m_{21} + m_{22} + m_{33}) - m_{23}m_{32}(m_{11} + m_{12} + m_{13})$$
$$- m_{12}m_{21}(m_{31} + m_{32} + m_{33}).$$

Produsul primelor 3 paranteze este o sumă de 27 expresii pozitive distincte de forma $m_{1i} \, m_{2j} \, m_{3k}$ $(i, j, k = 1, 2, 3, \; i \neq j \neq k)$

Cele 11 expresii negative sînt distincte, cum se poate verifica ușor ; ele se reduc cu unele din cele 27 pozitive. Așa dar S este o sumă de 16 termeni pozitivi și $D > 0$.

A patra soluție (dată de *J. Weinstein*).

Se observă că soluția $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ verifică sistemul.

a) Sistemul nu admite o soluție de forma $x_1 = x_2 = 0, \; x_3 \neq 0$ căci din prima ecuație ar rezulta $a_{13} = 0$, ceea ce este contrar ipotezei. În mod analog se procedează dacă altă necunoscută ar fi nenulă.

b) Sistemul nu admite o soluție de forma $x_1 = 0, \; x_2 \neq 0, \; x_3 \neq 0$ căci din prima și a doua ecuație ar rezulta

$$a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \; a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0$$

sau

$$\frac{x_2}{x_3} = -\frac{a_{13}}{a_{12}} < 0, \frac{x_2}{x_3} = -\frac{a_{23}}{a_{22}} > 0$$

ceea ce nu este posibil. În mod analog se procedează dacă alte 2 necunoscute ar fi nenule.

c) Sistemul nu admite o soluție de forma

$$x_1 > 0, \; x_2 < 0, \; x_3 < 0$$

căci ar rezulta : $a_{11}x_1 > 0$, $a_{12}x_2 > 0$, $a_{13}x_3 > 0$ și prima ecuație nu ar fi verificată. În mod analog se procedează dacă alte 2 necunoscute ar fi negative, cealaltă fiind pozitivă.

d) Sistemul nu admite o soluție de forma

$$x_1 > 0, \quad x_2 > 0, \quad x_3 < 0$$

căci ar rezulta

$$a_{31}x_1 < 0, \quad a_{32}x_2 < 0, \quad a_{33}x_3 < 0$$

și a treia ecuație nu ar fi verificată. În mod analog se procedează dacă alte 2 necunoscute ar fi pozitive, cealaltă fiind negativă.

e) Sistemul nu admite o soluție de forma

$$x_1 = x_2 = x_3 \neq 0$$

căci din prima ecuație ar rezulta

$$(a_{11} + a_{12} + a_{13})x_1 = 0$$

ceea ce contrazice ipoteza că suma din paranteză este pozitivă.

f) Sistemul nu admite o soluție de forma

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 > 0$$

căci din $a_{11} + a_{12} + a_{13} > 0$ ar rezulta

$$a_{11} - x_1 > -(a_{12} + a_{13})x_1 = -a_{12}x_1 - a_{13}x_1 > -a_{11}x_2 - a_{13}x_3$$

ceea ce arată că ecuația întîia nu este verificată.

În mod analog se arată că sistemul nu admite o soluție de forma

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 < 0$$

Dacă ordinea ar fi alta, s-ar contrazice o altă ecuație a sistemului (în cazul $x_2 \geqslant x_1 \geqslant x_3 > 0$, de exemplu, ecuația a doua).

Observații. 1°. Sublinierea făcută la prima problemă este cu atît mai valabilă aci, unde era necesară o analiză mai delicată. Toate soluțiile date au fost simple și au dovedit puterea de judecată a elevilor noștri.

2°. Problema s-a dovedit cea mai dificilă din prima zi : 19 elevi au obținut cîte 6 puncte, 5 cîte 5 puncte și 4 cîte 4 puncte în timp ce 34 au obținut cîte 0 sau 1 punct.

Elevii noștri au obținut : trei cîte 6 puncte, unul 5 puncte, doi cîte 3 puncte, unul 2 puncte și unul 1 punct.

Pentru soluția a doua, Al. Bădescu a obținut o diplomă de rezolvare excelentă a unei probleme, dat fiind că majoritatea elevilor a încercat să arate că D este nenul dar nici unul nu a reușit pe o cale directă.

3°. Cîteva lipsuri semnalate :

— la soluția a patra, elevul nu precizează la fiecare caz că în mod analog se procedează dacă alte necunoscute decît cele cu care s-a lucrat ar îndeplini condiția presupusă ;

— încercînd soluția a doua, doi elevi nu reușesc să arate că D este pozitiv, deoarece nu utilizează inegalități de forma $a_{11} > -a_{12}$, care se deduc din ipotezele problemei.

Problema III (7180)

Se dă un tetraedru $ABCD$. Muchia AB are lungimea a, muchia CD are lungimea b. Distanța dintre dreptele AB și CD este d, măsura unui unghi dintre aceste drepte este ω. Tetraedrul este împărțit în două părți printr-un plan R, paralel cu muchiile AB și CD. Să se determine raportul volumelor acestor două părți dacă este cunoscut raportul k al distanțelor dreptelor AB și CD la planul R.

Prima soluție (dată de *L. Bucur* și *O, Bîscă*).

Fie M, N, P, Q intersecțiile planului R (paralel cu AB și CD) respectiv cu muchiile BC, BD, AD, AC.

Rezultă imediat că patrulaterul $MNPQ$ est un paralelogram iar cele două corpuri (în care s-a împărțit tetraedrul) sînt trunchiuri de prismă.

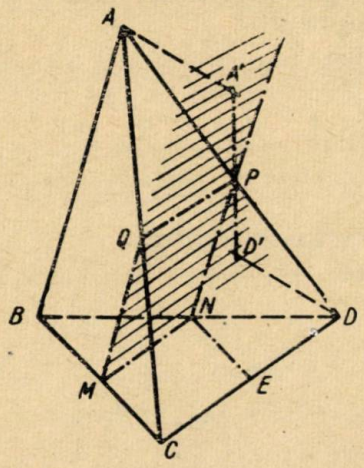


Fig. 1

Se știe că volumul unui astfel de corp este dat de relația

$$V = \frac{1}{3}(m_1 + m_2 + m_3)s$$

unde m_1, m_2, m_3 sînt lungimile muchiilor iar s aria unei secțiuni drepte. Notînd cu V_1 și V_2 volumele corpurilor $ABMNPQ$, $CDMNPQ$, raportul cerut se scrie:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{AB + MQ + NP}{CD + MN + PQ} \cdot \frac{S_1}{S_2} = \frac{a + 2MQ}{b + 2MN} \cdot \frac{S_1}{S_2}.$$

S_1 este aria secțiunii drepte în primul trunchi de prismă, deci aria unui triunghi cu baza b_1 (distanța între MQ și NP) și înălțimea d_1 (distanța de la AB la planul R). Analog S_2. Așa dar

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{d_1 b_1}{d_2 b_2} = k\frac{b_1}{b_2}$$

În baza construcției, $\sphericalangle QMN = \omega$ așa că

$$b_1 = MN \sin\omega, \quad b_2 = MQ \sin\omega$$

și

$$\frac{V_1}{V_2} = k \cdot \frac{a + 2MQ}{b + 2MN} \cdot \frac{MN}{MQ}.$$

Raportul de asemănare a triunghiurilor CMQ și CBA este egal cu raportul distanțelor d_2 și d așa că rezultă

$$MQ = a\frac{d_2}{d}$$

și în mod analog

$$MN = b\frac{d_1}{d}.$$

Din relațiile $\frac{d_1}{d_2} = k$ și $d_1 + d_2 = d$, se obține

$$\frac{d_1}{d_1 + d_2} = \frac{k}{k+1}, \quad \frac{d_1 + d_2}{d_2} = k + 1.$$

Raportul cerut se scrie succesiv

$$\frac{V_1}{V_2} = k\frac{a + 2a\frac{d_2}{d}}{b + 2b\frac{d_1}{d}} \cdot \frac{bd_1}{ad_2} = k\frac{1 + \frac{2}{k+1}}{1 + \frac{2k}{k+1}} \cdot k = \frac{k^2(k+3)}{3k+1}.$$

A doua soluție (dată de *Al. Bădescu* și *D. Voiculescu*).

Pentru a calcula volumul v al piramidei $ABCD$ în funcție de a, b, d și ω, se duc segmentele DT și CR, paralele și egale cu AB.

Rezultă că volumul prismei triunghiulare $BCDART$ este $3v$ iar volumul piramidei paralelogramice $ACDRT$ este $2v$. Aria paralelogramului $CDRT$ fiind $ab\sin\omega$, rezultă

$$2v = \frac{1}{3} ab\sin\omega \cdot d$$

(căci înălțimea piramidei $ACDRT$ este egală cu distanța între dreptele AV și CD). Așa dar

$$v = \frac{1}{6} abd \sin\omega.$$

Pentru a calcula volumul V_1 al corpului $ABMNPQ$ este suficient a calcula volumele V_3 și V_4 ale piramidelor $BMNPQ$ respectiv $BAPQ$, deoarece $V_1 = V_3 + V_4$.

$$\text{Însă } V_3 = \frac{1}{3} MN \cdot MQ\sin\omega \cdot h_1, \quad V_4 = \frac{1}{3} S_{APQ} \cdot h_2,$$

unde h_1 este depărtarea lui B de planul R, iar h_2 este depărtarea lui B de planul ACD.

Fie A' și D' picioarele perpendicularelor duse din A și D pe planul R. Planul determinat de paralele AA' și DD' conține dreapta AD și deci AA' trece prin P. După notația din soluția precedentă $AA' = d_1$, $DD' = d_2$. Din asemănarea triunghiurilor $AA'P$ și $DD'P$ rezultă

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{AP}{DP} = k \text{ și } \frac{d_1}{d} = \frac{AP}{AD} = \frac{k}{k+1}.$$

Din asemănarea triunghiurilor AQP și ACD rezultă

$$\frac{QP}{CD} = \frac{AP}{AD} = \frac{k}{k+1} \text{ și } \frac{S_{APQ}}{S_{ACD}} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^2$$

așa că

$$V_4 = \frac{1}{3} S_{ACD} \left(\frac{k}{k+1}\right)^2 \cdot h_2 = \left(\frac{k}{k+1}\right)^2 v = \frac{1}{6} \frac{k^2}{(k+1)^2} abd \sin\omega.$$

Din asemănarea triunghiurilor BMN și BCD rezultă

$$\frac{MN}{CD} = \frac{BM}{BC} = \frac{d_2}{d} = \frac{1}{k+1}; \quad MN = \frac{b}{k+1}.$$

Din asemănarea triunghiurilor CMQ și CBA rezultă

$$\frac{MQ}{AB} = \frac{CM}{CB} = \frac{d_1}{d} = \frac{k}{k+1}; \quad MQ = \frac{ak}{k+1},$$

iar $h_1 = d_1 = \frac{kd}{k+1}$,

așa că $V_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{k^2}{(k+1)^3} \cdot abd\sin\omega$.

Prin urmare $V_1 = \frac{1}{6} \frac{k^2(k+3)}{(k+1)^3} abd\sin\omega$.

Deoarece $V_1 + V_2 = v$, rezultă

$$V_2 = v - V_1 = \frac{1}{6} abd\sin\omega - \frac{1}{6} \cdot \frac{k^2(k+3)}{(k+3)^2} abd\sin\omega$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{3k+1}{(k+1)^3} abd\sin\omega,$$

așa că $\frac{V_1}{V_2} = \frac{k^2(k+3)}{3k+1}$.

A treia soluție (schițată)

La soluția a doua s-a găsit

$$S_{MNPQ} = MQ \cdot NM \sin\omega = \frac{a}{k+1} \cdot \frac{bk}{k+1} \sin\omega.$$

Dacă se notează $d_1 = x$ atunci $d_2 = d - x$ și aria paralelogramului $MNPQ$ devine

$$S_{MNPQ} = \frac{ab\sin\omega}{d^2} x(d-y).$$

Volumul V_1 se poate obține cu ajutorul unei integrale:

$$V_1 = \int_0^x \frac{ab\sin\omega}{d^2} z(d-z)dz = \frac{ab\sin\omega}{d^2} \left(\frac{dx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)$$

(s-a notat cu z variabila de integrare). V_2 se obține din V_1 înlocuind pe x cu $d - x$:

$$V_2 = \frac{ab\sin\omega}{6d^2} (d-x)^2(d+2x) = \frac{ab\sin\omega}{6d^2} (2x^3 - 3dx^2 + d^3).$$

Înlocuind $x = d_1 = \frac{kd}{k+1}$ și făcînd calculele se obține

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{k^2 d^2}{(k+1)^2}\left(3d - \frac{2k}{k+1} d\right)}{d^3\left(\frac{2k^3}{(k+1)^3} - \frac{3k^2}{(k+1)^2} + 1\right)} = \frac{k^2(k+3)}{3k+1}.$$

Observații. 1°. Deși au fost foarte vii discuțiile cu privire la acceptarea acestei probleme, ea a ridicat mai puține greutăți decît se așteptau unii profesori. Astfel, 30 elevi au obținut cîte 8 puncte, 3 cîte 7 puncte, 2 cîte 6 puncte iar 20 zero puncte, 10 cîte un punct, 8 cîte doua puncte.

Elevii noștri au obținut: patru cîte 8 puncte, unul 6 puncte, doi cîte 5 puncte, unul 2 puncte.

2°. Față de soluțiile prezentate mai sus, elevii au dat unele variante. Se pot cita astfel:

— calculul lui V_1 ca o diferență între volumul unei prisme (cu muchiile paralele și egale cu AB și cu baza BMN) și al unei piramide (cu vîrful în A și cu baza $QPQ'P'$, unde Q' și P' aparțin dreptelor MQ și NP iar AQ' și AP' sînt paralele cu BM, respectiv BN);

— calculul lui V_2 ca o sumă între volumul unei prisme (cu muchiile paralele cu MN și baza MCQ) și al unei piramide (cu vîrful în D și baza PNE, unde $CE = MN$).

Dintre lipsurile semnalate se pot cita:

— indicarea corectă a calculelor necesare, fără a le efectua și deci neobținerea rezultatului;

— calculul ariei unei secțiuni drepte (în prisma de la prima variantă citată mai sus) fără a ține seama de faptul că intervine și unghiul ω);

— neatenția la calcule conduce la rezultate parțiale greșite. *(urmare în nr. viitor)*

6. Asupra ariei unui poligon

Este cunoscută expresia ariei unui triunghi în funcție de coordonatele vîrfurilor :

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)] \quad (1)$$

care se găsește luînd $\frac{1}{2}$ din produsul dintre lungimea unei laturi și distanța de la vîrful opus la această latură. Arătăm acum o altă cale care duce la (1).

Figura 1 ne dă :

aria ABC = aria $ABB'A'$ + aria $BCC'B'$ − aria $ACC'A'$; analitic avem :

$$\frac{(y_1+y_2)(x_2-x_1)}{2}+\frac{(y_2+y_3)(x_3-x_2)}{2}-\frac{(y_1+y_3)(x_3-x_1)}{2} = \text{aria } ABC \quad (2)$$

Dezvoltînd și reducînd termenii asemenea, ajungem la (1), dacă se ia semnul minus în fața fracției $\frac{1}{2}$. Trebuie remarcat că determinantul din (1) este negativ fiindcă literele A, B, C puse în vîrfurile triunghiului pe fig. 1, urmează sensul negativ, cunoscut astfel și în trigonometrie.

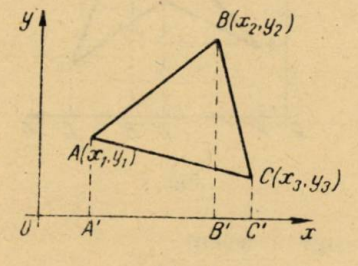


Fig. 1

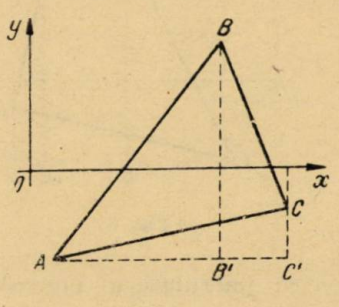


Fig. 2

Am folosit aci o sumă și o diferență de arii ale unor trapeze.

În unele cazuri folosim și arii de triunghiuri. De exemplu, în fig. 2, avem :

aria ABC = aria ABB' + aria $BCC'B'$ − aria ACC', unde $AB'C'$ este paralelă cu Ox. Analitic avem :

$$\frac{(y_1+y_2)(x_2-x_1)}{2}+\frac{(2y_1+y_2-y_3)(x_3-x_2)}{2}-\frac{(y_1-y_3)(x_3-x_1)}{2} = \text{aria } ABC.$$

Aci am luat ordonatele vîrfurilor A și C în valoare absolută : dacă însă trecem aceste ordonate în valoarea lor algebrică, găsim rezultatul de la (2).

Aria patrulaterului. Fie patrulaterul cu vîrfurile $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, $D(x_4, y_4)$ și A', B', C', D = proiecțiile vîrfurilor pe axa Ox (fig. 3).

Aria $ABCD$ = aria $ABB'A$ + aria $BCC'B'$ − aria $ADD'A$ − aria $DCC'D'$, adică

$$\frac{(y_1 + y_2)(x_2 - x_1)}{2} + \frac{(y_2 + y_3)(x_3 - x_2)}{2} -$$

$$- \left[\frac{(y_1 + y_4)(x_4 - x_1)}{2} + \frac{(y_4 + y_3)(x_3 - x_4)}{2}\right].$$

Făcînd calculele și simplificările, găsim expresia :

$$\frac{1}{2}[x_1(y_4 - y_2) + x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_2 - y_4) + x_4(y_3 - y_1)] \qquad (3)$$

care este echivalentă cu :

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} - \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}$$ ceea ce concordă cu fig. 3.

deoarece aria $ABCD$ = aria ACB − aria ACD.

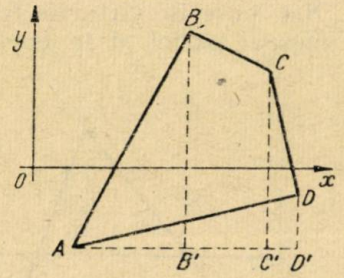


Fig. 3

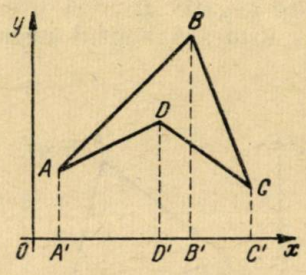


Fig. 4

Pentru patrulaterul concav din fig. 4 avem :

$$\text{aria } ABCD = \frac{AB' \cdot BB'}{2} + \frac{BB' + CC'}{2} \cdot B'C' +$$

$$\frac{CC' + DD'}{2} \cdot C'D' - \frac{AD' \cdot DD'}{2}$$

și înlocuind $AB' = x_2 - x_1$; $BB' = y_2 - y_1$, ... găsim expresia (3)

Observare. În toate cazurile de mai sus, am proiectat vîrfurile poligonului pe axa Ox sau pe o paralelă la Ox. Rezultatele ar fi aceleași dacă proiecțiile s-ar face pe axa Oy.

Generalizarea expresiei (3). Fie poligonul cu vîrfurile $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, ..., $A_n(x_n, y_n)$.

$$\text{Aria } (A_1A_2 \ldots A_n) = \frac{1}{2}[x_1(y_n - y_2) + x_2(y_1 - y_3) +$$

$$+ x_3(y_2 - y_4) + \ldots + x_n(y_{n-1} - y_1)]$$

Dacă aplicăm această formulă exagonului regulat $A_1(0, 0)$; $A_2(-a, 0)$; $A_3\left(\frac{3a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$... găsim rezultatul cunoscut $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$.

Corneliu Georgescu, Craiova

---

7. Asupra împărțirii unui polinom prin $(x^k + 1)$

Să considerăm polinomul:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

care se mai poate scrie:

$$f(x) = (a_n + a_{n-k}x^k + a_{n-2k}x^{2k} + a_{n-3k}x^{3k} + \ldots) + x(a_{n-1} +$$

$$+ a_{n-1-k}x^k + a_{n-1-2k}x^{2k} + a_{n-1-3k}x^{3k} + \ldots) +$$

$$+ x^2(a_{n-2} + a_{n-2k}x^k + a_{n-2-2k}x^{2k} + a_{n-2-3k}x^{3k} + \ldots) +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ x^{k-1}(a_{n+1-k} + a_{n+1-2k}x^k + a_{n+1-3k}x^{2k} + \ldots)$$

sau încă:

$$f(x) = P_0(x^k) + xP_1(x^k) + x^2P_2(x^k) + \ldots + x^{k-1}P_{k-1}(x^k)$$

unde $P_i(x^k)$ sînt polinoame întregi în raport cu x^k, pentru $i = 0, 1, 2, \ldots, k-2, k-1$.

Notăm $x^k = t$ și împărțim $P_i(t)$ prin $t + 1$. Avem:

$$P_i(t) = (t + 1)Q_i(t) + P_i(-1)$$

unde $Q_i(t)$ sînt niște polinoame întregi în raport cu t.

Înlocuind din nou $t = x^k$ obținem:

$$P_i(x^k) = (x^k + 1) \cdot Q_i(x^k) + P_i(-1)$$

Înlocuind $P_i(x^k)$ în expresia lui $f(x)$, care se mai scrie:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k-1} x^i \cdot P_i(x^k)$$

obținem:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k-1} x^i[(x^k + 1)Q_i(x^k) + P_i(-1)] =$$

$$= (x^k + 1) \cdot \sum_{i=0}^{k-1} x^i Q_i(x^k) + \sum_{i=0}^{k-1} x^i P_i(-1).$$

Din această relație se vede că restul împărțirii unui polinom $f(x)$ prin $x^k + 1$ are forma :

$$R = \sum_{i=0}^{k-1} x^i \cdot P_i(-1) = P_0(-1) + xP_1(-1) +$$

$$+ x^2P_2(-1) + \ldots + x^{k-1}P_{k-1}(-1).$$

Deci, restul împărțirii unui polinom $f(x)$ prin $x^k + 1$ se obține înlocuind pe x^k prin -1 în cele k polinoame $P_i(x^k)$, unde

$$P_i(x^k) = a_{n-i} + a_{n-i-k}x^k + a_{n-i-2k}x^{2k} + \ldots$$

ceea ce revine la a înlocui în $f(x)$ pe :

$$x^k = -1\,;\ x^{2km} = +1\,;\ x^{2km+1} = x\,;\ x^{2km+2} = x^2\,;\ \ldots\,;$$

$$x^{2km+k-1} = x^{k-1}\,;\ x^{2km+k} = -1\,;\ x^{2km+k+1} = -x\,;$$

$$x^{2km+k+2} = -x^2\,;\ \ldots\,;\ x^{2km+k+k-1} = x^{2km+2k-1} = -x^{k-1}.$$

Să găsim acum, condițiile ca un polinom $f(x)$ să se dividă cu $x^k + 1$ Pentru aceasta vom pune condițiile ca restul să fie egal cu zero, deci :

$$R = \sum_{i=0}^{k-1} x^i P_i(-1) = \sum_{i=0}^{k-1} x^i(a_{n-i} - a_{n-i-k} + a_{n-i-2k} - \ldots) = 0$$

Pentru aceasta trebuie să fie satisfăcute relațiile :

$$a_{n-i} - a_{n-i-k} + a_{n-i-2k} - a_{n-i-3k} + \ldots = 0$$

în care $i = 0, 1, 2, .., k-1$, și care se mai scriu :

$$\sum_{r=0}^{M} a_{n-i-2rk} = \sum_{s=0}^{N} a_{n-i-(2s+1)k}$$

sau sub forma

$$\sum_{l=0}^{P} (-1)^l a_{n-i-lk} = 0$$

unde M, N, P reprezintă părțile întregi respectiv ale fracțiilor :

$$\frac{n-i}{2k},\ \frac{n-i-k}{2k},\ \frac{n-i}{k}.$$

Observare. — Pentru $k = 2$ obținem exercițiul 18, pag. 99, din Algebra de cl. X reală.

Grecu I. Eftimie, asistent I.P. București

8. Generalizarea problemelor 6321, 5877, 4754, 4412, 6641 şi 5944

În cele ce urmează vom presupune că $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt numere reale pozitive.

1. Dacă suma lor $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a$ este constantă, atunci suma puterilor de ordinul k ale celor n numere este minimă în cazul cînd numerele sînt egale : $x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k \geqslant \frac{a^k}{n^{k-1}}$.

Demonstraţie. Pentru $n = 2$, fie $x_1 + x_2 = a$ sau $\frac{2x_1}{a} + \frac{2x_2}{a} = 2$ sau notînd $\frac{2x_1}{a} = u, \frac{2x_2}{a} = v$; $u + v = 2$.

Notînd $u = 1 + \alpha$, $v = 1 - \alpha$, avem :

$$u^k + v^k = 2(1 + C_k^2 \alpha^2 + C_k^4 \alpha^4 + \ldots) \geqslant 2 \text{ sau : } \left(\frac{2x_1}{a}\right)^k + \left(\frac{2x_2}{a}\right)^k \geqslant 2$$

sau : $x_1^k + x_2^k \geqslant 2\frac{a^k}{2^k}$, cu egalitate pentru $\alpha = 0$, regăsim problema 6321.

Pentru n oarecare să presupunem, prin absurd, că expresia $\sum_{i=1}^{n} x_i^k$ este minimă pentru valori ale numerelor x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ care nu sînt toate egale, de exemplu, $x_1 \neq x_2$. În acest caz, păstrînd suma $x_1 + x_2$ constantă, expresia $x_1^k + x_2^k$ poate fi micşorată făcînd $x_1 = x_2$. Rezultă că şi expresia $\sum_{i=1}^{n} x_i^k$ va fi micşorată, deci va deveni mai mică decît valoarea minimă presupusă.

Această contradicţie ne duce la concluzia că expresia $\sum_{i=1}^{n} x_i^k$ este minimă pentru $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{a}{n}$, deci $\sum_{i=1}^{n} x_i^k \geqslant n\frac{a^k}{n^k}$.

2. Dacă $x_1 + x_2 + \ldots + x = a$, atunci $\sqrt[k]{x_1} + \sqrt[k]{x_2} + \ldots + \sqrt[k]{x_n} \leqslant$ $\leqslant n\sqrt[k]{\frac{a}{n}}$.

Demonstraţie. Presupunînd prin absurd că $\sqrt[k]{x_1} + \sqrt[k]{x_2} + \ldots + \sqrt[k]{x_n} =$ $= b > n\sqrt[k]{\frac{a}{n}}$, conform punctului precedent rezultă că :

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqslant n\frac{b^k}{n^k} > n\frac{n^k\frac{a}{n}}{n^k} = a, \text{ ceea ce contrazice ipoteza.}$$

Rămîne deci posibilă doar alternativa

$$\sqrt[k]{x_1} + \sqrt[k]{x_2} + \ldots + \sqrt[k]{x_n} \leqslant n\sqrt[k]{\frac{a}{n}}.$$

Pentru $n = 3$, $k = 2$, $a = 1$ se obține problema 5877. Pentru $k = 2$, $a = 0$ se obține problema 4754.

3. Dacă $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a$, atunci

$$\sum \frac{1}{x_1^k x_2^k \ldots x_p^k} \geqslant C_n^p \left(\frac{n^k}{a^k}\right)^p,$$

unde $p \leqslant n$.

Demonstrație. Produsul termenilor din suma $\sum \frac{1}{x_1^k x_2^k \ldots x_p^k}$ este $b = \left(\frac{1}{x_1^k x_2^k \ldots x_p^k}\right)^{C_{n-1}^{p-1}}$ deoarece numărul termenilor este C_n^p, dintre care C_{n-1}^{p-1} conțin pe x_1^k.

Dar rezultă, conform unei teoreme cuonscute — *Dacă suma a n numere pozitive este constantă, atunci produsul lor este maxim cînd nnmerele sînt egale deci* $x_1 x_2 \ldots x_n \leqslant \frac{a^n}{n^n}$. Inversînd și ridicînd la puterea $k.C_{n-1}^{p-1}$ obținem :

$$\left(\frac{1}{x_1^k x_2^k \ldots x_p^k}\right)^{C_{n-1}^{p-1}} = b \geqslant \left(\frac{n^n}{a^n}\right)^{kC_{n-1}^{p-1}}.$$

Este cunoscută teorema : *Dacă produsul a n numere pozitive este constant (în cazul nostru b) atunci suma lor este minimă cînd termenii sînt egali.*

Rezultă că $\sum \frac{1}{x_1^k x_2^k \ldots x_p^k} \geqslant C_n^p \sqrt[C_n^p]{b} \geqslant C_n^p \sqrt[C_n^p]{\left(\frac{n}{a}\right)^{nkC_{n-1}^{p-1}}}$.

Dar $C_{n-1}^{p-1} = \frac{p}{n} C_n^p$, deci

$$\sum \frac{1}{x_1^k x_2^k \ldots x_p^k} \geqslant C_n^p \sqrt[C_n^p]{\left(\frac{n}{a}\right)^{kpC_n^p}} = C_n^p \left(\frac{n}{a}\right)^{kp}.$$

Pentru $p = 1$, $a = 1$ și $k = 1$ se obține $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} \geqslant n^2$ deci problema 3412 generalizată.

Pentru $n = 3$, $p = 1$, $a = 1$ și $k = \frac{1}{2}$ se obține problema 6641.

4. *Generalizarea problemei 5944.* Dacă $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a$ atunci $E = \left(\frac{1}{x_1^k} + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{x_2^k} + 1\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{x_n^k} + 1\right) \geqslant \left(\frac{n^k}{a^k} + 1\right)^n$

Demonstrație. Efectuînd produsul expresia devine :

$$E = \frac{1}{x_1^k x_2^k \ldots x_n^k} + \sum \frac{1}{x_1^k x_2^k \ldots x_{n-1}^n} + \ldots + \sum \frac{1}{x_1^k x_2^k} + \sum \frac{1}{x_1^k} + 1$$

Micșorînd fiecare termen conform problemei precedente rezultă :

$$E \geqslant \left(\frac{n^k}{a^k}\right)^n + C_n^{n-1} \left(\frac{n^k}{a^k}\right)^{n-1} + \ldots + C_n^2 \left(\frac{n^k}{a^k}\right)^2 + C_n^1 \left(\frac{n^k}{a^k}\right)^1 + 1, \text{ sau } E \geqslant \left(\frac{n^k}{a^k} + 1\right)^n.$$

Pentru $n = 2$, $k = 1$, $a = 1$ se obține problema 5944.

Petre Liviu, Tîrgoviște

9. Asupra problemei 6663

Enunțul problemei 6663 rezolvată în *G.M.-B*, 9/1965 este următorul : În triunghiul ABC inegalitatea $a > b$ implică $a + h_a \geqslant b + h_b$. În ce caz avem egalitate?

Vom da o altă soluție și apoi o generalizare.

Din relația $ah_a = bh_b = 2S$ (1), se deduce

$$\frac{a}{b} = \frac{h_b}{h_a} = \frac{a-h_b}{b-h_a} \tag{1'}$$

și din ipoteza $a > b$, adică $\frac{a}{b} > 1$, rezultă

$$a - h_b > b - h_a \text{ sau } a + h_a > b + h_b \tag{2}$$

dacă $a - h_b > 0$ și $b - h_b > 0$.

Egalitatea $a - h_b = b - h_a$ nu poate avea loc, decît în cazul cînd $a - h_b = 0$ și $b - h_a = 0$. Aceasta implică $a = h_b$ și $b = h_a$, adică triunghiul să fie dreptunghic ($C = 90°$).

Generalizarea. Ridicînd relația (2) la pătrat obținem

$$a^2 + 2ah_a + h_a^2 > b^2 + 2bh_b + h_b^2$$

și suprimînd termenii egali, $2ah_a = 2bh_b$, avem

$$a^2 + h_a^2 > b^2 + h_b^2. \tag{3}$$

O nouă ridicare la pătrat aplicată relației (3) ne dă

$$a^4 + h_a^4 + 2a^2h_a^2 > b^4 + h_b^4 + 2b^2h_b^2$$

și suprimînd termenii egali, conform relației (1) avem

$$a^4 + h_a^4 > b^4 + h_a^4. \tag{4}$$

Putem demonstra prin inducție matematică, că

$$a^{2^n} + h_a^{2^n} > b^{2^n} + h_b^{2^n} \tag{5}$$

Într-adevăr, presupunem că avem

$$a^{2^{n-1}} + h_a^{2^{n-1}} > b^{2^{n-1}} + h_b^{2^{n-1}}$$

relație care este verificată pentru $n = 1$.

Ridicînd la patrat relația precedentă avem

$$a^{2^n} + h_a^{2^n} + 2\ (ah_a)^{2^{n-1}} > b^{2^n} + h_b^{2^n} + 2(bh_b)^{2^{n-1}}$$

iar prin suprimarea termenilor egali se obține tocmai relația (5).

Observație. Relația $a > b$ nu implică relația $a^n + h_a^n > b^n + h_b^n$ și nu implică nici relația $a^{2^n} + h_a^{2^n} > b^{2^n} + h_b^{2^n}$.

Luăm exemplele : 1) $a = 10$; $h_a = 3$; $b = 6$; $h_b = 5$.

2) $a = \frac{1}{2}$; $h_a = \frac{2}{5}$; $b = \frac{1}{5}$; $h_b = 1$.

Calculăm pentru fiecare caz : $a^3 + h_a^3$; $b^3 + h_b^3$ și $a^6 + h_a^6$; $b^6 + b_b^6$ și vom vedea că sensurile inegalităților nu rămîn aceleași.

Theodor Theodoridis, București

REZULTATUL ÎNTRECERII ÎNTRE LICEELE DIN ȚARĂ PRIVIND ACTIVITATEA ȘCOLARĂ LA MATEMATICĂ ÎN ANUL 1965

La întrecerea din anul 1965 s-au primit fișele cu punctajul obținut, conform regulamentului întrecerii, de la 55 licee din țară.

I. Pentru activitatea extrașcolară raportată la numărul de clase medii din licee se premiază următoarele licee :

1. Liceul 1, I. L. Caragiale din Ploiești cu 18 clase ; 2. Liceul din Trușești, Suceava, cu 4 clase ; 3. Liceul 3 C. Negruzzi din Iași cu 8 clase ; 4. Liceul 2 din Sibiu cu 4 clase ; 5. Liceul 3 din Sibiu cu 14 clase ; 6. Liceul 1 din Lugoj cu 7 clase ; 7. Liceul 8 N. Bălcescu din Cluj cu 9 clase ; 8. Liceul 3 din Bîrlad cu 4 clase ; 9. Liceul 1 N. Grigorescu din Cîmpina cu 8 clase ; 10. Liceul 2 din Ploiești cu 25 clase ; 11. Liceul 1 din Pucioasa cu 11 clase ; 11. Liceul 1 din Hunedoara cu 11 clase ; 13. Liceul 4 E. Racoviță din Cluj cu 4 clase ; 14. Liceul 2 Frații Buzești din Craiova cu 19 clase ; 15. Liceul 2 din Bîrlad cu 5 clase ; 16. Liceul 10, din București cu 7 clase ; 17. Liceul 1 Traian din Tr. Severin cu 16 clase ; 18. Liceul 1 din Tg. Jiu cu 18 clase ; 19. Liceul 1 Gh. Lazăr din Sibiu cu 10 clase ; 20. Liceul 1 din Buzău cu 5 clase ; 21. Liceul 1 din Răcari, București, cu 10 clase ; 22. Liceul 4 din Brașov cu 10 clase ; 24. Liceul 1 N. Bălcescu din Craiova cu 21 clase ; 25. Liceul 1 din Caransebeș, cu 6 clase.

Se menționează următoarele licee :

1. Liceul 2 din Timișoara cu 9 clase ; 2. Liceul din Fieni, Tîrgoviște, cu 2 clase ; 3. Liceul din Mehadia, Banat, cu 3 clase ; 4. Liceul 1 N. Bălcescu din R. Vîlcea, cu 17 clase ; 5. Liceul 17 Matei Basarab din București cu 23 clase ; 6. Liceul 1 N. Bălcescu din București, cu 26 clase ; 7. Liceul 12 Spiru Haret din București cu 15 clase ; 8. Liceul din Orșova cu 4 clase ; 9. Liceul militar din Breaza cu 22 clase ; 10. Liceul din Sinaia cu 5 clase ; 11. Liceul din Prundul Bîrgăului, Cluj cu 4 clase ; 12. Liceul 22 Gh. Lazăr din București cu 23 clase ; 13. Liceul Mihai Viteazu din București cu 24 clase ; 14. Liceul 1 din Satu Mare cu 21 clase ; 15. Liceul 1 Mircea cel Bătrîn din Constanța cu 14 clase ; 16. Liceul 1 din Baia Mare cu 16 clase.

Regulamentul întrecerii pe anul 1966.

Se consideră înscrise la întrecere, liceele din țară care trimit redacției „Gazetei matematice" seria B, fișe cu totalizarea punctelor obținute, *specificînd și numărul de clase medii (IX, X, reală și XI reală) din anul școlar 1965—66.*

Regulamentul întrecerii are următorul punctaj :

a) Cîte un punct de fiecare problemă rezolvată și anunțată la rubrica rezolvitorilor în cele 12 numere ale G.M.-B pe 1966,

b) Cîte 10 puncte de fiecare evidențiere a elevilor școlii pe 1966,

c) cîte un punct de fiecare elev al școlii participant la faza locală a concursului de matematică din 1966,

d) Cîte 10 puncte de fiecare elev al școlii participant la faza regională a concursului,

e) cîte 30 de puncte de fiecare elev al școlii participant la faza finală, (pe țară),

f) cîte 50 de puncte de fiecare elev al școlii reușit la faza finală cu premiu sau mențiune,

g) cîte un punct de fiecare elev abonat la G.M.-B pe 1966,

h) cîte 5 puncte de fiecare ședință de cerc de matematică.

Fișa cu punctajul obținut de școala medie respectivă va avea viza direcției și ștampila școlii, va fi semnată de profesorii de matematică care au condus cercurile de elevi și va trimite apoi redacției G.M.-B, în prima săptămînă după apariția numărului 12/1966 al G.M.-B.

La clasificarea elevilor se va ține seama de numărul de clase medii pe care le-a avut școala în anul 1965—1966.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 7007

Dacă n este natural, atunci $E=(2n+1)^{n+2}+(2n+2)^{2n+1}$ *se divide cu* $(2n+1)^2+(2n+2)$.

Soluție dată de *A. Viorel*, elev Galați.

$$E=(2n+1)^2(2n+1)^n+(2n+2)\,[(2n+1+1)^2]^n=(2n+1)^2(2n+1)^n+(2n+2)\cdot[(2n+1)^2+2n+2+2n+1)]^n \text{ sau :}$$

$$E=(2n+1)^2(2n+1)^n+(2n+2)\{\mathfrak{M}\,[(2n+1)^2+2n+2]+(2n+1)^n\}=(2n+1)^2(2n+1)^n+(2n+2)\,(2n+1)^n+\mathfrak{M}\,[(2n+1)^2+2n+2]=(2n+1)^n[(2n+1)^2+2n+2]+\mathfrak{M}\,[(2n+1)^2+2n+2]=\mathfrak{M}\,[(2n+1)^2+(2n+2)]$$

Generalizare. Să dovedim că :

$E=a^{n-1}\cdot x^{n+2}+(x+a)^{2n+1}$ se divide cu x^2+ax+a^2.

Expresia E se scrie succesiv :

$$E=a^{n-1}\cdot x^{n+2}+(x+a)\,[(x+a)^2]^n=a^{n-1}\cdot x^{n+2}+(x+a)\,(x^2+ax+a^2+ax)^n=a^{n-1}\cdot x^{n+2}+\mathfrak{M}\,(x^2+ax+a^2)+a^nx^n\,(x+a)=[a^{n-1}\cdot x^{n+2}+a^nx^n\cdot(x+a)]+\mathfrak{M}\,(x^2+ax+a^2=a^{n-1}\cdot x^n(x^2+ax+a^2)+\mathfrak{M}\,(x^2+ax+a^2)=\mathfrak{M}\,(x^2+ax+a^2).$$

Pentru $a=1$ și $x=2n+1$ obținem tocmai problema 7007.

Problema 7018

Să consideră sistemul

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2&=m^2-2m\\ x^3+y^3+z^3&=m^3-3m^2-3\\ xyz&=1 \end{aligned}$$

Să se arate că pentru orice $m\in\left(0,\frac{8}{3}\right)$ *sistemul nu admite soluții astfel încît* x, y, z *să fie simultan reale.*

Traian Cohal, profesor Iași

Soluție. Avem, ținînd cont de sistem :

$$x^3+y^3+z^3+3xyz=m^3-3m^2$$

$$(x+y+z)\,[x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)]=m^3-3m^2$$

$$(x+y+z)\left[x^2+y^2+z^2-\frac{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)}{2}\right]=m^3-3m^2$$

$$(x+y+z)\left[\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)-\frac{(x+y+z)^2}{2}\right]=m^3-3m^2$$

$$(x+y+z)\left[\frac{3}{2}(m^2-2m)-\frac{(x+y+z)^2}{2}\right]=m^3-3m^2.$$

Notăm $x + y + z = t$

Pentru determinarea lui t obținem următoarea ecuație

$$t^3 - 3m(m-2)t + 2m^2(m-3) = 0$$

sau

$$(t^3 - m^2t) - 2m(m-3)\,t + 2m^2(m-3) = 0$$

$$t(t-m)\,(t+m) - 2m(m-3)(t-m) = 0$$

$$(t-m)\,[t^2 - m - 2m(m-3)] = 0$$

$$t_1 = m$$

$$t_{2\,3} = \frac{m \pm \sqrt{9m^2 - 24m}}{2}$$

Dar pentru $m \in \left(0, \frac{8}{3}\right)$, $9m^2 - 24m < 0$.

Astfel problema găsirii soluțiilor în care x, y, z sînt simultan reale revine la studierea sistemului

$$\begin{cases} x + y + z = m \\ x^2 + y^2 + z^2 = m^2 - 2m \\ xyz = 1 \end{cases}$$

Acest sistem este echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} x + y + z = m \\ xy + yz + zx = m \\ xyz = 1 \end{cases}$$

pentru rezolvarea căruia va trebui să rezolvăm ecuația

$$u^3 - mu^2 + mu - 1 = 0$$

Soluțiile ecuației sînt

$$u_1 = 1$$

$$u_{2.3} = \frac{m - 1 \pm \sqrt{m^2 - 2m - 3}}{2}$$

dar pentru $m \in \left(0, \frac{8}{3}\right)$ avem $m^2 - 2m - 3 < 0$.

Deci pentru orice $m \in \left(0, \frac{8}{3}\right)$ sistemul inițial nu admite soluții astfel încît x, y, z să fie simultan reale.

Problema 7019

Să se arate că într-un octogon regulat $ABCDFGH$ există relațiile:

$$MC^2 - MD^2 = MD \cdot MB - MC \cdot ME,$$

$$ME^2 - MF^2 = MD \cdot MF - ME \cdot MG,$$

$$MG^2 - MH^2 = MH \cdot MF - MA \cdot MG,$$

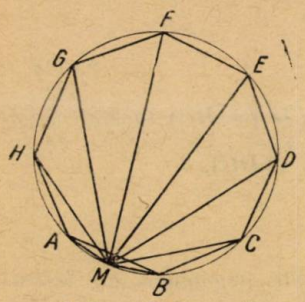
unde M este un punct oarecare pe arcul mic AB.

Antohi Ștefan student, Iași

Soluţie. Considerăm în cercul circumscris octogonului următoarele patrulatere inscriptibile :

$$MBCD,\ MCDE,\ MDEF,\ MEFG,\ MFGH,\ MGHA.$$

Aplicînd teorema lui Ptolomeu în fiecare din aceste patrulatere obţinem relaţiile :



$$MC \cdot DB = DC \cdot MB + BC \cdot MD;$$
$$MD \cdot CE = ED \cdot MC + DC \cdot ME;$$
$$ME \cdot DF = MD \cdot EF + ED \cdot MF;$$
$$MF \cdot EG = ME \cdot GF + FF \cdot GM;$$
$$MG \cdot HF = MF \cdot HG + GH \cdot AM;$$
$$MH \cdot GA = MA \cdot HG + AH \cdot GM.$$

Ţinînd seama de egalitatea laturilor octogonului, şi a laturilor pătratului înscris, făcînd raportul relaţiilor două cîte două, obţinem :

$$\frac{MC}{MD} = \frac{MB + MD}{MC + ME};\ \frac{ME}{MF} = \frac{MD + MF}{ME + MG};\ \frac{MG}{MH} = \frac{MF + MH}{MA + MG},$$

de unde se obţin relaţiile cerute în problemă.

Problema 7022

Să se rezolve în numere întregi ecuaţia :

$$x^2y + y^2x - 2x - 2y - xy = 1.$$

Eugen Popa, elev Iaşi

Soluţia autorului. Ecuaţia se mai poate scrie :

$$(x + y - 1)\ (xy - 2) = 3$$

Deoarece x şi y trebuie să fie numere întregi, putem avea numai cazurile :

I $\quad x + y - 1 = 1;\ xy - 2 = 3.$

II $\quad x + y - 1 = 3;\ xy - 2 = 1.$

III $\quad x + y - 1 = -1;\ xy - 2 = -3.$

IV $\quad x + y - 1 = -3;\ xy - 2 = -1.$

Rezolvînd sistemele obţinute găsim soluţiile :

I $\quad x = 1 \pm 2i;\ y = 1 \pm 2i.$

II $\quad x = 3;\ x = 1;\ y = 1;\ y = 3.$

III $\quad x = 1;\ x = -1;\ y = -1;\ y = 1.$

IV $\quad x = -1 \pm i\sqrt{3};\ y = 1 \pm i\sqrt{3}.$

Convin numai soluţiile

x	3	1	1	-1
y	1	3	-1	1

care verifică ecuaţia dată.

Problema 7024

Se dă triunghiul ABC şi o dreaptă AD (D pe BC) astfel încît $A_{ADC} = \left(\frac{CD}{AC}\right)^2 \cdot A_{ABC}$; ($A_{ADC}$ fiind aria triunghiului ADC).

Să se arate că :

1°. $AC^2 = BC \cdot DC$; 2°. *Triunghiul CAD este asemenea cu triunghiul CBA*; 3°. $AD = \frac{AB \cdot AC}{BC}$.

Să se deducă construcţia dreptei AD şi să se arate că în acest caz proprietăţile de mai sus sînt adevărate.

Mihai Cocuz, Prisăcani, Iaşi

Soluţie. Cum triunghiurile CAD şi ABC au înălţimea din A comună rezultă că :

$\frac{A_{ADC}}{A_{ABC}} = \frac{CD}{BC}$. Conform ipotezei avem :

$\frac{CD^2}{AC^2} = \frac{CD}{BC}$ de unde $AC^2 = CD \cdot BC$.

Din această relaţie deducem :

$$\frac{AC}{BC} = \frac{DC}{AC}$$

Observăm că triunghiurile ACD şi BCA au un unghi comun — unghiul C — şi laturile care-l formează proporţionale, deci sînt asemenea.

Din proporţionalitatea laturilor

$$\frac{AC}{BC} = \frac{DC}{AC} = \frac{AD}{AB}; \text{ deducem } AD = \frac{AB \cdot AC}{BC}$$

Pentru a construi dreapta AD observăm că datorită asemănării avem $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ABC$.

Ducem dreapta AD astfel încît $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ABC$. Triunghiurile ADC şi ABC mai au unghiul C comun, deci sînt asemenea şi din proporţionalitatea laturilor se deduc şi proprietăţile 1°, 3° (similare cu ale catetei şi înălţimii triunghiului dreptunghic).

Problema 7027

Să se demonstreze inegalitatea

$(n+1)(n+2) \geqslant 3\sqrt[n]{(n!)^2(n+1)}$ *pentru orice n natural.*

Soluție și generalizare date de *Andrei Viorel*, absolvent Galați.

1. Considerăm inegalitatea

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \geqslant n\sqrt[n]{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n} \quad (\alpha_k \geqslant 0) \tag{1}$$

și identitatea :

$$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Vom face corespondențele : $\alpha_1 = 1\cdot 2$; $\alpha_2 = 2\cdot 3$; $\alpha_3 = 3.4$; ... ; $\alpha_n = n(n+1)$ și observăm că :

$$\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3\cdot\ldots\cdot\alpha_n = 1\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(n-1)n\cdot n(n+1) = (n!)^2(n+1)$$

Cu acestea, inegalitatea se scrie :

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{3} \geqslant n\sqrt[n]{(n!)^2(n+1)} \text{ sau } (n+1)(n+2) \geqslant 3\sqrt[n]{(n!)^2(n+1)}.$$

2. Folosim aceeași inegalitate, dar o identitate mai generală :

$$\frac{n(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+k+1)}{k+2} = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(k+1) + 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(k+2) + \ldots +$$
$$+ n(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k)$$

unde k ia valorile naturale, inclusiv zero.

Avem :

$$\alpha_1 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(k+1)\,;\ \alpha_2 = 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(k+2)\,;\ldots\,;$$
$$\alpha_n = n(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k)$$

și observăm că :

$$\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3\cdot\ldots\cdot\alpha_n = \prod_{p=1}^{n} p(p+1)\cdot\ldots\cdot(p+k)$$

deci, inegalitatea (1) se scrie :

$$\frac{(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+k+1)}{k+2} \geqslant \sqrt[n]{\prod_{p=1}^{n} p(p+1)\cdot\ldots\cdot(p+k)}.$$

Problema 7028

Să se determine laturile unui triunghi dreptunghic, știind că verifică o ecuație de forma $x^3 - 12x^2 + (50-\lambda)x - 20\lambda = 0$ *unde* λ *este un parametru.*

Ștefănescu Mirela, Iași

Soluție. Alături de relațiile

$$x_1 + x_2 + x_3 = 12,\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 50 - \lambda,\ x_1x_2x_3 = 20\lambda,$$

mai avem și : $x_1^2 = x_2^2 + x_3^2$.

Notînd $x_2 + x_3 = u$, $x_2x_3 = v$ avem :

$$x_1 + u = 12,\ x_1u + v = 50 - \lambda,\ x_1v = 20\lambda,\ x_1^2 = u^2 - 2v.$$

Prima ecuație ne dă $x_1 = 12 - u$ și ridicînd la pătrat obținem $x_1^2 = 144 - 24u + u^2$ și comparînd cu ultima deducem :

$$v = 12(u - 6).$$

Înlocuind această valoare în primele trei ecuații obținem :

$$x_1 + u = 12,\ x_1u + 12u = 122 - \lambda,\ 3x_1u - 18x_1 = 5\lambda.$$

Din prima relație scoatem $x_1 = 12 - u$ și introducînd în celelalte obținem :

$$u^2 - 24u + (122 - \lambda) = 0,$$
$$3u^2 - 54u + (4\lambda + 216) = 0.$$

Înmulțind prima ecuație cu 3 și scăzîndu-le obținem

$$u = \frac{75 - 4\lambda}{9}$$

Introducînd în prima ecuație această valoare obținem

$$16\lambda^2 + 183\lambda - 693 = 0$$

de unde $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = \frac{231}{16}$.

A doua rădăcină conduce însă la rădăcini negative deci nu este convenabilă.

Pentru $\lambda = 3$ obținem $u = 7$, $x_1 = 5$, $v = 12$.

Ținînd cont de semnificația lui u și v obținem $x_2 = 3$, $x_3 = 4$.

Problema 7029

Un gnomon de lungime l suferă o inclinație laterală α față de verticală, rămînînd perpendicular pe meridiana locului. a) *Să se determine diferența dintre lungimea umbrei gnomonului vertical și cea a gnomonului înclinat la o dată oarecare, pentru un loc de latitudine φ în momentul trecerii Soarelui la meridian.* b) *Care e înclinarea maximă admisă ca unghiul dintre umbre să nu depășească o valoare ε_0?* (Aplicație : 21 martie, $\varphi = 45°$; $l = 100$ cm, $\alpha = 2°$).

Viorel Vîlceanu, student Iași

Soluție.

Notații. G_1G_2 = gnomonul vertical, $G_1'G_2'$ = gnomonul oblic, α = unghiul dintre G_1G_2 și G_1G_2', G_3 = vîrful umbrei gnomonului G_1G_2, G_3' = vîrful umbrei gnomonului G_1G_2', δ = declinația Soarelui la momentul respectiv, φ = latitudinea locului, x, x' = lungimile celor două umbre, $\Delta x = x - x'$, ω = unghiul dintre umbre, l = lungimea gnomonului.

a) Considerînd razele Soarelui paralele avem

$$\sphericalangle G_1G_2G_3 = \sphericalangle G_1'G_3'G_1' = h$$

Se știe că pentru o localitate de latitudine φ, înălțimea deasupra orizontului (h) a Soarelui, în momentul trecerii la meridian e :

$$h = 90° - (\varphi - \delta).$$

Din triunghiul $G_1G_2G_3$, dreptunghic, putem scrie :

$$G_1G_3 = x = G_1G_2 \operatorname{ctg} h = l \operatorname{ctg} [90° - (\varphi - \delta)°] = l \operatorname{tg}(\varphi - \delta) \qquad (1)$$

Avem de asemenea

$$G_1'G_2' = l \cos \alpha.$$

Cum triunghiurile $G_1G_2G_3$ și $G_1'G_2'G_3'$ sînt asemenea, pe baza proporționalității laturilor putem scrie :

$$\frac{x'}{G_1'G_2'} = \frac{x}{G_1G_2}, \text{ de unde } x' = \frac{G_1'G_2'}{G_1G_2} x ;$$

rezultă

$$x' = \frac{l \cos \alpha \cdot l \operatorname{tg}(\varphi - \delta)}{l} = l \cos \alpha \operatorname{tg}(\varphi - \delta) \qquad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă acum :

$$x - x' = \Delta x = l \operatorname{tg}(\varphi - \delta) - l \cos \alpha \operatorname{tg}(\varphi - \delta) =$$

$$= l \operatorname{tg}(\varphi - \delta)(1 - \cos \alpha) = 2l \operatorname{tg}(\varphi - \delta) \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \qquad (3)$$

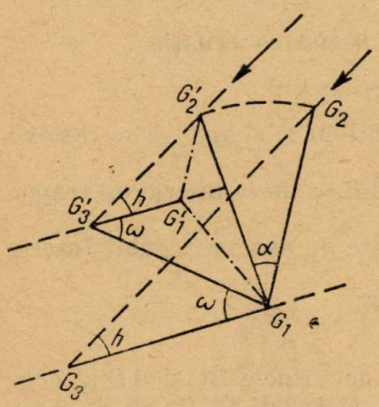


Fig. 3

b) Trebuie să avem

$$\omega \leqslant \varepsilon_0 \text{ sau } \operatorname{tg} \omega < \operatorname{tg} \varepsilon_0$$

Dar

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{G_1G_1'}{G_1'G_3'} = \frac{l \sin \alpha}{l \cos \alpha \operatorname{tg}(\varphi - \delta)} =$$

$$= \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg}(\varphi - \delta)$$

E necesar deci, ca :

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg}(\varphi - \delta) \leqslant \operatorname{tg} \varepsilon_0$$

adică :

$$\operatorname{tg} \alpha \leqslant \operatorname{tg} \varepsilon_0 \operatorname{tg}(\varphi - \delta) \qquad (4)$$

Aplicație :

a) Utilizăm (3). Avem : $\varphi - \delta = 45° - 0° = 45°$ $\operatorname{tg} 45° = 1$ și deci :

$$\begin{aligned} \log 2 &= 0{,}30103 \\ \log 100 &= 2{,}00000 \\ 2 \log \sin 1° &= \bar{4}{,}48372 \\ \hline \log \Delta x &= \bar{2}{,}78475 \\ \Delta x &= 0{,}06 \text{ cm} \end{aligned}$$

b) Utilizăm (4). Avem $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$ şi ne rămîne :

$$\operatorname{tg} \alpha \leqslant \operatorname{tg} \varepsilon_0$$

Deci

$$\alpha \leqslant \varepsilon_0 .$$

Observaţie : Pentru înclinarea de cealaltă parte a vetricalei, diferenţa între lungimile umbrelor e aceeaşi iar unghiul dintre umbre e acelaşi în valoare absolută.

CHESTIUNI DE EXAMEN

Probleme date la admiterea în Facultatea de matematică-mecanică a Universităţii din Timişoara, 1965.

7423. — Fiind dat polinomul

$$2x^5 - mx^4 + (1 - 2m)x^3 + (4 + m^2)x^2 - 3mx + 2m - 10$$

a) Să se determine m astfel ca acest polinom să se dividă cu $x^3 - mx + 2$;

b) Pentru ce valori ale lui x, cîtul şi împărţitorul astfel determinaţi vor fi egali ?

7424. —Se dă numărul $N = \dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i}$. Să se scrie sub formă trigonometrică şi apoi să se calculeze N^{200}.

7425. — Să se determine parametrul α astfel ca ecuaţia

$$2x^4 - 5x^3 + 2\alpha x^2 - 10x + 4 = 0$$

să aibă două rădăcini al căror produs să fie egal cu 1, şi apoi să se rezolve ecuaţia.

7426. — Într-un semicerc cu diametrul $AB = 2a$ se înscrie un trapez isoscel $ABCD$.

a) Să se arate că trapezul este o jumătate de exagon regulat înscris într-un cerc dacă

$$AC^2 + CD^2 = AB^2,$$

AC fiind diagonala trapezului.

b) Condiţia fiind îndeplinită, pe laturile neparalele BC şi AD se construiesc în exterior, triunghiurile echilaterale BMC şi AND. Să se arate că astfel s-a format un nou trapez isoscel şi să se determine lungimea diagonalelor lui.

c) Să se calculeze aria născută de linia mixtă $ANDCMB$ (DC fiind arcul de cerc), cînd se roteşte în jurul diametrului AB.

7427. — În raport cu un sistem ortogonal de axe se consideră punctele $P\,(2,0)$, $Q\,(0,1)$ şi dreapta (Δ) de ecuaţia $2x - 3y + 6 = 0$. Se cere :

a) Aria trapezului limitat de dreptele (PQ), (Δ), axa Ox şi paralela dusă la (PQ) prin punctul unde (Δ) taie axa Oy.

b) Ecuaţia dreptei simetrică cu (PQ) faţă de dreapta (Δ).

c) Ecuaţia cercului tangent în Q la dreapta (PQ) şi cu centrul pe (Δ).

7428. — Un vagon de tramvai avînd masa de 200 tone, trece pe un pod convex cu o viteză constantă de 36 km/h. Raza de curbură a podului este de 50 m. Să se determine :

a) Viteza unghiulară a tramvaiului ; b) Accelerația centripetă ; c) Forța de apăsare exercitată de tramvai asupra podului în timpul mersului.

7429. — Înălțimea imaginei unei clădiri proiectată cu ajutorul unui diascop este de 20 de ori mai mare decît înălțimea corespunzătoare de pe dispozitiv. Distanța dintre dispozitiv și ecran este de 5m. Să se determine :

a) Distanța dispozitivului față de obiectiv ; b) Distanța ecranului față de obiectiv ; c) Convergența obiectivului exprimată în dioptrii.

★

7430. Să se rezolve inecuația

$$\sqrt{x-2} > x - 4,$$

unde x este număr real.

Bacalaureat, Franța, iunie 1965

7431. Se consideră triunghiul oarecare ABC înscris într-un cerc (O), de centru O și rază R.

a) Să se demonstreze că punctul O este baricentrul punctelor A, B, C, afectate respectiv de coeficienții sin $2A$, sin $2B$ și sin $2C$.

b) Să se demonstreze că M fiind un punct oarecare ale cercului (O), expresia

$$f(M) = MA^2\sin 2A + MB^2\sin 2B + MC^2\sin 2C$$

are o valoare independentă de poziția punctului M și că S fiind aria triunghiului ABC, această valoare este egală cu $4S$.

Journal de mathématiques élémentaires, 1965

7432. a) Să se rezolve ecuația

$$2\cos^2 x + \sin 2x = 1.$$

Să se reprezinte pe cercul trigonometric extremitățile arcelor — soluții.

b) Să se rezolve inecuația

$$2\cos^2 x + \sin 2x \leqslant 1$$

Să se reprezinte pe cercul trigonometric extremitățile arcelor — soluții.

Bacalaureat, Clermont 1965

7433. Planul fiind raportat la un sistem de axe ortonormate $x'Ox$, $y'Oy$, se consideră punctele următoare : $A\,(+3, +2)$, $B\,(-4, -5)$, $C(-2, -7)$.

a) Să se formeze produsul scalar $\overline{BA} \cdot \overline{BC}$; b) Să se deducă de aci α) cosinusul unghiului ABC, și valoarea acestui unghi ; β) ecuația cercului circumscris triunghiului ABC ; γ) ecuația tangentei în A la cercul ABC.

Journal de mathématiques élémentaires, 1965

7434. Se dă în plan între afixele respective Z şi z, ale punctelor M şi m, relaţia

$$\frac{1}{Z-i} = 1 + \frac{1}{z-i}. \tag{1}$$

a) Să se exprime Z în funcţie de z, apoi z în funcţie de Z şi să se tragă de aci concluzia că (1) stabileşte între M şi m o transformare punctuală biunivocă (adică, că oricărui m îi corespunde un M şi numai unul singur şi invers). Să se determine punctul sau punctele duble ale acestei transformări.

b) Să se exprime coordonatele carteziene X, Y ale lui M în funcţie de cele x, y ale lui m. Să se rezolve problema inversă.

c) $M(X, Y)$ şi $m(x, y)$ fiind puncte în planul raportat la axele de coordonate ortonormate Ox, Oy se defineşte între M şi m transformarea punctuală

$$X = \frac{x^2 + y^2 + x - 2y + 1}{(x+1)^2 + (y-1)^2},$$

$$Y = 1 + \frac{y-1}{(x+1)^2 + (y-1)^2}.$$

d) Numind $Z = X + iY$ şi $z = x + iy$ afixele respective ale lui M şi m, să se exprime Z în funcţie de z.

e) Cînd punctul M de coordonate X, Y descrie o dreaptă (D) $uX + vY + w = 0$, punctul m, imaginea lui M în transformarea inversă a transformării (1) descrie o linie (d), a cărei ecuaţie se cere.

Ce relaţie trebuie să existe între u, v, w pentru ca (d) să fie o dreaptă?

Bacalaureat Guineea, 1964

7435. Mişcarea rectilinie a unui punct M este definită de ecuaţia orară

$$x = t^3 - 3t^2 - 9t + 4.$$

Să se calculeze viteza v şi acceleraţia γ a mişcării la ora t. Să se studieze variaţia lor în funcţie de t. Să se precizeze pe axa parcursă de M, sensul mişcării şi caracterul său accelerat sau încetinit (întîrziat).

Bacalaureat Madagascar, 1964

7436. Se consideră o mişcare rectilinie pe o axă $x'Ox$, definită de

$$x = \cos\sqrt{3}t + \sqrt{3}\sin 3t.$$

Lungimile sînt exprimate în centimetri, unghiurile în radiani şi timpul în secunde.

a) Să se pună ecuaţia mişcării sub forma

$$x = A\cos(3t + \varphi).$$

Să se calculeze A şi φ.

b) Să se calculeze elongaţia pentru $t = \frac{\pi}{6}$ s.

c) Să se determine momentul t unde amplitudinea este de 1 cm pentru prima dată după timpul $t = 0$.

Bacalaureat Madagascar, 1964

PROBLEME PROPUSE *

7437. Să se descompună în factori expresia:

$$E(x) = x^{2p} + x^{2p-1} + x^{p+2} + 2x^{p+1} + 2x^p + x^{p-1} + x^2 + 2x + 1$$

Liviu Pîrşan, Bucureşti

7438. Să se simplifice fracţiile:

$$A = \frac{x^8 + x^4 + 1}{x^7 + x^5 + 1}; \quad B = \frac{x^{10} + x^8 + 1}{x^8 + x^4 + 1}; \quad C = \frac{x^8 + x^4 + 1}{x^7 + x^5 - 1}$$

Vasile Buţă, student Bucureşti

7439. Dacă $a + b + c = 0$ atunci:

$$2(a^{12} + b^{12} + c^{12} + 69a^4b^4c^4) = (a^6 + b^6 + c^6 + 9a^2b^2c^2)^2$$

Dan Voiculescu, elev Bucureşti

7440. Să se demonstreze inegalitatea:

$$(1965^{1966} - 1964^{1966})^{1965} > (1965^{1965} + 1964^{1965})^{1966}$$

Dumitru Acu, Cluj

7441. Se dă expresia:

$$\frac{x^2(2x\sqrt{1-x^2} - 1) + x(2x^3 - \sqrt{1-x^2})}{(x - \sqrt{1-x^2})[1 - 2x^3 + \sqrt{1-x^2} + 2x(1 + \sqrt{1-x^2})]}$$

Se cere: a) Să se aducă expresia la forma cea mai simplă; b) Să se afle valoarea ei pentru $x = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}$, unde $a > b$.

Al. Ţigănoiu, Timişoara

7442. Se dă paralelogramul $ABCD$. O dreaptă ce trece prin punctul D se roteşte în jurul acestui punct şi taie laturile AB şi BC, sau prelungiri ale lor, respectiv în punctele M şi N. Să se determine locul geometric al centrului cercului înscris în triunghiul BMN.

Băluţă Constantin, elev Filiaşi

7443. Fie un paralelogram $ABCD$ şi O_1, O_2, O_3, O_4 centrele cercurilor ABC, BCD, CDA, DAB. Cercul ABC taie CD, BD, AD în E, F, G; cercul BCD taie DA, CA, BA în E_1, F_1, G_1; cercul CDA taie AB, DB, CB în E', F', G'; cercul DAB taie BC, AC, DC în E'_1, F'_1, G'_1. Să se arate că dreptele O_1O_3, O_2O_4, EE', FF', GG', $G_1G'_1$, $F_1F'_1$, $E_1E'_1$ sînt concurente. (În legătură cu problema 6660).

Eugen Popa, elev Iaşi

---

* IX (7437–7444); X (7445–7455); XI (7456–7469); S (7470–7474). Soluţiile se primesc pînă la 15 iulie 1966.

7444. În triunghiul oarecare ABC notăm cu A' piciorul înălțimii din A și cu B' piciorul medianei din B. Bisectoarele unghiurilor $AB'B$ și $BB'A'$ taie laturile AB și BC în punctele M, respectiv N. Să se arate că:

a) MN este perpendiculară pe BC; b) unghiul $MB'N$ este egal cu unghiul B; c) dacă notăm intersecțiile dreptei AA' cu $B'M$ și $B'N$ cu Q și R, iar intersecția lui BB' cu MN cu P, atunci $MP.RA' = PN.AQ$.

Sergiu Cazan, elev Suceava

7445. Să se demonstreze că numărul $N = 3^{1966} + 5^{1966} - 34$ este divizibil cu 1966.

F. Kacso, Tg. Mureș

7446. Se dă ecuația:

$$x^4 - 2mx^3 + (m-1)^2x^2 + 2(m^2 - m - 1)x + m^2 - 2m = 0.$$

a) Să se determine soluțiile ecuației date din rezolvarea a două ecuații de gradul II; b) Să se determine în funcție de m expresia: $E = \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} + \frac{x_3 x_4}{x_3 + x_4}$; c) Ce valori poate lua m astfel ca ecuația dată să admită numai rădăcini reale. Discuție.

Alexandru Filipoiu, student

7447. Dacă $0 < x + y \leqslant 90°$ și m este real să se arate că:

$$(m^2 - 2m)\cos(x+y) + \cos(x-y) > 0$$

C. Ionescu-Țiu

7448. Fie un tetraedru oarecare $VABC$ căruia îi desfacem fețele laterale prin rotație în jurul laturilor triunghiului de bază ABC și se formează în planul bazei triunghiurile BCV_a, ACV_b, ABV_c. Să se demonstreze că perpendicularele duse din V_a, V_b, V_c respectiv pe BC, AC, AB sînt concurente. Dacă $VA = VB = CV$ atunci punctul de concurență este centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

C. I. Ț.

7449. Să se arate că dacă între elementele unui triunghi, cu notațiile obișnuite, există relația

$$S^2\left(4b^2\sin^2\frac{C}{2} + a^2\cos^2\frac{C}{2} + 8ac\cos B\right) = (abc)^2(\sin^2 A + \sin^2 C),$$

atunci $a = 2b$ și reciproc.

I. Șiclovan, Petroșani

7450. Se dă ecuația $x^3 + px + q = 0$, $(q \neq 0)$.

a) Să se determine relația între parametrii p și q astfel încît $x_2 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_3}$; b) Dacă, în plus, $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -3$, să se rezolve ecuația (x_1, x_2, x_3 sînt soluțiile ecuației date).

Aristide Leonte, Craiova

7451. Se notează cu l_n și a_n latura și apotema poligonului regulat cu n laturi înscris în cercul O de rază R. Să se arate că:

$$l_{28}^7 - 7l_{28}^5R^2 + 14\,l_{28}^3R^4 - 7\,l_{28}R^6 + R^7\sqrt{2} = 0;$$

$$\frac{(2R - 3l_{34})(2R + 3l_{34})}{2(R - l_{34})(R + l_{34})} = \frac{9a_{17} - 7R}{2a_{17} - R}$$

Sorin Florea, student București

7452. Să se determine coeficienții α și β ai ecuației $x^3 - \alpha x^2 + \beta x - 8 = 0$, știind că rădăcinile ei sînt numere întregi pozitive și că formează o progresie geometrică în care primul termen, rația și numărul termenilor sînt în progresie aritmetică.

N. C. Negoescu, profesor Timișoara

7453. Să se demonstreze că dacă $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a$, atunci $x_1^{2^k} + x_2^{2^k} + \ldots + x_n^{2^k} = \frac{a^{2^k}}{n^{2^k-1}}$ (unde a este real, k natural). (În legătură cu problema 6579).

Ioan Jurcă, Lugoj

7454. În orice triunghi mediana împarte unghiul din care pleacă în felul următor: raportul sinusurilor unghiurilor formate de mediană într-un vîrf este egal cu inversul raportului dintre laturile unghiului din care pleacă.

Andrei Romulus, elev București

7455. Să se rezolve ecuația:

$$f(x) = x^6 - 6x^5 + 17x^4 - 28x^3 + 28x^2 - 16x + 6 = 0.$$

Să se demonstreze că punctele ale căror afixe sînt rădăcinile ecuației $f(x) = 0$ sînt două cîte două simetrice în raport cu punctul al cărui afix este 1.

Corneliu N. Popescu, București

7456. În sistemul ortogonal de axe xOy se dau punctele $A(x, 0)$ și $B(2\alpha, 0)$. Dreapta $y - 2x = 0$ taie cercul de diametru OA în M și cercul de diametru OB în N. Fie P punctul de intersecție al dreptelor AN și BM. Să se determine locul geometric descris de punctul P cînd B parcurge axa Ox.

C. Săndulache, profesor Podul Turcului

7457. Să se calculeze fără ajutorul derivatelor

$$x \lim_{x \to 1} \frac{a^{x^2-1} - 1}{\sin(x^2 - 3x + 2)}, \quad (a > 0).$$

Petru Simon

7458. Considerăm funcția $f(x, y) = \sqrt{-x^2 - y^2 + 4}$ și fie L domeniul maxim de definiție. Raportînd L la planul bidimensional considerăm

punctele $M_1(x_1, y_1)$ și $M_2(x_2, y_2)$ din primul cadran astfel încît $\{M_1, M_2\} \subset L$ și definim transformarea de centru M_1 care face să corespundă lui M_2 punctul M_3 definit astfel:

$$M_1(x_1, y_1) + M_2(x_2, y_2) = M_3(x_1y_2 + x_2y_1, x_1x_2 + y_1y_2).$$

a) Să se arate că M_3 poate fi în interiorul său în exteriorul lui L și să se afle extremele coordonatelor sale.

b) Să se găsească centrul M_1 dacă transformarea este identică.

c) Să se cerceteze transformarea care are ca centru originea axelor de coordonate.

Dan Ralescu, elev București

7459. Fiind date funcțiile

$$f(x) = \frac{\log_a \log_c (x^2 - 3)c}{x - 2}; \quad g(x) = \frac{\log_c \log_a (x^2 - 3)a}{x - 2}$$

Se cere: a) Să se determine domeniul maxim pe care poate fi definită $f(x) + g(x)$ în cazul cînd $a \in (0,1)$ și $c \in (1, \infty)$.

b) Fără a folosi derivata să li se calculeze limitele cînd $x \to 2$.

N. Păun, Rm. Vîlcea

7460. Se consideră graficul unei funcții definite de un polinom de gradul III. Să se demonstreze că punctele de extrem și punctul de inflexiune de pe grafic sînt colineare.

Dan Mihalca, elev București

7461. Se dă un unghi BAC și un punct M în interiorul său. Un cerc mobil trecînd prin A și M mai intersectează pe AB în N și pe AC în P. Se cere locul geometric al centrului de greutate, al centrului cercului circumscris și al ortocentrului triunghiului MNP. (În legătură cu nota: Asupra unei teoreme a lui D. Pompeiu, G. M. — B, 2/1964).

Petre Liviu, Tîrgoviște

7462. Să se găsească toate soluțiile ecuației

$$x^2 + \frac{1}{2}y^2 = z^2$$

în numere întregi și pozitive prime între ele două cîte două.

Călin Gasparic, student București

7463. Se consideră în spațiu două cercuri neconcurente și cîte un punct pe fiecare dintre ele. Să se afle un al treilea cerc care să aibă cu fiecare dintre cele două cercuri date cîte o pereche de puncte comune, fiecare pereche conținînd cîte unul din punctele date.

Tudor Zamfirescu, București

7464. Să se afle valorile lui x pentru care

$$|1 - \operatorname{tg}^2 2x + 2\operatorname{tg} 2x| + |1 - \operatorname{tg}^2 2x - 2\operatorname{tg} 2x| = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

C. Ionescu-Țiu

7465. Într-un sistem ortogonal se dau dreptele de ecuații:

$$(D_1)\ y = mx + n;\quad (D_2)\ y = \frac{m+\sqrt{3}}{1-m\sqrt{3}}x + n_1;\quad (D_3)\ y = \frac{-m+\sqrt{3}}{1+m\sqrt{3}}x + n_2.$$

Să se arate că triunghiul format de cele trei drepte este echilateral.

M. I. Focșeneanu

7466. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(a\sqrt{k+2} + b\sqrt{k+1} + c\sqrt{k}\right)$$

știind că $a + b + c = 0$, apoi să se calculeze $\lim_{n\to\infty} S_n$ cînd $a = c$.

C. N. Tudor, București

7467. Să se arate că imaginile rădăcinilor ecuației

$$z^3 - 3z^2 + 2(3 - 2i)\ z - 4\,(1 - i) = 0$$

sînt pe aceeași dreaptă. (În legătură cu articolul din G.M.—B, 9/1965).

M. I. Focșeneanu

7468. Să se determine un număr x așa încît pentru orice număr natural n să avem:

$$9 \cdot 2^{4n-1} \cdot x^2 - 3 \cdot 2^{2n-1} \cdot (2^{2n+2} - 1)x + (2^{4n-1} - 2^{2n} - 1) < 0.$$

C. N. Tudor, București

7469. Să se reprezinte grafic

$$\sqrt{x(1+x)} \pm \sqrt{y(1+y)} = 0;\quad \sqrt{(1+x)(1+y)} \pm \sqrt{xy} = 1.$$

C. Ionescu-Țiu

7470. Să se demonstreze că în orice triunghi ascuțitunghi ABC există inegalitățile:

$$\operatorname{tg}^2 A + \operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^2 C \geqslant 9;\ \operatorname{ctg}^2\frac{A}{2} + \operatorname{ctg}^2\frac{B}{2} + \operatorname{ctg}\frac{C}{2} \geqslant 9.$$

Chițescu Ion, elev București

7471. Dacă M este un punct mobil din planul triunghiului ABC și O centrul cercului circumscris acestui triunghi, să se demonstreze că $OM^2 = R^2 - \dfrac{\alpha\beta c^2 + \beta\gamma a^2 + \gamma\alpha b^2}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}$ și să se deducă maximul expresiei $E = ad_b d_c + bd_c d_a + cd_a d_b$, unde d_a, d_b, d sînt distanțele punctului M din interiorul triunghiului ABC la laturile BC, AC, AB, iar α β, γ sînt proporționale cu ariile triunghiurilor MBC, MAC, MAB.

Tomescu Ion, București

7472. Se consideră un șir (a_n) dat de relația de recurență :

$$a_n = \frac{1}{1+a_{n-1}} \quad (a_1 = 1)$$

Să se stabilească relația :

$$|a_{n+4} - a_{n+3}| < \frac{1}{5} \cdot \frac{2^{2n}}{3^{2n+1}}, \text{ pentru } n > 2.$$

Să se deducă convergența șirului (a_n), calculîndu-se limita lui.

Corneliu N. Popescu, București

7473. Numărul natural k fiind dat există întotdeauna N astfel încît $k \geqslant N$ implică :

a) $(x + k - 1)^{2k+1} < x(x + 1)(x + 2)\ldots(x + 2k) < (x + k)^{2k+2}$

b) $(x + k) < x(x + 1)(x + 2)\ldots(x + 2k + 1) < (x + k + 1)^{2k-2}$

c) Fie $A = 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \ldots (n-1)^{n-1}$; să se demonstreze inegalitățile :

$$\sqrt[4]{\frac{(n^2)!}{n^{2n}}} > A \text{ și } \sqrt[4]{\frac{(2n^2)!}{n^{4n-1} \cdot 2^{2n^2-1}}} < A$$

Dan Voiculescu, elev București

7474. Un corp este format dintr-un con circular drept cu generatoarea egală cu a, iar pe baza conului o jumătate de sferă. Să se determine corpul de volum maxim.

C. V. Costăchescu, Constanța

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE PENTRU CLASELE V–VIII *

E : 2464. Se dau numerele : 185 220 și 8820. Să se stabilească dacă aceste numere se împart exact, fără a face împărțirea și să se calculeze cîtul.

Nelu I. Dobre, Merei, Buzău

E : 2465. Trei caiete de aritmetică costă cît patru caiete maculatoare ; două caiete maculatoare costă cît trei creioane, iar un caiet de aritmetică, un maculator și un creion costă 2,70 lei.

Cît costă cîte o bucată din fiecare fel ?

Corneliu Georgescu, Craiova

E : 2466. Un călător pleacă din localitatea A spre localitatea B. În momentul cînd a parcurs $\frac{1}{3}$ din drum, un biciclist pleacă din locali-

* V (E: 2464–2467); VI (E: 2468–2470); VII (2471–2473); VIII (E: 2474–2478). Soluțiile se primesc pînă la 15 iulie 1966.

tatea B spre localitatea A cu o viteză de 4 ori mai mare decît viteza călătorului. În momentul cînd acesta a parcurs $\frac{1}{3}$ din drum, pleacă din A un automobil cu o viteză de 4 ori mai mare decît viteza ciclistului. Să se afle distanța dintre cele două localități știind că în momentul cînd automobilul a parcurs $\frac{1}{3}$ din drum, distanța dintre călător și ciclist mai este de $3\frac{1}{2}$ km.

C. Sîrbu, Brăila

E : 2467. La o secție de la o întreprindere muncitorească, au fost evidențiați trei muncitori, primind o sumă de bani care a fost proporțională cu 8 ; 6 ; și 5.

Știind că primul a primit cu 375 lei mai mult decît al treilea, să se afle sumele primite.

B. Baeră, București

E : 2468. O cooperativă agricolă de producție a însămînțat în prima zi 1/4 plus 5 ha din suprafața de teren ce avea de însămînțat. A doua zi a însămînțat 1/4 din rest plus 5 ha. A treia zi a însămînțat 1/5 din ultimul rest, după care s-a constatat că mai avea de însămînțat încă 380 ha. Să se afle ce suprafață de teren avea de însămînțat această gospodărie.

D. Mîrzan

E : 2469. Învățămîntul va da economiei naționale în perioada 1966—1970 de 2, (81) ori mai mulți muncitori calificați și cu 18, (18)% mai multe cadre medii de specialitate decît cadre cu pregătire superioară. Știind că numărul muncitorilor calificați e cu 200 000 mai mare decît numărul cadrelor cu pregătire superioară să se afle numărul total de cadre ce-l va da învățămîntul economiei naționale.

Radu Gheorghe, Mizil

E : 2470. Colectivul fabricii de rulmenți din Bîrlad a realizat în anul 1964 o producție globală de 754 milioane lei față de 249 milioane în 1959, iar productivitatea muncii pe salariat a crescut de la 91 400 în 1959 la 210 600 lei în 1964.

Să se exprime în procente aceste creșteri.

Octavian Sullă, Vălenii, rn. Vaslui

E : 2471. Doi pionieri au depus la C.E.C. cîte o sumă de bani. Dacă primul ar mai depune 3/4 din suma sa, iar al doilea ar mai depune 20% din suma sa, atunci ar avea împreună 260 lei. Dacă însă primul ar mai depune 1/4 din suma sa, iar celălalt ar rămîne cu aceeași sumă, atunci ei ar avea la C.E.C. sume egale. Ce sume de bani au la C.E.C. cei doi pionieri?

La admitere în cl. IX, Constanța 1965

E : 2472. Doi muncitori au primit pentru munca depusă sume de bani al căror raport este 2/3.

Ce sumă a primit fiecare, știind că 3/5 din suma primită de al doilea, mărită cu 30% din suma primită de primul, este cu 1560 lei mai mică decît suma primită de cei doi muncitori împreună.

La admitere în cl. IX, Constanța 1965

E : 2473 Pe laturile AB și BC ale pătratului $ABCD$ se găsesc respectiv, punctele E și F astfel încît $\frac{AE}{EB} = \frac{BF}{FC} = \frac{3}{4}$. Cunoaștem aria triunghiului $DEF = 74$ m^2.

Să se afle aria pătratului.

Corneliu Georgescu, Craiova

E : 2474. Să se calculeze valoarea numerică a expresiei :

$$\frac{4a^2}{(a^2-a+1)(a+1)^2} : \left(\frac{1}{a^2+2a+1} - \frac{2}{a+1} \cdot \frac{1}{1-a} + \frac{1}{a^2-2a+1} \right)$$

pentru

$$a = \left[\frac{\left(11 - 9\frac{1}{2}\right) : 0{,}003}{\left(4{,}05 - 3\frac{13}{20}\right) \cdot 20} - \frac{0{,}45 - \frac{9}{40}}{13\frac{5}{8} : \left(2\frac{3}{5} + \frac{1}{8}\right)} \right] : 62\frac{91}{200}.$$

La admitere în cl. IX, Constanța, 1965

E : 2475. Să se rezolve ecuația :

$$\frac{11}{13}\left(\frac{5x - \sqrt{10{,}1761}}{3} + 1,(4) \right) : 3\frac{2}{3} = 0{,}85 \ (717948)$$

S. Constantinovici, Drăgănești

E : 2476. Unghiul obtuz format de diagonalele dreptunghiului $ABCD$ are 110°. Din B se duce o perpendiculară pe diagonala AC, pe care o taie în E. Știind că perpendiculara întîlnește pe AD în F, cu care face un unghi de 35°, să se arate că :

$$AF \cdot AD = BF \cdot BE$$

Mazarachi Chimon, Galați

E : 2477. Perimetrul unui triunghi ABC este de 60 cm, laturile sale proporționale cu numerele 3,4 și 5. Cea mai mare dintre laturi este BC. Se duce cercul circumscris triunghiului ABC și semicercurile de diametre AB și AC.

Se cere :

a) Să se calculeze lungimile laturilor triunghiului.

b) Să se demonstreze că acesta este triunghi dreptunghic.

c) Să se calculeze aria părților în formă de semilună cuprinse între cercuri.

La admitere în clasa IX, Banat, 1965

E : 2478. Să se găsească valoarea lui x care satisface următoarea ecuație :

$$2\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1\frac{1}{3}}{3\frac{1}{3}-x}+\frac{27}{729}\right)(10-3x)=7x-12\frac{2}{3}$$

La admitere în cl. IX, Banat, 1965

CARȚI NOI

George Șt. Andone. *Istoria matematicii în România*. vol. I, Editura științifică, 1965.

Lucrarea prezintă o imagine amplă a dezvoltării științei matematice și a învățământului matematic pe teritoriul patriei noastre din cele mai vechi timpuri. Acest volum se termină cu viața și opera inițiatorilor școlii matematice române și cuprinde capitolele :

I. Perioada premergătoare înființării Academiilor domnești din Iași și București, II. Matematica și învățământul matematic de la înființarea Academiilor domnești pînă la mișcarea revoluționară din 1821. III. În Țara Românească și Moldova între 1821 și 1860. IV. În Transilvania și Bucovina între 1821 și 1860. V. De la înființarea universităților pînă în 1918. VI. „Gazeta matematică". Fondatorii și redactorii săi importanți. VII. Inițiatorii școlii matematice române. Viața și opera lor.

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

SEBIȘ (Hunedoara). *S. g. 2 cl. V.* Dăncilă Mircea (E : 2354, 6, 7, 67, 8, 70, 1, 6—8)

SIBIU. *S. g. 18 cl. V.* Ispas Ioan (E : 2336, 54, 8, 9, 66, 70, 5, 6), Roman Eugen (E : 2338, 9, 54, 5, 8, 66, 9, 76), Tudorache Valentin (E : 2336, 9, 56, 7, 9, 66, 9, 70, 5). *Cl. VII.* Anghel Steluța (E : 2237, 9, 54, 9, 69, 70, 5, 6), Ganea Mircea (E : 2357—9, 61—3, 70, 5, 6), Gogîlea Florentina (E : 2354, 6, 9, 67—73), Hampu Ana (E : 2338, 9, 54, 5, 65, 6, 76, 89), Pricop Elisabeta (E : 2337—9, 54, 9, 70, 5, 6). *Cl. VIII.* Chirilăn Dorina (E : 2350, 4, 6—9, 64—6, 9), Guță Nicolae (E : 2338, 54, 6, 65, 6, 70, 1, 75), Horvat Doina (E : 2354, 6, 8, 9, 64, 6, 9, 70, 1, 4), Popa Maria (E : 2354, 5, 8, 9, 65, 6, 9, 75, 6), Șerbănuț Ligia (E : 2354, 6, 7, 9, 66, 7, 9, 71). *S. g. 15 cl. VI.* Oană Dan (E : 2354, 6, 9, 70, 1, 3, 5—7), Popa Adrian (E : 2357, 9, 65, 9, 70—3, 6, 7, 80), Vlăjie Florin (E : 2254, 6, 9, 67—70, 5—8). *S. g. 12 cl. VII.* Gheorghiță Nicușor (E : 2354, 6, 7, 67—70, 3—6). *L. 1 cl. VIII.* Popențiu Florin (E : 2358, 62, 4—6, 71, 8, 80), Soima Ileana (E : 2356, 8, 9, 65, 7, 9, 74, 5, 80). *Cl. X.* Radu Bițu (7050, 1, 75, 6, 7, 81, 3, 131, 4—6), Buzoianu Mureș (7050—2, 9, 66, 9, 73, 6, 7, 8, 81, 91), Noje Georgeta (7049—52, 66, 9, 73, 7, 80, 91, 119, 31). *Cl. XI.* Cusiur Dana (7066, 76, 7, 81, 91, 111, 5, 9—22, 4, 30), Dădîrlat Dan (7048, 6, 8, 76—8, 81, 3, 9, 105, 5, 7), Filimon Mihai (7048, 68, 76, 7, 91, 119—22, 4, 31), Todor Elvira (7048, 63, 4, 8, 9, 77, 81, 111, 5, 31, 2, 5), Stoica Maria (7048, 52, 66, 70, 6, 83, 9, 110, 4, 21, 2, 4, 33), Vasile Alexandra (7048, 54, 64, 6, 8, 76, 7, 81, 91, 111, 5, 9—22, 4, 30, 1). *L. 2 cl. X.* Fulea Mihai (6987—9, 95, 6, 8—7003, 5, 10, 4, 9, 21, 2, 8, 47, 9—51, 61, 6, 73, 6—8, 80, 91, 114, 9, 31). *Cl. XI.* Trif Nicolae (6988, 91, 5, 8, 9, 7000—3, 16, 7, 21, 2, 33, 44). *L. 3 cl. X.* Gociman Rozalia (6988, 95—9, 7002—5), 14, 45), *Nicola Traian* (6995—8, 7000—5, 22, 8, 50—2, 60—2, 4, 6, 9, 70, 3, 6, 7—81, 107, 19, 20, 2—4, 27), Sîrbu Sanda (7048, 50—2, 5, 6, 66, 8—70, 3, 6, 8, 80—4, 7, 91, 6). *Cl. XI.* Balasz Agnes (7048—51, 60—2, 4, 6, 9, 73, 110), Modron Liviu (7050—2, 70, 3, 6—8, 81, 4, 9,

91), Szasz Zenö(70 48, 50, 1, 9, 60, 1, 4, 9, 73, 7, 81, 91), Szilaggi Erzsebet (7048, 50, 1, 9, 60, 1, 6, 9, 70, 3, 81, 91). *L. 3 cl. VIII.* Nițu Oleg (E : 2360, 1, 2, 7—70, 2—6, 8, 9, 80). *Absolvent Dăncilă Ion* (6844, 6, 9, 71, 905—14, 28, 34, 6, 7, 47, 56, 60, 70, 8, 82, 94, 6, 7, 9, 7000—2, 4—6, 13, 16—8, 21, 4—8, 31, 5, 6, 8, 43, P), Radu Magda (7050, 2, 69, 73, 4, 6—8, 80, 1, 4, 7, 91, 105).

SIGHIȘOARA. *S. g. 2 cl. VIII.* ... (E : 2354, 6—60, 2, 4, 5). *L. 2 cl. X.* Hans Güther (7050, 1, 73, 8, 80, 1, 122, 7, 9—31, 5, 46).

SÎNTANA (Crișana). *Cl. VI.* Stan Cristian (E : 2354, 6—9, 68—74, 7).

SÎNTANDREI (Crișana). *Cl. VIII.* Torjoc Ana (E : 2354, 6, 9, 66, 7, 9, 70, 4, 6, 8, 9).

SLĂNIC (Ploiești). *Cl. XI.* Moraru Gheorghe (7051, 60, 1, 3, 6, 70, 6—8, 80, 3, 120, 2, 4, 31), Neicu Adrian (7060, 3, 70, 3, 6—8, 80, 107, 10, 5, 7, 120—2, 3, 41, 45).

SLATINA. *Cl. X.* Bănică Marin (7050—2, 66, 73, 6, 8, 80, 91, 127, 31).

STOENEȘTI (București). *Cl. VII.* Chineață Constantina (E : 2336, 7, 66, 9—71, 5, 6), Salomia Constantin (E : 2456—8, 66, 9—71, 5, 6). *Cl. VIII.* Chineață Ioana (E : 2369—72, 5—9), Codreanu Stela (E : 2369—72, 5—9), Costăchiță Maria (E : 2369—72, 5—9), Enache Niculina (E : 2369—72, 5—9), Ioniță Tudor (E : 2369—72, 5—9), Năchilă Petre (E : 2354, 9, 63—6, 8—70, 2, 3, 5—9), Oneață Georgeta (E : 2369—72, 5—9), Panea Ion (E : 2369—72, 5—9), Zaharia Maria (E : 2369—72, 5—9).

SUCEAVA. *Cl. VI.* Sălcescu Narcisa (E : 2354—7, 69—71, 9), Simion Sebastian (E : 2355—7, 9, 69, 6, 83). *Cl. X.* Cazan Sergiu (7064, 6, 8, 9, 73, 7, 91, 111, 9, 30, 1, 5 P).

STEFĂNEȘTI. *S. g. 7 cl. VII.* Popescu Cristian (E : 2354, 6, 7, 9, 60, 2—6). Cl. VIII. Picol Gheorghe (E : 2354—66; 7048, 59—61, 73, 7).

TEACA (Cluj). Cl. VI. Preda Valeriu (E : 2354, 6, 7, 9, 64, 6—9, 70, 7).

TECUCI. *L. 2 cl. VIII.* Nicolau Adrian (E : 2334, 6, 7, 9, 61, 7, 9, 70, 5, 6).

TIMIȘOARA. *S. g. 10 cl. VIII.* Mureșan Ioan (E : 2354—9, 63—6). *L. 1 cl. VII.* Dolga Marcela (E : 2334, 6, 7, 9, 61, 2, 72, 5, 7), Stoian Catina (E : 2334, 6, 7, 9, 61, 2, 72, 5, 7). *Cl. VIII.* Mnerie Ștefan (E : 2354, 6, 9, 61, 5, 6, 9, 70, 83, 5)*L. 2 cl. VIII.* Dordea Toma (E : 2354, 6, 64, 5, 6, 9, 70, 5), Koch Dorotheea (E : 2354—9, 62, 3, 70, 3, 6, 7). *Cl. VIII.* Patriciu Victor (E : 2354, 6, 9, 61, 6, 9, 73, 6, 9, 80), Schi Ioan (E : 2354, 8, 9, 63, 5, 9, 70, 6, 7). Cl. X. Bozan Carmen (7050, 69, 76, 80, 1, 3, 91, 119, 26, 31, 6, 63).

TÎRGOVIȘTE. Cl. VIII. *Chivăran Laura* (E : 2354, 6—85, 8, 93). *L. 2 cl. XI.* Bănică Aurel (6934, 56—8, 60, 80, 9, 95—7, 7002, 4, 5, 24, 45, 70, 3, 6, 80, 1, 3, 8, 107, 8, 10, 7, 20—2, 31, 8), Pîrvu Constantin (7048, 60, 1, 3—6, 73, 6, 108, 10, 7, 20—2, 4, 30, 1, 8), *Enache Gh.* (7048—51, 4, 5, 1, 3, 4, 6, 9, 72, 3, 6, 7, 80, 1, 4, 7—9, 91, 105, 8, 10, 5, 7, 9—24, 30—2, 40, 5). *L. 3 cl. XI. Niculescu Constantin* (6795—9, 802, 11, 4, 6, 8, 9, 21, 4, 7—9, 31, 5, 8, 46—52, 4, 5, 9, 61, 2, 4—70, 88, 92, 902, 6, 25, 31, 8, 47, 8, 9, 50—3, 8, 63, 71, 5, 8).

TÎRGU JIU. *S. g. 4 cl. VIII.* Buga Viorica (E : 2354, 6, 8, 9, 69—71, 6), Crețan Doina (E : 2356, 9, 69, 70, 4, 8—80). *L. 1 cl. XI.* Bratu Traian (7051, 2, 60, 1, 6, 9, 70, 3, 6, 7, 81). *L. 2 cl. X.* Cosma Dumitru (7048, 51, 2, 60, 35, 6, 9, 70, 3, 6, 7, 80, 1, 91), Soare Nicolae (7060, 1, 6—70, 3, 6, 7, 80, 91, 119).

TÎRGU LĂPUȘ. *Cl. X.* Sonța Vasile (7059, 61, 6, 9, 73, 5, 7—80, 91, 111, 26).

TÎRGU MUREȘ. *L. 1 cl. VIII.* Barda Caius (E : 2354—6, 63, 6—8, 70, 2, 7), Dragotă Adrian (E : 2369, 71, 2, 4, 9, 82, 4, 5), Moldovan Rodica (E : 2354, 6, 9, 60, 7, 9, 70, 7). *Cl. VIII.* Darvaș Ștefan (E : 2354, 6, 7, 9, 60, 7, 9, 70, 6, 7).

TÎRGU NEAMȚ. *Cl. X.* Agapie Ion (7051, 2, 4, 5, 63, 4, 8, 9, 73, 7, 8, 80, 9, 91).

TRUSEȘTI. *Cl. XI.* Racu Ion (6990, 5—7, 7000—5, 7, 14, 7, 22, 51, 60—4, 6, 9, 73, 80).

TURDA. *S. g. 6 cl. VII.* Mîrza Constanța (E : 2357, 9, 66, 9, 70, 6, 7).

TURNU MĂGURELE. *L. Unirea cl. X.* Golgojan Tudora (7052, 66, 9, 70, 6, 80, 111, 9, 24, 30—2). *L. 2 cl. X.* Șerban Viorel (7048—53, 9—70, 3, 6—81, 94, 108, 14, 7). *Cl. XI.* Ioniță Ana (7021, 45, 64, 70, 7, 8, 80, 119—23, 31), Russu Epaminonda (6990, 9, 7000, 1, 7, 14, 28, 45, 7, 51, 73).

TURNU SEVERIN. *S. g. 1 cl. VIII.* Ceplescu Julieta (E : 2356, 7, 67, 9—71, 6, 7), Pănescu Florica (E : 2356, 7, 9, 60, 9, 70, 5—7), Stocker Marina (E : 2367—77). *Cl. VIII.* Bădescu Iulian (E : 2354, 67—74, 6—80). Dumitrașcu Nicolae (E : 2354, 9, 73, 7, 9, 80—3, 5). *L. 1 cl. VI.* Anghelescu Anca (E : 2367, 9, 70, 6, 56, 7, 9, 66). *Cl. VII.* Tontoiu Dorin (E : 2354—66, 7—80, 1—5, 7—9, 92). *Cl. XI.* Ionescu Mihai (7050—2, 4, 5, 9, 60, 1, 3, 4, 6, 9, 70, 3, 6, 7, 8, 91, 119, 20, 2, 4, 30, 1, 5). *L. 2 cl. VII.* Biban Irina (F : 2368—71, 6, 7, 83, 5). *Cl. X.* Zinita Florentin (7059—64, 6—70, 3, 6—80, 91, 108).

URLAȚI. *Cl. X.* Zota Dan (7048, 9, 51, 2, 9, 60, 3, 6, 8, 9, 73, 6—8, 81, 91, 111, 4).

UȘUREI (Argeș). Cl. VIII. Pietraru Ana (E : 2354, 7—9, 64—6).

VADUL CRIȘULUI (Crișana). *Cl. X.* Vereș Ioan (7050—2, 61, 2, 6, 70, 3, 80, 131, 6, 45)

VALEA LUI MIHAI (Crişana). *Cl. XI.* Ioan Vesa (7049—52, 9—61, 4, 6, 73, 6, 7, 80, 3, 9, 91).

VASLUI. *L. 1 cl. VIII.* Safir Marta (E : 2356, 7, 9, 65, 9, 70, 81).

VATRA DORNEI. *Cl. VIII.* Zozuleac Doru (E : 2354, 7, 9, 61, 3, 74—6).

ZALĂU. Cl. VIII. Calinici Marius (E : 2354, 6, 7, 9, 63, 4, 70, 6, 9, 80).

★

Pînă la 15 ianuarie 1966 s-au mai primit soluţii bune la problemele propuse în G.M.-B. de la:

ABRUD. *L.1.* cl.X. Bolunduţ Ioan (7119, 20, 2, ,4 7, 31, 4, 6, 85, 8, 216, 7, 24). cl.XI. Borşa Sabin (7120, 2, 4, 31, 4, 6, 25, 8, 211, 6, 7, 24).

ADJUD. *S.g. 1* cl.VIII. Bocăneţ Paula (E : 2368, 74, 5, 7, 9, 81—5, 8, 95, 6, 8—402, 4, 5,). Creţu Dumitru (E : 2369, 71, 4, 6, 81, 2, 90, 5, 400, 1, 4), Dinicu Petru (E : 2367, 9, 71, 6, 7, 81, 2, 5, 90), Mega Gh. (E : 2367, 9, 70, 1, 6, 7, 81, 5), al. VIII. Petroiu Eugen (E : 2381—4, 7—90, 2, 3), Pentroiu Gelu (E : 2381—4, 7—90, 2, 3). *S.g.* 2. cl. VII. Groza Steluţa (E : 2367, 9, 70, 3—5, 83, 4), Maftei Gh. (E : 2369, 70, 4, 6, 7, 9, 82—5, 7, 8, 95, 9, 400—3), Vraciu Mihaella (E : 2376, 7, 81, 4, 5, 92, 5, 9, 402, 4).

AIUD (CLUJ). *S.g.* cl.VII Maftei Doina (E : 2370, 2—6, 8—80), L. cl. IX. Majdik Zoltan (E : 6378—80, 91, 3, 407—9; 7119, 20, 85, 219).

ARAD. *L.1.* cl. V. Negru Mariana (E : 2367—71, 81—4, 95), cl. VIII. Decis Florin (E : 2370, 1, 3, 5—81), Luduşa Lucia (E : 2367, 9, 70, 2, 5—8), cl. IX Boşcaiu Voicu (E : 2378—89, 91—3 ; 7127, 9—31, 44, 51, 5, 85), cl. X. Balla Ioan (7119, 20, 2, 5—8, 30, 1, 4—6, 40, 59, 63), *Lucuţa Petru* (7119—27, 9—32, 4—6, 8, 40, 5, 6, 51, 5, 9, 63, 4, 8, 9, 75, 7, 81, 5, 8—90, 2k 7, 202, 4, 10). *L.2* cl. V. Ududec Liana (E : 2367—70, 4, 6, 82, 3), cl. VI Greceanu Radu (E : 2367, 8, 70, 6, 7, 81, 2, 5), Podea Delia (E : 2368, 70, 3, 5, 7, 81, 5, 95), Zabb Mia (E : 2368—71, 3—5), cl. X Begu Liana (7119, 20, 30, 1, 5, 63, 85, 8, 95, 216, 7, 22).

BACĂU. *Liceu* cl. X— Ţarălungă Lucia (7120, 2, 4, 7, 34—6, 63, 210, 6, 20, 4), *L. pedagogic* cl. I Seftinie Zina (E : 2367, 9—71, 4, 5, 9, 80, 2—4, 7, 9, 90, 2 ; 7185)

BAIA MARE. *L. 1.* cl. XI Mariţa Dorin (7119, 20, 2, 4, 9—2, 5, 6, 40, 5, 6).

BAIA MARE. *S.g. 3* cl. VII. Cernestean Tiberiu (E : 2367, 9, 70, 80—4), Fecicke Cosette (E : 2370, 1, 4—6, 80—2), *L. 1* cl. IX Klein Robert (E : 2378—80, 91—3, 9 ; 7127, 9—31, 85), Krause Ion (E : 2370—80, 91—3, 409 ; 7127—31, 85), Moreanu Viorel (E : 2378——80, 91—3 ; 7127, 9—31, 84, 5), Nagy Conrad (E : 2378—80, 91—3, 407 ; 7127, 30—2, 85), cl. XI. Barbu Augusa (7120—2, 4, 7, 31, 5, 6, 40, 3, 85, 8, 216), Grumat Doina (7120, 1, 4, 7, 31, 5, 6, 40, 3, 85, 8, 216, 24), Pop Vasile (6119, 20, 2, 4, 7, 31, 6, 7, 40, 3, 51, 85, 8), L. 3 cl. 10 Apşan Dan (7122, 4, 5, 7—9, 30, 1, 4, 51, 9, 69, 78, 81, 85, 8, 9, 90, 2, 3, 4, 10, 3, 6, 7, 9, 20, 4), Grosfeld Mihai (7119—22, 6, 7, 9—31, 4, 5, 9, 40, 5, 6, 59), cl. XI. Vasilov Angela (7119—22, 4, 31, 88, 217, 7, 2114, 6).

BALŞ (OLTENIA). *L. 1* cl. XI Enache Ilie (7119, 20, 2, 4, 30—2, 85, 217, 8, 22, 3).

BĂBENI (ARGEŞ). *L. 1* cl. VI Muja Gelu (E : 2381, 2, 4, 9, 94—6, 9), cl X Constantinescu Gh. 7120, 22, 30, 1, 5, 68, 3, 5, 8, 94, 216—8, 2, 22, 4), Dicu Constantin (7120, 22, 30, 1, 5, 68, 3, 5, 8, 94, 216—8, 22, 4), Roşianu Gh. (7120, 22, 30, 1, 5, 68, 3, 5, 8, 94, 216—8, 22,4) Roşianu Gh. (7120, 22, 30, 1, 5, 68, 3, 5, 8, 94, 216—8, 22, 4), Stoicăreanu Nicolae (7120, 22, 30, 1, 5, 68, 3, 5, 8, 94, 216—8, 22,4).

BĂICOI (PLOIEŞTI). *L.1.* cl. VIII Boeru Luiza (E : 2378—81, 3, 4, 400, 1, 4, 9), Fărcuş Eugenia (E : 2370, 6, 81, 9, 5, 6, 401, 4), cl. IX. Boeru Ştefan (E : 2378, 92, 409 ; 7120, 4, 31, 85, 216, 22—4, 33), cl. XI. Boeru Marin (7119, 20, 2, 4, 31, 6, 85, 216, 7k 22—5, 33, 47), cl. XI. Roman I. Ion (7119—22, 4, 31, 2, 4, 38, 8, 45, 63, 85, 88)

BĂNEASA (DOBROGEA). *L. 1* cl. IX. Anonim (E : 2378—80 ; 7119—24, 7, 9—31,33).

BECHET (OLTENIA). *L. 1* cl. IX Cojocaru Ion (E : 2378—80, 91—3 ; 7119, 28, 30, 1, 55, 85).

BECLEAN (CLUJ). *L. 1* cl. X. Rusu Flaviu (7122, 4, 7, 30), 1, 85, 8, 94, 222, 4, 5, 35).

BEIUŞ (CRISANA). *L.1* cl. VII Covaci Iosif (E : 2369, 70, 6, 7, 80, 1, 3, 5), cl. VIII, Zare Viorica (E : 2370, 6, 7, 81, 2, 5, 92, 5, 9, 401, 2, 4).

BERCHIŞEŞTI (GURA HUMORULUI) *S.g.* cl. VIII. Varvara Maria (E : 2368—71, 3, 4, 6, 7, 80), Varvara Olga (E : 2368—71, 3, 4, 6, 7, 80), Varvara Aurora (2368—71, 3, 4, 6, 7, 80), Vavara Viorel (E : 2368—71, 3, 4, 6, 7, 80), Vorteniuc Valentin (E : 2368—71, 3, 4, 6, 7, 80), Tobas Elena (E : 2368—71, 3, 4, 6, 7, 80), Buţa Elena (E : 2368—71, 3, 4, 6, 7, 80)

BERTEA (PLOIEŞTI). *S.g. 2* cl. VIII. Bunescu Maria (E : 2369, 76, 7, 9, 81, 3, 5, 92).

BISTRIŢA (CLUJ). *Sg. 2* cl. VIII. *Fucă-Tomescu Mihai* (E : 2367—70, 2, 4, 6—85, 7, 8, 90—401, 3—5). L.1 cl. X. Cotoc Ion (E : 7119, 22, 4, 7, 30—2, 5, 6, 51, 63, 88), Gagea

Alexandru (7120, 2, 4, 32, 6, 8, 85, 8, 94, 216, 22, 3), cl. XI. Lupşa Nicolae (7119—22, 4, 5, 30, 1, 5, 6, 43, 51), Mihăilaş Liana (7119—25, 30, 1, 4—6, 43—5), *L. 2* cl. X. Mreneş Mihai (7119, 20, 2, 4, 6, 8, 30—2, 4, 5, 220, 3), Nicoară Dan (7119, 20, 2, 30—2, 5, 6, 85, 8, 220, 3).

BÎRCA (OLTENIA) *L.1* cl. VIII Proca Marin (E : 2367, 9—72, 5—9, 85, 95; 7131), Proca Ştefan (E : 2373, 7—84, 9, 92, 7, 9—401, 4; 7131).

BÎRLAD. *L. 1.* cl. XI. *Badea Lori* (7143—6, 52, 79, 81, 3, 5, 8—90, 4, 6, 8, 9, 202, 4, 10, 2—4, 6—27, 35, 6, 9, 40, 6, 7, 51). L. 3 cl. VI. Bichir Ionel (E : 2367—80).

BOCŞA (BANAT). *L. 1* cl. X Iorgovan Gh. (7119, 22, 30—2, 4, 6, 63, 85, 220, 2, 3), *S. prof.* an III Cioloca Adam (2371—67, 8—80; 7131, 51).

BOROAIA (SUCEAVA). *L. 1.* cl. VIII Petrescu Viorica (E : 2382—4, 97, 9—402).

BOTOŞANI. *S.g.'* cl. VIII. Asaftei Marcel (E : 2367, 9—71, 7, 9—81), *L. 1* cl. VIII. Chirica Cezar (E : 2369, 70, 81, 3, 5, 93—6, 8, 400, 3, 5, 6), cl. IX Dale Ovidiu (E : 2378—80, 91, 2, 408, 9; 7126, 7, 9—31, 85, 8), cl. X. Dumitrescu Elena (7119, 20, 6, 7, 30, 1, 4—6, 51, 85, 8, 94, 5), cl. XI. Dale Constantin (7122, 4, 6, 9, 34, 5, 43, 85, 8, 94, 5, 216, 9, 22—4), *Vexler Dan* (7119—21, 4, 7, 9—31, 4—6, 43, 4, 6, 61, 63, 9, 85, 8, 93—6, 216, 7, 9, 20, 2—5, 7, 35, 40, 7), Zăicescu Mariana (7122, 4, 9—31, 4—6, 43, 51, 9, 85, 8, 94).

BOZOVICI. *S. g.* cl. VIII Ignea Ana (E : 2368, 72, 7, 81, 9, 90, 2—401, 3—5), *L. 1* cl. VIII. Piescu Călina (E : 2367, 8, 79, 80, 2—5, 7, 90, 2, 4—405, 7, 9).

BRAD. *S.g. 1* cl. VIII. Beuşan Grigore (E : 2368—70, 5—7, 80, 1), Dolga Valer (E : 2369, 70, 6—9, 82, 5, 95), Năstăsoiu Lidia (E : 2378, 81—5, 92, 4—8, 402, 9).

BRAGADIRU (BUCUREŞTI). *L.1* cl. XI. Gheorghe Marian (7120, 1, 4, 30, 1, 5, 68, 85, 8, 204, 16, 7, 22—5, 7).

BRAŞOV. *S.g. 2* cl. VII. Vlase Sorin (E : 2367—71, 3—7, 9), cl. VIII Ionaşcu Ligia (E : 2367, 9—74, 8), *S.g.* cl. VII. Păun Marius (E : 2367—80), S.*g.* 6 cl. VII. Oniga Viorica (E : 2367, 9—74, 6, 8—80). *Liceul* 1 cl. X. Bătătorescu Anton (7119, 22, 9, 30, 2, 3, 5, 46, 95, 219, 20, 4), cl. XI, Caminschi Corneliu (7119, 21, 2, 4, 7, 301, 1, 5, 6, 8, 42, 88, 204), *Liceul 4* cl. VII. Nistor Andrei (E : 2369, 70, 4, 80, 1, 3, 90, 7, 404), Pavel Florin (E : 2369, 70, 4, 6, 80, 1—4), cl. VIII. Barbu Gabriela (E : 2373, 81—3, 93, 9, 401, 2), Nedelea Eugenia (E : 2381, 2, 4, 5, 95, 7, 8, 409, 1, 4), Olteanu Valentin (E : 2368, 78, 88, 90, 5, 7—402, 4), Petricu Dan (2394—6, 8—401, 4, 5), Stan Adriana (E : 2381, 2, 4, 9, 96, 7, 9, 401), Szabo Clara (E : 2368, 72, 4, 9, 80—5, 400), cl. X. Bontaş Vasile (7119, 21, 2, 5, 9, 30, 2, 5, 43, 4, 6, 51, 3, 5), cl. XI. Cotora Gheorghe (7120—2, 4, 5, 9, 32, 40, 3, 4, 6, 51, 3, 9), *Liceul 5* cl. VI. Zsidó Eva (E : 2378, 81—5, 7, 8, 94—7, 9—402), cl. X Zsido Agnes (7119, 20, 2, 3, 30, 1, 4, 88, 90, 2, 5, 220, 2, 4), S. prof. an III Caezar Ludovic (E : 2367—72, 4, 5, 8—80).

BRĂILA. *S.g. 2* cl. VIII. Furtună Tudoriţa (E : 2368—76, 8—80), *S.g. 7* cl. V. Nistor Valentin (E : 2367—70, 6, 7, 81, 3, 5), Serbănescu Octavian (E : 2367—74), Braunştein Fr. Camelia (E : 2371, 4, 8, 80—4), Marinescu Elena (E : 2371, 4, 8, 80—4), *L. 3* cl. X. Bucur Camelia (7119—21, 31, 4, 5, 85, 8, 92, 4, 5, 8).

BRĂNEŞTI (TÎRGOVIŞTE). *S.g. cl.* VIII. Rădulescu Corina (E : 2381—5, 8, 95, 9—401, 9).

BREASTA (OLTENIA). *S.g.* cl. VII. Barbu Lenuţa (E : 2370, 6, 7, 81, 5, 95, 8, 400), Ionaşcu Constanţa (E : 2369, 70, 5—7, 81, 95, 8), Ungureanu Victor (E : 2367—70, 4—7, 80—2), Untaru Elena (E : 2369, 70, 5—7, 81, 5, 91, 8).

BREAZA. *L. 1.* cl. X. Cartoaje Vasile (7119—25, 7, 9—36, 8, 40, 2, 4—6, 50, 1, 5, 63, 9, 83, 5, 8—97, 9, 200, 10, 3, 5), Ternuţan Eugen (7130, 1, 4—6, 40, 63, 85, 8, 222, 4, 43), Tăleanu C-tin (7119, 20, 2, 4, 6—8, 30—8, 63).

BUCUREŞTI. *Ş. g. 3* cl. VIII. Schwefelberg Alexandru (E : 2374, 4, 5, 7, 8, 80, 5, 8, 94, 6, 7), Staicu Fh. (E : 2377, 81, 4, 5, 9, 400, 2, 4), *Ş. g. 4* cl. VI. Udrea Bogdan (E : 2368—72, 7, 81—5), *Ş. g. 5* cl. VII Gelles Ioana (E : 2367—74, 6—80), *Ş. g. 10* cl. VIII Weintraub Andrei (E : 2367—80), *Ş. g. 26* cl. VIII Ştefănescu Florin (E : 2367, 9, 70, 80—5, 7), *Ş. g. 50* cl. VII Ianuş Gh. (E : 2367ă85, 7—89, 400—6; 7119, 85), *Ş. g. 56* cl. VII. Voinescu Radu (E : 2368—71, 81—4, 97, 401, 4, 5), *Ş. g. 64* cl. VIII. Sarău Adrian (E : 2369, 73—5, 81—3, 9), *Ş. g. 99* cl. VII. Russu Eugen (E : 2368—70, 4—5, 400, 1, 4), *Ş. g. 103* cl. VIII. Marinescu Viorel (E : 2368—71, 3, 4, 8, 80), *Ş. g. 121.* cl. VIII, Donescu Florin (E : 2371—4, 6—80), *Ş. g. 122*, cl. V. Călin Liliana (E : 2367—70, 2, 9, 81, 3—5, 95), cl. VII. Brătescu Şt-Anca (E : 2373—6, 8—84, 7, 9, 90, 3, 406, 9), Leonte Viviana (E : 2367, 9—71, 4—6, 9, 80), Rothschild Mihai (E : 2374, 5, 81—4, 7, 9, 90, 3—402), cl. VIII. Drăguşin Adrian (E : 2367—75, 7—80, 5), Florică Georgiana (E : 2367, 71, 81—4, 9, 93), Nistor Irina (E : 2367—72, 4—6, 8, 80), *Ş. g. 128* cl. V. Rigolete Nicoleta (E : 2368—71, 4, 7, 9, 80), cl. VI. Mănescu Diana (E : 2368, 80, 6, 81—3, 95, 6), Mareş Alina (E : 2367—74), Matei Cornel (E : 2371—8), Murgu Anica (E : 2369—71, 6, 81—3, 5), cl. VII. Marinescu Bogdan (E : 2369—71, 3—6, 9, 80), cl. VIII. Ciontea Mariana (E : 2369—71, 4, 6, 7, 73, 9, 80), *Ş. g. 128*, cl. VIII. Ciora Mihaela (E : 2369—71, 3, 4, 6, 7, 9, 80), Gruia Vladimir (E : 2369—71, 3—7), *Ş. g. 145*

cl. VII. Şerban Radu (E : 2368—71, 3—7, 80), cl. VIII Cicu Marian (E : 2373, 5—7, 81—5; 7131), Logigan Dumitru (E : 2374, 7, 81, 2, 5, 95, 9, 401, 2), Papasi Zoiţa (E : 2373, 7, 9, 81—5, 4—4; 7131), Stoica Silvia (E : 2368—71, 3, 5, 7, 81, 2, 4), *Ş. g. 156.* cl. VIII. Ştefănescu Dan (E : 2374—84; 7130), *Ş. g. 166* cl. VII. Cernescu Gabriela (E : 2367, 8, 70, 2, 7, 80—5), cl. VIII, Vasilescu Adriana (E : 2381—5, 94—402, 4—6), *Ş. h. 169* cl. VII. Hoisescu Nicolae (E : 2367—76, 8—80), *Ş. g. 173* cl. VI Andrievici Bogdan (E : 2367—76, 8—80), *Ş. g. 189* cl. V. Grigore Natalia (E : 2367—9, 81, 2, 90, 5, 7), Szabo Ana (E : 2367—9, 70, 81—3, 95). *L. 1.* cl. IX Călin Andrei (E : 2394—405, 8, 9, 400, 1—5), Drăgan Monica (E : 2394—405, 8, 9, 400, 1—5), Popescu Viorel (E : 2394—405, 8, 9, 400, 1—5), Sterian Daniela (E : 2394—405, 8, 9, 400, 1—5), Vasiliu Doina (E : 2394—405, 8, 9, 400, 1—5), Dragostin Cătălin (E : 2395, 6, 8—401), Florescu Arleziana (E : 2395, 7, 400, 1, 2, 4, 9), Preoţescu Aurelian (E : 2367, 71, 3—5, 8—80), Bică Elisabeta (E : 2367—76, 8—80), Boroandă Sanda (E : 2367—76, 8—80), Călin Andrei (E : 2367—76, 8—80), Drăgan Marian (E : 2367—76, 8—80), Gold George (E : 2367—76, 8—80), Marcu Viorel (E : 2367—76, 8—80), Mihai Marian (E : 2367—76, 8—80), Petrache A. Paul şi Vişner Elena (E : 2367—76, 8—80), cl. X A. Adrian Sorin (7188, 90, 3, 5, 9, 210, 6, 7, 21—4, 7, 33, 4, 40, 3, 6, 7, 58), Carop Victor (7130, 1, 5, 85, 8, 216, 9—24, 47), Chirca Mihai (7131, 5, 85, 8, 216, 9—24, 35), Murgu M. Horea (7185, 8, 216, 7, 9—26, 31), Georgescu V. M. Dan (7119—24, 29—32, 35, 6, 85, 8, 98, 216, 7, 20—6, 31), Ionescu George (7118, 217, 20, 2—5, 84, 5, 8—300), Şerbănescu Maria (7119, 30, 1, 4, 5, 85, 8, 216, 20, 2—4), cl. X G Andrei Aurel (7119, 20, 9, 30, 2, 4—6, 51, 63, 85, 8, 90, 4), *Croitoru Stibina* (7119—22, 4, 9—32, 4—6, 8, 40, 63, 4, 85, 8, 90, 2—4, 6, 210, 6—9, 21—4, 6, 35, 9, 43, 5, 7, 9), *Popa Cornel* (7119, 20, 2, 4, 7, 30, 1, 5, 6, 40, 51, 85, 8, 90, 3, 216—20, 2, 3, 6, 9, 20, 2—5, 36, 9, 45, 86, 7), 224), Sbîrnea Mihai (7119, 20, 4, 7, 9—33, 5—8, 45), Feişeanu Cornel (7120, 2, 4, 7, 95, 8, 216, 7, 22—5), Fronaru Aurelian (7119, 20, 30, 1, 5, 6, 8, 85, 216, 20, 2—4, 6), Cl. XI Răzvan Milene (7216—8, 22—4, 82—5, 8, 301), Udrea Mircea (7120, 2, 4, 40, 63, 85, 8, 98, 216—9, 22—4, 35), *L. 5* cl. VII Doran Andrei (E : 2372—5, 8, 80, 5, 8, 9, 93), cl. VIII Bucur Ion (E : 2367—74, 6—80), Stănculescu Alexandru (E : 2367. 9, 70, 3, 9—81, 3), cl. IX. Kauffman Liviu (E : 2378—80, 409; 7216, 22—4, 30, 31, 8, 51, 63), cl. X. *Manolache Nicolae* (7166—8, 107, 9—36, 8—40, 2—6, 8, 51, 5, 9, 63—59, 85, 8, 90, 4, 5, 8, 9, 210). *L. 6* cl. VIII Weiner Irina (E : 2367—75, 7—80; 7119). *L. 7* cl. VIII. Redlinger Daria (E : 2367—85, 9, 90—3), cl. X George Ion (7135, 6, 8, 45, 63, 90, 2,.4, 5, 210, 42, 4, 7). *L. 8* cl. IX Cinteza Mircea (E : 2378—80, 91—3; 7126, 7, 9—32, 6. 85, 8, 94), Tănăsescu Sanda (E : 2378—80, 91—3, 407—9; 7126, 7, 9, 30—3, 6, 85, 8, 84), *L. 10* cl. VII Corici Cezar (E : 2367—90, 4—7, 9—401, 3—5; 7119, 51), Gafiţa Gabriel (E : 2377, 81—5, 8, 9, 93), cl. IX Dumbravă Mihaela (E : 2342, 7, 94, 7, 400, 1, 4—6, 9), Mihăileanu Nicoleta (6998, 9, 7119, 27, 831, 85, 8, 224, 36, E : 239). *L. 11.* cl. IX. Claimar Mişu (2378—80, 92, 409; 7119, 30, 2, 85, 219, 22), Petrescu Corneliu (2378—80, 9—3, 409; 7119, 27, 30, 1, 85, 8), Popescu Vladimir (E : 2378—80, 91—3; 7119, 20, 30, 1, 85, 8), Tigoiu Victor (E : 2378—80, 92, 3; 7119, 20, 6—31), cl. X. Bădescu Constantin (7120, 2, 4, 7, 31, 5, 6, 8, 63, 85, 8, 216, 22, 4), cl. XI. Luţaşu Marius (7119—22, 5, 35, 43, 78, 85, 8, 94, 5, 216, 7, 8, 9, 24, 43), *L. 12* cl VI Rizescu Marieta (E : 2367—74), cl. X. Chiriban Cristian (7719, 30. 1, 4, 6, 85, 8, 216, 22—4, 6), Rogalschi Mircea (7119, 23, 5, 6, 30, 1, 5, 6, 45, 60, 3, 90, 2), *L. 13* cl. X Lăzărescu Răducu (7120, 84—8, 90, 2—7, 210), cl. XI. Căpraru Valentin (7119, 20, 23, 30, 2—7, 85, 8), Liţă Aurel (7119—22, 4, 5, 7, 31, 46, 8, 55, 63—5), Stoenescu Vladimir (7119, 20, 2, 4, 31, 4, 51, 63, 88, 216, 7, 23, 4), Şerban Cristian (7119—22, 27, 9—31, 3—6), *Vasilescu Dan* (7119—25, 7—31, 33—40, 2—6, 8—52, 4—60), *L. 15* cl. IX. Antonescu Bogdan (E : 2378—80, 91—3, 409; 7130, 1, 85, 8, 224), *L. 16.* cl. VIII f. frecvenţă Drăguşin Alex. (E : 2367, 9—72, 4—80; 7124, 7, 31), *L. 17* cl. IX Roman Cornel (E : 2379, 80, 91—3; 7119, 20, 7, 30, 1, 88, 94), cl. X. Avramovici Valentin (7119, 20, 2, 30—2, 5, 6, 44, 85, 8, 9, 92—4, 7, 236), cl. XI. Suciu Paul (7119, 21, 2, 5, 7, 30—2, 4—6, 8, 9, 42—6), *L. 22.* cl. X. Cristoloveanu Sorin (7119, 20, 2, 7, 31—6, 51, 5, 60, 85, 8, 90, 2, 4, 216, 22—4, 6, 43), Roşca Dan (7110, 20, 2, 4, 6—32, 81, 4, 5, 8, 91), *L. 24* cl. VI. Herescu Rodica (E : 2367—72, 4, 80), cl. VIII Frişov Puşa (E : 2372, 7—80, 2—5, 7, 9, 402, 4, 7151), *L. 25.* cl. IX Adam N. Silviu (E : 2378—80, 92; 7119, 22, 6, 30—2, 85, 8), cl. X. Florescu D. Victor (7119, 20, 2, 6, 30—2, 4, 6, 85, 8, 222), Mihai Adrian (7119, 22, 4, 6, 9—31, 4, 6, 85, 8, 235), Odobescu Grigore (7119, 20, 2, 4, 6, 30—2, 4—6, 85, 8), Rădulescu Nicolae (7119, 2, 6, 30—2, 4, 6, 85, 88, 222), *L. 26.* cl. X. Cotariu Roland (7130, 1, 4—6, 8, 88, 90, 2, 4, 5, 8, 234, 9), *L. 27.* cl. VII — Georgescu Dan (E : 2368—70, 7, 80, 3—5, 90), Mladin Victorina (E : 2378, 73, 7, 80, 2—5, 7—10), *L. 28* cl. VII (Papacostea Daniel (2381—5, 8—90), cl. VIII Capatos Raluca (E : 2381—5, 9, 90, 2, 3, 9, 400, 2), Stroe Marian (E : 2367—80), *L. 32.* cl. V. Ionescu A. Cristina (E : 2368—70, 6, 7, 81—3), cl. VII. Celenti Dan (E : 2367, 73, 7, 80—5, 8—90, 2—6, 8—405), Papadima St. (E : 2367—80), Popovici Liviu (E : 2468, 9, 71, 76; 7127, 31, 40, 51), cl. XI. Bacivorod Ioan (7119, 20, 2, 4, 31, 4, 50, 63, 88, 216, 7, 23, 4), *L. 33.* cl. VIII. Albu Sorin (7127, 30;

E : 2367—80), *L. 34* cl. XI. Neacşu Gh. (7119—22, 4, 5, 7, 31, 5, 6, 8, 44, 51, 5, 63, 5), *L. 35* cl. VIII Sabău San (E : 2367—74, 6, 8—80), L. *39* cl. VIII Pantelimon Filomella (E. 2368, 76—85, 92, 4—8, 400, 1, 7131), Ş. de muzică 2 cl. VII. Varzan Viorel (E : 2368—70, 81, 3, 95, 6, 8).

BUDILA (BRAŞOV). *Ş. g.* cl. VIII Szocs Domnica (E : 2369, 70, 7, 81—3,5).

BUHUŞI (BACĂU). *L. 1* cl. VII. Drîmbe Ovincu (E : 2367—74, 6, 8—80).

BUŞTENI. *L. 1* cl. VII. Mateescu Alexandru (E : 2369, 70, 4, 3, 80—35, 8, 9).

BUZĂU. *Ş. g.* 13 cl. VIII. Spulber Veta (E : 2367, 70, 3—7, 80), *L. 1* cl. IX. Manea Dumitru (E : 2377—80, 91—3, 409; 7127, 31, 85, 8), Manea Nicolae (7120—2, 4, 7, 30, 1, 4, 6, 8, 44, 5, 50, 85, 8, 94, Casa de copii şcolari cl. VIII. Wester Gerda (E : 2367—70, 3—7, 9, 80).

BUZIAŞ. *L. 1* cl. VI. Antonescu Mirela (E : 2367, 9, 71—4, 6, 8), Drăgan Viorel (E : 2367, 9, 71—5, 8, 80), cl. VII. Micsa Rodica (E : 2367, 9, 71, 2, 4, 6, 8—80).

CALAFAT. *L. 1.* cl. XI. Voican Dan (7119, 21, 2, 4, 5, 30, 1, 6, 8, 85, 217, 8, 22—4, 7).

CARACAL. *L. 1* cl. XI. Rădulescu Sever (7122, 4, 7, 30, 1, 68, 85, 211, 6, 7, 22, 3, 6, 45).

CARANSEBEŞ. *L. 1* cl. VI. Vornica Alexandru (E : 2367—76, 8, 80), cl. X. Fred Bartolf (7120, 2, 4, 32, 4—6, 63, 85, 8, 90, 3—5, 216, 9, 22—4, 35, 9, 43), *Ştefănescu Mircea* (7119—24, 7, 9—31, 5, 6, 8, 42, 4, 5, 85, 8, 90, 3, 4, 7, 9, 210, 3, 6, 7, 9, 22, 7, 34, 6, 47).

CARAULA (OLTENIA). *Ş. g.* cl. VIII Ganea Bebe (E : 2357, 9, 70, 1, 4, 6—9).

CALAN (HUNEDOARA). *L. 1* cl. XI. Cubineţ Ion (7122, 31, 6, 40, 3, 5, 63, 85, 8, 90, 7, 9).

CĂLĂRAŞI. *L. 1* cl. X. Formache Constantin (7119—22, 4—7, 31, 5, 6, 44, 59), Manole Ion (7119, 20, 9—32, 4—6, 44, 8, 51), Vasile Eugen (7119, 20, 2, 6, 7, 9—32, 4—6, 42, 4—6, 8, 51, 5, 69, 9).

CĂLIMĂNEŞTI (OLTENIA). *L. 1* cl. XI. Giornoiu Doina (7120—2, 4, 31, 44, 85, 8, 211, 7, 24, 47).

CISNĂDIE (BRAŞOV). *L. 1.* cl. VII. Constantin Maria (E : 2367, 9, 70, 1, 6, 9, 80 ; 7131).

CIUGAD (HUNEDOARA). *Ş. g.* cl. VII. Anghel Gh. (E : 2368—74, 6, 80).

CÎLNIC (GORJ) *Ş. g.* cl. VII. Ciocîrlie Mioara (E : 2367—73, 5, 7, 80).

CÎMPENI (CLUJ) *L. 1.* cl. IX. Mucea Ion (E : 2391—3, 409; 7136, 51, 85, 8, 200, 2—4), cl. X. Dura Traian (7119—22, 4, 5, 7, 30—2, 5, 6, 40, 6, 55).

CÎMPIA TURZII. *L. 3.* cl. X. Duicu Alexandru (7119, 20, 2, 4, 7, 9—31, 4—6, 8, 40, 5, 63, 85, 8, 94, 5, 7, 9, 22, 3, 4, 6, 31, 44), Selejean Horia (7119, 22, 7, 9—31, 51, 66, 85, 8, 220, 2, 3)

CÎMPINA (PLOIEŞTI) *L. 1.* cl. VII. Gheorghiu Valentin (E : 2369—72, 7, 81—5), Ţecu Dumitru (E : 2369, 70, 2, 4, 6, 7, 81, 98, 401, 4), cl. X. Alexandriu Doru (7119—25, 7, 9—32, 4—6, 40, 4—6, 51, 9, 63, 8, 9, 78, 84—6, 8, 90, 2—4, 7), Constantinescu Florin (7119, 22, 4, 30—2, 4, 5, 8, 85, 94, 245), Ivaşcu Florin (7120, 2, 4, 38, 40, 6, 85, 8, 92, 213, 9, 20, 2—5, 36, Stoian Luminiţa (7130, 4, 6, 63, 85, 8, 216, 9, 20—4)? 1. 2. cl. VI. Mihălcioiu Cătălin (2367, 9, 70, 4, 6, 7, 81, 3, 5), Opriş Silviu (2367, 9—72, 4, 7, 81—3, 5), cl. X. Ungureanu Emil (7119, 22, 30, 1, 4, 6, 63, 85, 8, 216, 7, 22, 4, 36), cl. XI. Filipescu Remus (7121, 2, 5, 35, 6, 40, 85, 8, 94, 216, 7, 22—4, 7), Sfetcu Sergiu (7119—25, 30, 1, 4, 6, 63).

CÎMPULUNG MOLDOVENESC. *L. 1* cl. IX Dragotă Stelian (7123, 6, 7, 9—13, 5, 9, 45, 6, 51, 9, 63), cl. X. Popescu Ovidiu (7119, 22, 3, 5—32, 5, 6, 9, 45, 6, 51, 9, 63), L. militar cl. XI Lau Gh. (7119—22, 4, 30, 1, 5, 8, 43, 5, 50, 63, 4, 85, 8, 92, 4—7, 202, 10—12), Navrady Eduard (7120, 4, 5, 7, 30, 1, 65, 71, 85, 8, 92, 4).

CÎMPULUNG MUSCEL. *L. 1* cl. X. Hurdubeţiu Sorin (7119, 20, 4, 5, 30, 1, 4, 6, 44, 63, 85, 8, 219, 20, 2—4).

CLUJ. *Ş. g. 1* cl. VII. Coţiu Neguţa Lia (E : 2367, 8, 73—5, 7, 85, 9, 93). *Ş. g. 2* cl. VIII. Comănescu Sorin (E : 2394—7, 9—404, 6, 9), *Ş. g.* 5 cl. VIII. Pop Traian (E : 2368—70, 2—4, 6, 7, 9, 94, 5), *Ş. g. 7* cl. VII. Zglobiu Nicolae (E : 2371, 2, 4—83). *L. 1* cl. VIII Mureşan Alexandru (E : 2356, 7, 9, 68—70, 7, 85), *L. 2. Emil Racoviţă* cl. VII. Surtea Monica (E : 2369—71, 5, 6, 83, 4, 9), cl. VIII. Gavrilă Nicolae (E : 2370, 3, 6, 80, 1, 3, 5, 95, 402, 4), *L. 3 Gh. Bariţiu* cl. V. Rădulescu Mircea (E : 2370, 7, 81, 2, 94—6, 8, 404), cl. VI. Roşcău Manuela (E : 2367, 9—74, 6, 8—80), cl. VIII. Hanga Rodica : (E : 2368—70, 5, 98, 400—2), Negoiţă Bogdan (E : 2370, 1, 4, 6, 81—4, 98, 400, 4), Popescu Dana (E : 2395, 8—402, 4, 6), Rădulescu Şerban (E : 2370, 1, 3, 8, 92, 5, 9, 403, 4), Vornicel Daniela (E : 2368, 73—6, 8, 9, 401, 2, 4), *L. 4 Gh. Coşbuc* cl. VI. Băjănică Stela (E : 2368, 701, 1, 81—3, 7, 402), cl. VII. Marino Florin (E : 2301—4, 7, 9, 94, 6, 8, 400—2), cl. X. Cîmpeanu Radu (7120, 2, 4, 31, 4—6, 63, 85, 6, 8, 216, 7, 24), *L. 7* cl. VIII. Gelect Elisabeta (E : 2367—71, 4, 6, 8—85, 7, 9, 95—9, 400, 1, 4), cl. XI. Kovacs Ladislau (7144, 68, 210, 6, 7, 22—6, 36, 47, 61), Pusztar Susana (7119—22, 4, 5, 30, 1, 43, 4, 51, 5), *L. 8* cl. X — Stoian Daniela (7119, 22, 4, 30, 1, 85, 8, 90, 217, 9, 22—4), cl. XI. *Farkaş Petru* (7119—33, 5, 6, 9, 42—6, 8, 50—3,

7, 9, 60, 3, 9, 78—85, 8, 90, 2, 4—6, 8—200, 2, 4, 10, 1, 3—2, 7, 31—7, 40—3, 6, 7, 9—52, 8, *L. 9* cl. VIII. Suciu Cristina (E : 2368—71, 4, 7, 9, 8), *L. 10.* cl. VI. Oprişiu Ovidiu (E : 2372—7, 81, 3, 5), *L. 11* cl. IX. Hadhasy Judith (E : 2378—80, 91—3, 408, 9; 7129—31, 85), *L. 12* cl. X. Vitca Gavril (7119, 30—2, 4, 5, 40, 22, 16, 20, 2, 4, 6), *L. 15* cl. V. Dăncuş Călina (E : 2367—71, 4, 6, 7, 82, 5), Dăscălescu Lucian (E : 2369, 70, 4, 6, 7, 80, 2, 5), Onea Gabriela (E : 2369—71, 81—4, 94—6), Tigăreanu Sorin (E : 2371, 6, 81—3, 5, 95, 6), cl. VI. Copitu Mariana (E : 2367—70, 4, 6, 83, 5, 95), Iancic Pepinella (E : 2369—71, 4, 6, 8, 79, 81, 2), Ilisie Marina (E : 2367—9, 71, 2, 4, 6, 9), Păran Dan (E : 2367—71, 3, 4, 6), Seliceanu Ioan (E : 2368—71, 6, 8, 81—3), Vartolomei Elena (E : 2367—70, 4, 6, 81, 3, 5, 400), cl. VII. Fechete Sorin (E : 2367, 8, 70, 1, 4, 6, 7, 81, 2), Horvath Viorica (E : 2367—70, 4, 6, 81—3), Iancic Buba (E : 2369, 70, 4—6, 8, 9, 81, 2, 4), Olteanu Dorina (E : 2367, 8, 70, 1, 4, 6, 81—3), Oprisin Adrian (E : 2372—4, 6, 7, 81, 3, 5), Tătaru Aurica (E : 2367, 9—71, 4, 6, 81—3), Topîrdău Georgeta (E : 2367—70, 2, 4, 6, 81—3), Tripan Antoaneta (E : 2367—71, 4, 6, 81—3), Vuscan Adriana (E : 2369—71, 4, 6, 81—3, 95, 404), cl. VIII. Coroian Sanda (E : 2367—70).

CONSTANŢA. *Ş. g. 12* cl. VIII. Ioaneş Mircea (E : 1381—5, 8—90), *L. 1.* cl. VIII. Gheorghiu Dan (E : 2367, 71, 2, 4—80), Sandu Onarina (E : 2367—75, 8—80, 2—4), cl. IX. Perşoi Radu (E : 2378—80, 9—3 ; 7127, 9—31, 85, 95, 222), cl. X. Omer Adrian (7188, 216—8, 21, 35—7, 47), Văituş Anca (7119, 29, 43, 6, 73, 4, 90, 5, 216, 7, 24, 5), *L. 3* cl. VII Radu Mimi (E : 2369, 70, 6—8, 81, 3, 92), cl. VIII. Urechescu Dan (E : 2369, 70, 6—8, 81—3, 5), Vlase Liliana (E : 2369—71, 3, 6—8, 80, 1, 3, 92), cl. IX. Achif Jugsel (E : 2378—80, 91—3 ; 7119, 20, 7, 30, 1, 6, 8, 9, 85, 8, 94, 8, 9, 204), Brînzăneanu Luminiţa (E : 2378—80, 92 ; 7119, 27, 31, 8, 85, 8, 99, 204). cl. XI. Mocanu Eugenia (7119—25, 31, 40, 3, 4, 85, 8, 90, 4—6, 8, 9, 202, 10, 1).

CORABIA. *Ş. g.* cl. VII. Molnar Marta (E : 2367—9, 71, 3, 4, 6, 7), cl. XI. Sandu Ion (7185, 8, 94, 5, 9, 204, 16, 7, 9, 20, 2—4, 34, 5, 51), Voinea Marrel (7121, 2, 7, 30, 4—6, 8, 40, 5, 6, 52, 4, 64).

COSTEŞTI (ARGEŞ). *L.* 1. cl. VI. Ioneci Ion (7120, 2, 4, 31, 4, 6, 44, 85, 8, 217, 24, 5), Negurescu Nicolae (7119—25, 30—2, 4, 6, 44, 5, 51, 9, 63, 8, 5, 8, 99).

COSTEŞTI (PLOIEŞTI). Ş. g. cl. VII Predoiu Alexandrina (E : 2367, 70, 5—7, 81, 3, 5), cl. VIII. Caloian Margareta (E : 2367, 71, 6, 7, 81, 3, 5, 92, 5, 6, 402).

COSTIŞA (BACĂU). Ş. g. cl. VIII. Stan C. (E : 2369, 70, 6, 7, 81, 3, 5, 95).

COVACI (OLTENIA). *L. 1* cl. VI. Preoţescu Viorica (E : 2367—74, 7).

CRAIOVA. *Ş. g. 2* cl. VIII. Dăescu Cornel (E : 2367—71, 6, 80, 90, 401, 4), *Ş. g. 8* cl. VIII. Răduilă Valeria (E : 2367—72, 4—80, 7131), *Ş. g. 9* cl. VII. Voicun Eugen (E : 2367—80), *Ş. g. 24* cl. VII. Ciulin Luminiţa (E : 2381—4, 95—400, 2, 3, 5), *L. 1* cl. VIII. Kalpazidu Sofia (E : 2367, 9, 70, 2—4, 7—80), Ponovescu Cristina (E : 2367, 9, 70, 3, 7—80) cl. X. Bălan Virgil (7159, 20, 2, 4, 30, 1, 5, 6, 85, 8, 222), Bucă Florea (7119, 27, 30, 2, 4, 5, 65, 8, 216, 22—4), Chirilă Nicolae (7119, 20, 4, 7, 31, 5, 6, 46, 79, 85, 8, 90), Diamandescu Aurel (7119, 20, 2, 4, 7, 30, 1, 4, 6, 40, 51, 95), Florian Horia (7119, 20, 2, 4—6, 86, 8, 93, 5), Neagu Gabriel (7119, 20, 2, 4, 7, 30—2, 4—6, 8, 5), Popescu Adrian (7119, 20, 2, 4, 7, 30, 1, 4—6, 50, 4, 51, 63), Slabu Viorel (7119, 20, 2, 4, 7, 30, 1 4—6, 40, 4, 79), Turcu Ilie (7119, 20, 2—4, 7, 30—2, 4—6, 8, 45, 6, 50, 3), Tepuş Nicolae (7119, 20, 2, 4, 7, 30—2, 4—6, 8, 51), *L. 2* cl. IX. Căldăraru Florin (E : 2378—80, 91—3 ; 7119, 29—31, 6, 85), cl. X. Calotă Ionel (7119, 22, 7, 9, 32, 4, 5, 40, 9, 55, 63, 225, 8, 216), Cristovici Mihai (7119, 8, 7, 9, 35, 40, 55, 63, 85, 8, 93, 216, 22—4), Dincă Melania (7121, 2, 7, 9—2, 4—6, 8, 40, 63, 85, 8, 216, 7, 9, 22—4). Georgescu Adrian (7119, 22, 7, 9—32, 4, 5, 40, 85, 8, 216, 24), Gurqn Tiberiu (7119—22, 4, 7, 9, 30, 2—6, 8, 40, 2, 5, 51, 2, 63, 85, 8, 90, 92—4, 8, 204, 10, 3, 16, 7, 22—6, 35, 6, 9, 43, 5), Nigrini Adrian (7119, 27, 9—32, 4, 5, 8, 63, 85, 8, 216, 23, 4). Niţă Petre (7119, 22, 7, 9—32, 4, 5, 40, 63, 85, 8, 94, 216, 22, 4), Preoteasa Gh. (7119, 27, 9—32, 4, 5, 8, 63, 85, 8, 216, 23, 4), Turturică Elena (7119, 27, 9—32, 4, 5, 8, 85, 8, 94, 216, 22—4), cl. XI — Diaconu Domnica (7124, 7, 9—32, 5, 8, 40, 88, 216, 22, 3), Topan Dumitru (7119, 202, 10, 6, 7, 9, 20, 2—5, 7, 36, 47), *L. 4* cl. XI. Ionica I. Alexandru (7119, 21, 2, 4, 31, 85, 92, 6, 8, 216, 7, 9, 21—7).

CREVEDIA MICĂ (BUCUREŞTI). *L. 1.* cl. X Cristescu Cornel (7119, 22, 4, 5, 30, 1, 5, 85, 216, 9, 22, 3).

CUGIR (HUNEDOARA). *L. 1* cl. VI. Ciuciu Ion (E : 2381—4, 95, 6, 8, 9), cl. XI. Dologa Ion (7119—25, 7, 30, 4, 5).

DEJ. *L. 1.* cl. X. Baba Alexandru (7124, 31, 5, 6, 40, 80, 3, 8, 94, 216, 9, 22, 3). Bacinschi Alina (7127, 30—2, 6, 40, 85, 8, 92, 4, 235, 9, 40), Rusu Ioana (7127, 30—2, 6, 40, 85, 8, 92, 222, 3, 35), *L. 2.* cl. VIII. Morariu Marcel (E : 2367, 9—74, 6, 7, 9, 80), cl. X. Borth Ferenc (7120, 2, 4, 5, 7, 9—31, 4—6, 40, 51, 63, 220), Săplăcan Ion (7119, 20, 2, 7, 30, 1, 6, 40, 51, 63, 75, 88, 95, 216, 20, 2, 4).

DETA. *L. 1.* cl. VI. Cirici Mariana (E : 2367—80, 81—4, 90), Ciurea Mioara (E : 2375—9, 85, 7—9), Mocofan Cornelia (E : 2371—7, 80—4).

DEVA — S. *pedag.* cl. VI. Borşa Sorin (E : 2367—72, 4, 400).

DOLHASCA (SUCEAVA). *L. 4.* cl. X. Alexandrescu Clement (7119, 34, 5, 79, 83,4, 90, 215, 9, 23, 4, 46).

DOROHOI. *Ş. g.* cl. VII. Vladimirescu Gabriela (E : 2367—3, 7), cl. VIII. Corniciuc Dumitru (E : 2381—3, 89, 95, 9, 402, 4), *L. 2* cl. VIII Minea Mihaela (E : 2370, 5, 6, 81—3, 92, 5—, 9), *L. 2* cl. VI. Jaluba Corneliu (E : 2369, 70, 7, 81, 3, 5, 95, 402), cl. IX. Jaluba Petru (E : 2378—80, 91—3, 407, 9; 7129, 31, 85, 235, 7).

DRĂGANU (ARGEŞ). *Ş. g.* cl. VIII. Diaconescu Natalia (E : 2381—3, 5, 95, 400, 1, 9).

DRĂGĂNEŞTI OLT. *L. 1* cl. VI. Mihalache Florica (E : 2367—74), cl. X. — Durigu Mircea (7119, 20, 2, 4, 30, 1, 5, 6, 8, 40, 5, 6, 63).

DRĂGĂŞANI (ARGEŞ). *L. 1* cl. VII. Brănescu Valentin (E : 2370, 6, 81—4, 95, 8).

DUMBRĂVENI (OLTENIA). *Ş. g.* cl. VI. Toarnă Matei (E : 2369—71, 3, 4, 6, 81—3, cl. VII. Popescu Valentina (E : 2369, 70, 2, 6, 7, 81, 3, 93, 5, 7), Vulpe Veronica (E : 2369) 73, 5, 7, 9, 81—5, 93), cl. VIII. Ciucur Ionia (E : 2376—80, 2, 3, 5, 1, 92). Morancea Aristel (E : 2382, 5, 8, 90, 4, 5, 400, 1, 4).

FĂGĂRAŞ. *L. 1* cl. VIII. Laschescu Dorin (E : 2367, 9—71, 3—5, 9, 81), Sajin Gh. (7122, 30, 1, 4—6, 85, 8, 216, 20, 2—4), cl. XI. Ortocol Gh. (7119, 21, 5, 30, 4—7, 40, 2, 3, 59, 63, 5).

FĂLTICENI. *L. 2.* cl. XI. Alionte Victor (7119, 20, 2, 4, 40, 68, 90, 216, 7, 9, 22—4), Butnaru Costică (7119—22, 4, 35, 44, 217, 9, 22, 3), Popa Gheorghe (7119—21, 31, 5, 40, 68, 85, 9, 216—20, 2—5, 7, 47), Sitaru Mihai (7119—22, 4, 30—2, 5, 6, 40, 2, 4, 63), Absolvent Gorovei Sorin (E : 2367—80; 7119—22, 4, 34).

FETEŞTI (BUCUREŞTI). *L. 1* cl. 10. Anghel Paraschiva (7127, 31, 4—6, 85, 8, 94, 216, 7, 20, 4), Gheorghe Gheorghe (7119, 20, 6, 31, 85, 8, 92, 4, 214, 9, 24, 5), Dascălu Virginia (7119, 20, 6, 31, 85, 8, 92, 4, 214, 9, 24, 5), Mladinovici Georgeta (7119, 20, 61, 31, 85, 8, 92, 4, 214, 9, 24, 5), Enache Valentin (7119, 20, 6, 31, 85, 8, 92, 4, 214, 9, 24, 5). Vasile Marioara (7119, 20, 6, 31, 85, 92, 4, 214, 9, 24, 5), Iordache Vasilica (7119, 20, 6, 31, 85, 8, 92, 4, 214, 9, 24, 5), Moldoveanu şi Minculescu (7119, 20, 6, 31, 85, 8, 92, 4, 214, 9, 24, 5), Toncă Aurica (7119, 20, 31, 5, 78, 85, 8, 92, 4, 216, 7, 22), cl. XI. Mitache Elena (7119, 20, 2, 31, 5, 6, 85, 8, 92, 216, 7, 9, 22, 4, 7), Moldovan Monica (7119, 20, 35, 85, 8, 94, 216, 7, 9, 20, 2, 4, 6, 47), Stănescu Matilda (7119—22, 30, 1, 5, 6, 85, 8, 92, 4, 6, 216, 7, 9, 20, 2, 4, 7), Dascălu Maria (7119, 20, 2, 31, 5, 6, 25, 8, 92, 4, 216, 7, 9, 22, 4, 47).

FIENI (PLOIEŞTI). *Ş. g.* cl. VI. Holban Cristina (E : 2367, 8, 70, 2, 7, 81—3), Jipescu Liliana (E : 2381, 2, 5, 81, 95, 8—401), cl. X. Lăzăroiu Gh. (7119—23, 5, 35, 68, 88, 94, 222, 4).

FILIAŞI (OLTENIA). *Ş. g.* cl. VII. Popescu Irinel (E : 2367, 9, 70, 7, 81, 3—5), cl. X. Băluţă Constantin (7119, 22—5, 7, 9—22, 5—6, 40, 4, 50, 1, 60, 9, 85, 8, 9,92—4, 7, 210, 5).

FÎNTÎNELE (PLOIEŞTI). S. *g.* cl. VII. Avram Mihai (E : 2367—74), Avram Ion (E : 2368, 71—4, 6, 81, 2), Bichinescu Elena, Costache Lucia, Dovîncescu Violeta, Ionescu Georgeta, Minculescu Gh., Speteanu Tudor (E : 2367—74, 6).

FOCŞANI. *L. Unirea* cl. VIII. Banei Alexandru (E : 2381—4, 94—6, 8, 9, 401, 3, 4, 9).

FRASIN (SUCEAVA). *Ş.g.* cl. VII. Chirilovici Violeta (E : 2369, 73, 4, 81—3, 5, 400, 4).

GALAŢI. *Ş. g.* 7 cl. V. indescifrabil Doina (E : 2367, 9, 70, 80—4), *Ş. g. 21* cl. VII. Beldie Carmen (2369—71, 8, 81—3, 83, 95, 7, 400—2, 4, 5), cl. VIII. Bolea Gh. (E : 2367, 9, 70, 5—7, 80, 5), Vezeteu Anişoara (E : 2367, 9—71, 4, 6, 7, 9, 80, 5), *Ş. g. 23* cl. VII. Bejan Ovidiu (E : 2382, 5, 9, 92, 5, 9—401), *Ş. g. 24* cl. VII. Cernov Anghel (E : 2381—4, 7, 45, 6, 8, 401, 4, 5), Costiniuc Florin (E : 2379—85, 8, 9, 94—7), Frunză Ion (E : 2381—4, 7, 95, 6, 8, 401, 4, 5), Leibovici Adi (E : 2381—4, 7, 98, 401, 2, 4), Orzechowschi Tichard (E : 2381, 9, 95, 6, 8, 400—4), Savin Gabriela (E : 2381, 2, 4, 7—9, 98, 401, 4), *Ş. g. 26* cl. VIII. Dăscălescu Luminiţa (E : 2367—75, 8, 9), *Ş. g. 27* cl. VIII Goldu Antoaneta (E : 2369, 70—4, 6, 7, 80), Neculai Cornelia (E : 2367—74, 6, 7, 9, 80), Voicu Gh. (E : 2369—73, 5, 6, 9, 80), *L. 1* cl. X. Mărăcineanu Eugen (7119—22, 4, 7, 9—32, 5, 6, 61, 3, 5, 85, 93), cl. XI. *Dragomir D. Mihai* (7119—22, 4, 30, 1, 6, 44, 63, 7, 8, 78, 88, 9, 92, 3, 6, 204, 12, 5—21, 3—5, 31, 5, 47, 50, 1), *L. 4* cl. X. Georgescu Marius (7119, 20, 2, 301, 1, 6, 85, 8, 94, 6, 8, 216, 20), Sărnuţa Eugen (7119, 20, 2, 30, 1, 6, 85, 8, 94, 220, 4), Tiribigea Marcel (7119—22, 4, 5, 7, 9—32, 4—6, 98), *L. 5* cl. XI. Burlac Jenica (7119—24, 30—2, 4—6), *L. 6* cl. VIII. Răduţ I. (E : 2381—4, 95, 6, 9, 400).

GĂEŞTI. *Ş. g. 3* c. V. Rizescu Ştefan (E : 2367—70, 81—4, 95), L. 1 cl. XI. Prundeanu Valentin (7119—22, 4, 30, 1, 5, 6, 52, 63, 85, 8, 94, 6, 304, 16, 7, 9—25, 33, 4, 6, 46, 7).

GĂTAIA (BANAT). *Ş. g.* cl. VIII. Bocsa Adalbert (E : 2367, 9, 70, 2, 5—7, 9, 80 7126).

GHELAR (HUNEDOARA). *L. 1* cl. IX. Mathe Iuliana (E : 2378—80, 92, 3, 407; 7127, 9—31, 85, 235).

GIURGIU. *Ş. g. 3.* cl. VIII. *Isar Aurelian* (E : 2367—85, 9, 90, 2, 4—405, 9), *Ş. g. 7* cl. VIII. *Popescu Dragoş* (E : 2367—85, 7—91, 3—405, 27, 51).

HALEŞ. *S. g.* cl. VI. Dogaru Anghel (E : 2369, 70, 7, 81—5), cl. VIII. Dogaru Vasiliu (E : 2370, 80—4, 95, 400).

HAŢEG (HUNEDOARA). *L. 1* cl. XI. Marton Virgil (7119—25, 7, 9—32, 7—6, 43—6, 51, 63).

HÎRLĂU (IAŞI). *L. 1.* cl. X. Solomon Ady (7128, 9, 32, 6, 63, 85, 8, 90, 2, 5, 216, 9, 20, 3, 4, 35, 46).

HOREZU (ARGEŞ). *L. 1.* cl. VI. Robeci Octavian (E : 2367—72, 4—7), cl. X. Buşe Marcu (2140, 4, 50, 69, 78, 82, 3, 5, 8, 9, 91—3, 7, 9, 202, 12, 5—7, 19—21, 3—7, 31, 2, 4—6, 40, 7, 9, 50, 8, 61), Comănescu Lazăr (7119, 22, 7, 30—2, 5, 6, 51, 5, 63, 85, 8), Munteanu Ion (7119, 30, 1, 5, 6, 40, 61, 63, 85, 8, 223—5), Munteanu Maria (7119, 30, 1, 5, 6, 40, 51, 63, 85, 8, 223—5), Terteori Ion (7119, 31—24, 7, 9—32, 5, 46, 85, 8, 9, 93, 7), cl. XI. Cojocaru Constantin (7119, 20, 2, 4, 5, 7, 31—2, 5, 6, 51, 5, 63).

HUEDIN. *L. 1.* cl. XI. Hoşvar Carol (7121, 3, 4, 5, 30, 5, 43, 216, 7, 9, 24, 5).

HUNEDOARA. *Ş. g.* cl. VI. Duca Antoaneta (E : 2367, 9—71, 7, 81, 3, 9), cl. VII. Simionescu Mihai (E : 2376, 7, 81—5, 8), *Ş. g.* Aurelia (E : 2367. 9, 71, 3, 4, 7, 81, 3, 5), cl. VIII. Palcău Ecaterina (E : 2367, 9, 76, 81—4, 7, 95, 9), cl. X. Loi Maria (7185, 6, 8, 90, 1, 5, 216, 7, 9, 22—6, 35, 9), Lup Iosif (7119, 20, 2, 4, 31, 6 51, 63, 85, 8, 220, 2—4), Oprişa Dan (7119—22, 4, 31, 5, 6, 51, 69, 85, 8, 93, 216, 7, 22, 4, 67), cl. XI. *Căpăţînă Octavian* (7123, 5, 30, 2, 4, 44, 63, 8, 78, 83, 5, 8, 90, 3, 5—9, 204, 11, 4, 6, 6—25, 7, 39).

IAŞI. *Ş. g.* cl. VI. Bălan Carmen (E : 2367—72, 4—80), Davidescu Ion (2365—71, 81—3). Gheorghiţă Dănuţ (2367, 70, 6, 7, 81—4), Goldstein Margit (2367—72, 4,—7, 81—3, 5), Holvatz Sergiu (2367, 9, 70, 2, 4, 6, 8, 81—4, 9), Ifteni Călin (2367—70, 4, 7, 81—3, 5), Leizer Lili (2368—7 . 4, 6, 7, 80, 1, 3, 5, 15, 401), Moscovici Sorin (2368—71, 4, 6, 9, 7, 81—3, 5), Petrăchioaie Eugen (2368—71, 5, 6, 9, 81—4, 9), cl. VII. Alexa Toma (2368—71, 6, 81, 3, 5, 8), Barbu Gelu (2367—71, 3—82), Birză Adriana (2367, 9, 70, 80—4), Călugăreanu Lidia (2367—76, 9, 80), Constantin Costache (2367—74, 6—80), Dumitru Alexandru (2367—71, 3, 4, 68—80), Fotea Paul (2367—76), Hagianu Daru (2367—74, 6, 7, 9, 80), Iancu Rizel (2367—70, 4—8, 81, 95, 8), Malcoci Eugenia (2368—71, 6, 81), Munteanu Adrian (2367, 9, 70—2, 6, 9, 95, 5, 6), Tănăsachi Dragoş (2367, 9, 70, 3, 6—84) Timofte Radu (2368—71, 4—6, 9—83), cl. VIII. Bilonca Radu (2367, 9—71, 3, 4, 6, 7, 9, 80), Drăgan G. (2381—5, 3, 4, 6, 7, 9, 80), Drăgan G. (2371—5, 9, 95—404), Horer Silvia (2367, 70, 3, 4, 5, 7, 8, 80, 81, 85), Radu Drişcu (2367—72, 4, 6, 85, 9, 90), *Ş. g. 12.* cl. VIII. Ionescu Carmen (2370, 1, 6, 80—3, 9, 95, 8), Pescaru Carmen (2369, 76, 81, 2, 4, 94, 5, 404), *Ş. g. 14* cl. VIII Poroşnicu Gabriela (2371, 5, 7, 8, 81—5), Stancu Viorel (2372, 6, 8, 9, 80—4, 94, 6, 7, 401, 4), *L. 1* cl. VIII. Corniol Simion (2368—73, 6, 8, 9, 80), Mirşonca Magda (2371, 4, 6, 7, 81, 5, 400, 2), Nistor Silviu (2367—80), Carniol Simona (2381—4, 8—90, 3), *L. 2.* cl. VI. Davideanu Cătălina (2378—70, 80—5, 7, 9), Romanescu Dan (2368—74, 6, 9), cl. VIII. Polcovnicu Alina (2367—71, 3—5, 80), *L. 3.* cl. VI. Gheban Cristina (2368, 70, 1, 3—6, 98, 401), Lupescu Silviu (236, 7, 9, 71, 2, 4—8, 80), Popescu Alexandru (2381—4, 95, 4, 8—401), cl. VII. Burlacu Călin (2368, 9, 71, 2, 4, 8—81, 8), Carosevici Constantin (2367—9, 71, 2, 4—6, 8), cl. VIII. Cleju Ion (2364, 9—71, 9, 81—4), Teodorescu Horia (2367—9, 71, 3, 4, 8, 80—4, 93, 4—8, 400, 1, 3—5), cl. X. — Achesăriţei Radu (7119, 30, 1, 6, 85, 8, 94, 5, 216, 22, 4, 6), Cărare Victor (7119—23, 6, 31, 4—6, 40, 1, 5, 6, 8, 30—2, 9), cl. XI. Aizovici Sergiu (7119, 24, 7, 30—2, 5, 6, 85, 8, 94, 204, 10, 7, 23—5), *L. 4.* cl. VII. Sărmăşanu Mihaela (2369, 71, 4, 7, 82—5), cl. VIII. Mirţea Alioşa (2367—9, 70—4, 8—80), *L. 6* cl. VI Vaisman Iulian (2369, 70, 6, 81—4, 95), *L. 7.* cl. V. Popa Cătălina (2369, 70, 6, 81—3, 94—6, 8), cl. VII. Agapie Florin (2368—10, 2, 3, 6, 7, 81, 5), Anoniescu Carmen (2367—9, 74, 6, 8, 9, 80, 2, 3, 5), Crulicovschi Ariana (2365—74, 6—9, 81—5, 7—9, 94—406), Dimitriu Laurenţiu (2367—71, 3—7), Păduraru Gabriela (2367—85, 7, 9, 90, 5—402(, Pşait Ecaterina (2369—71—3, 6, 7, 9, 81—5), Vulpoiu Grigore (2369, 70, 3, 5—7, 9, 81—5), *L. 8* cl. VIII. Hogea Valentin (2376, 83—5, 95, 402, 4), Mardare Radu (2367, 9, 70, 1, 5, 6, 8, 9), Veisman Matias (2369, 70, 1, 4, 5, 81—5). *(va urma)*

1986 MAI 9

CĂTRE REZOLVITORII DE PROBLEME

— *Rezolvînd probleme pregătiți și Olimpiada Matematică 1966.*

Corespondenții care ne trimit probleme rezolvate trebuie să redacteze fiecare problemă separat, însoțind-o de toate calculele necesare și de figuri desenate cu îngrijire.

Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceeași foaie.

Evidențiații trebuie să aibă cel puțin 35—40 soluții bune.

Problemele care se propun de către colaboratorii revistei să fie clar alcătuite și însoțite de soluții, să fie personale, iar nu luate din cărți sau reviste. Elevii sînt sfătuiți să înceapă a propune probleme numai după ce au rezolvat un număr destul de mare de exerciții și probleme. Problemele propuse, dar necorespunzătoare, nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse au fost publicate în cărți sau reviste, este rugat să arate precis volumul și pagina unde a mai apărut enunțul sau soluția problemei respective.

Solicităm probleme interesante legate de practică.

— *Problemele propuse urmînd a fi publicate ținînd seama de predarea la clasă a materiei respective, autorii lor sînt rugați să trimită problemele din vreme însoțite de una sau mai multe soluții îngrijit scrise precum și observări, discuții sau uneori generalizări, arătînd și modul cum au fost stabilite.*

— *Problemele propuse* (P), *note matematice* (N), *articole* (A), *materiale privind cercurile de elevi* (C), *se vor trimite redacției* G.M.-B. *de preferat într-un plic separat de problemele rezolvate.*

Corespondentul nostru care a citit și a înțeles deplin multe din soluțiile publicate, a rezolvat multe din problemele propuse poate și este îndemnat să încerce să schițeze cîte o notă rezultată dintr-o observație făcută cu ocazia rezolvării unei chestiuni mai grele. Aceste note să fie *revăzute de mai multe ori înainte de a fi trimise*, pentru ca redactarea lor să fie *cît mai clară și concisă*. Figurile să fie făcute separat. În redactare se vor evita prescurtările.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

La publicarea problemelor rezolvate se vor menționa rezolvitorii care au dat o bună redactare și o soluție interesantă sau mai multe metode de rezolvare.

Elevii claselor a IX-a pot trimite soluții și la problemele propuse pentru clasa VIII-a. Problemele rezolvate trebuie să fie din ultimile trei numere apărute în G.M.B. *Problemele rezolvate*, vor fi expediate în cursul unei luni și vor fi însoțite de un borderou cu numărul problemelor, scrise în ordinea crescîndă. Pe plic se va scrie școala, clasa și localitatea revolvitorului. Problemele propuse vor fi separate, corect rezolvate și citeț semnate. Desenele să fie făcute îngrijit pe foi separate.

Elevii claselor V—VIII vor fi anunțați în rubrica rezolvitorilor de probleme dacă trimit odată cel puțin 8 probleme bine rezolvate, iar elevii claselor IX—XI, pentru cel puțin 12 probleme bine rezolvate.

★

În vederea stimulării elevilor clasei XI premiați la olimpiadele internaționale de matematică sau olimpiadele interne (etapa finală), care devin studenți ai facultății de matematică-mecanică sau fizică de la Universități, conducerea Ministerului Învățămîntului a hotărît să li se acorde următoarele forme de sprijin material:

a) bursă în primul an de studii, indiferent de situația lor materială. În următorii ani de studii bursa să fie menținută în aceleași condiții dacă obțin media generală cel puțin 9,00.

b) la începutul primului an de studii să li se acorde cărți și manuale de specialitate în valoare de **500 lei.**

c) în vacanțele anului I de studii să fie trimiși cu prioritate la odihnă în taberele studențești (iarna sau vara la alegerea studentului) dacă rezultatele școlare sînt foarte bune.

★

Autorii sînt rugați să semneze clar la sfîrșitul lucrării personale pe care o trimit pentru publicat și să dea adresa lor exactă.

Tirajul fiind limitat, gazetele se trimit mai întîi abonaților și de aceea rugăm colaboratorii noștri să se aboneze de îndată. Prețul este de 2 lei exemplarul. *Abonamentele se pot face prin oficiile poștale locale.*

I. P. „Informația" — c. 5276

INDEX 41601

Lei 2

E 1426

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE
DIN REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA

GAZETA MATEMATICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XVII — aprilie 1966

4

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS MŰSZAKI MÚZEUM

GAZETA MATEMATICĂ
SERIA B
Anul XVII, nr. 4 — aprilie 1966

SUMARUL

	Pag.
1. Calculatoare electronice de Edmond Nicolau	145
2. Observaţii asupra rezolvării problemelor date la VII-a Olimpiadă internaţională de matematică *(urmare)* de T. Roman	151
3. Proprietăţi ale funcţiei omografice aplicate la discuţia ecuaţiilor. de O. Sacter	157
4. Note matematice de I. Teodorescu, L. Pîrşan, N. Teodorescu, Al. Filipoiu, Simion Gheorghe, D. Apşan şi I. Hadîrcă . . .	160
5. Probleme rezolvate (7040, 7041, 7075, 7084, 7093, E: 2352, 2353, 2360)	169
6. Chestiuni de examen (7475—7500)	174
7. Probleme propuse (7501—7528)	180
8. Exerciţii şi probleme propuse pentru clasele V — VIII (E: 2479—2494)	184
9. Rubrica rezolvitorilor de probleme	186

ANUL XVII 4 APRILIE

COMITETUL DE REDACŢIE

Dincă N., profesor; *Grosu A.*, profesoară; *Ionescu-Bujor C.*, prof. univ. emerit; *Ionescu-Ţiu C.*, profesor, redactor şef adjunct; *Kiss E.*, conf. univ. (Cluj); *Kovacs K.*, conf. univ. (Cluj); *Muşat I.*, profesor; *Ottescu C.*, profesor; *Plăviţu M.*, profesor; *Sacter O.*, conf. univ., redactor şef; *Simionescu Gh.*, conf. univ.; *Ţene L.*, profesoară şi *Voinea R.*, prof. univ.

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 14.46.53 — Bucureşti

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică a şcolilor, precum şi orice material informativ se vor trimite pe adresa de mai sus.

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT

GAZETA MATEMATICĂ
SERIA B
PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET
Anul XVII nr. 4 aprilie 1966

CALCULATOARE ELECTRONICE

(Principii generale de funcționare a calculatoarelor digitale)

Prof. univ. *EDMOND NICOLAU*

Fără îndoială că una din cele mai importante realizări ale tehnicii contemporane și care totodată reprezintă una din cele mai complexe manifestări ale revoluției tehnico-științifice căreia îi sîntem martori sînt calculatoarele electronice.

Este bine ca de la început să arătăm că aceste mașini sînt de mai multe categorii. Se disting astfel, *calculatoare digitale* sau numerice, *calculatoare analogice* și *calculatoare hibride*, care reprezintă o combinare a unor elemente utilizate în calculatoarele digitale cu unele procedee specifice calculatoarelor analogice. Ne propunem ca în acest articol să prezentăm cîteva din trăsăturile esențiale ale calculatoarelor electronice digitale.

Ceea ce este esențial pentru înțelegerea principiilor care stau la baza calculatoarelor moderne — și acestea indiferent de tipul lor — este faptul că avem posibilitatea ca, în unele cazuri, să ne ajutăm de dispozitive de diferite naturi în rezolvarea unor probleme matematice. După cum se știe, noțiunea de număr a apărut încă din timpul orînduirii comunei primitive și probabil că și în acele timpuri oamenii se ajutau în efectuarea calculelor de număratul pe degete. Aceasta ar explica de ce la toate civilizațiile cunoscute, baza de numerație este 10 sau, în orice caz, un multiplu al lui 5.

Faptul că oamenii se ajutau de pietricele în efectuarea unor operații aritmetice simple se reflectă și în cuvîntul *calcul*, care provine de la termenul latin calculus = pietricică.

Mai aproape de epoca noastră, cu circa 300 de ani în urmă, în anul 1642, matematicianul, fizicianul și filozoful francez Blaise Pascal a inventat prima mașină aritmetică, cu ajutorul căreia se puteau efectua operații de adunare și scădere. Cîțiva ani mai tîrziu, în anul 1694, matematicianul și filozoful german Leibniz a inventat o mașină mecanică, cu ajutorul căreia se puteau efectua și înmulțiri.

Ambele aceste mașini își bazau funcționarea pe principii mecanice simple. În esență era vorba de roți avînd fiecare cîte zece dinți. Pentru a aduna de exemplu, numărul 3 cu numărul 2, se rotea o roată dințată mai întîi cu trei dinți, iar apoi cu doi dinți. Evident, sistemul era ceva mai complex, astfel încît se puteau aduna numere avînd mai multe cifre semnificative.

Să reținem însă, ideea fundamentală că în această mașină simplă a lui Pascal, numerele erau reprezentate prin dinții unei roți.

Tehnica aceasta, a calculatoarelor mecanice, a cunoscut o dezvoltare importantă, în special în secolul al XIX-lea. Spre sfîrşitul acestui secol, matematicianul englez Charles Babbage a avut ideea unei maşini matematice complexe, la care un dispozitiv de memorie înregistra anumite rezultate parţiale ale calculului.

Babbage nu a putut însă, să-şi realizeze maşina, deoarece în epoca sa tehnologia mecanică nu era destul de avansată.

Spre sfîrşitul secolului trecut încep însă să apară şi maşini electromecanice, utilizate la început în special în scopuri contabile. Este vorba de aşa-numitele maşini cu cartele perforate. Prin cartelă perforată se înţelege o cartelă de carton, avînd dimensiunile aproximativ egale cu cele ale unei cărţi poştale şi care este prevăzută cu zece rînduri de cifre. Fiecare rînd are un număr variabil de coloane, la unele tipuri de maşini ajungîndu-se pînă la 92 de coloane.

Pe această cartelă se pot înregistra numere cu ajutorul unor perforaţii. Dacă de exemplu, dorim să înregistrăm pe prima coloană numărul 3, atunci se practică o perforaţie în dreptul celei de-a treia linii.

Iată deci, un alt mod de a înregistra numere, cu ajutorul unor perforaţii.

Primele maşini electromecanice constau din maşini mecanice avînd roţi dinţate, ca cele utilizate de Pascal, şi un sistem electric de introducere a datelor.

Cartelele perforate erau dispuse pe o piesă metalică pe care călcau zece perii de contact. În momentul în care o perie întîlnea o perforaţie, se stabilea contactul electric dintre perie şi suportul mecanic, închizîndu-se astfel un contact electric, ceea ce avea drept urmare producerea unui impuls electric în circuitul în care era montată peria. Acest impuls putea acţiona un releu electromecanic care la rîndul său, comanda un sistem de roţi dinţate.

Maşinile electromecanice cu relee reprezintă trecerea spre un tip nou de maşină de calcul, în care cifrele sînt reprezentate prin impulsuri electrice.

În epoca noastră, releele electromecanice au fost înlocuite prin relee electronice, acestea caracterizîndu-se printr-o viteză de lucru cu mult mai mare decît viteza maximă pe care o pot avea dispozitivele electromecanice.

Înainte de a trece mai departe să reţinem ideea că la primele calculatoare cu cartele perforate, cifra era reprezentată prin poziţia spaţială a unei perforaţii : o perforaţie pe linia a treia reprezenta cifra 3, o perforaţie pe linia a treia reprezenta cifra 9 etc.

Acest sistem este însă neeconomic, pentru fiecare ordin de mărime fiind necesare zece perii.

Se poate imagina un sistem mai economic, care utilizează aşa numitul *cod binar*.

În afara sistemului uzual de numeraţie care foloseşte zece cifre se pot imagina şi alte sisteme lucrînd în baze diferite. În tabela 1 se dau cîteva astfel de sisteme de numeraţie.

Pentru calculatoarele electronice actuale prezintă interes în special sistemul de numeraţie în baza doi, la care orice număr este reprezentat numai printr-o succesiune în care apar numai două semne : 0 şi 1.

Se înţelege cu uşurinţă, că putem reprezenta aceste două cifre prin perforaţii practicate într-un substrat izolant sau cu ajutorul unor elemente

care prezintă o rezistență variabilă. Contactele electrice intră în această categorie, ele avînd o rezistență neglijabilă atunci cînd sînt închise și dimpotrivă, o rezistență foarte mare — practic infinită — atunci cînd sînt deschise.

Contactele electrice pot fi acționate cu ajutorul unor relee, adică cu ajutorul unor electromagneți. Dacă curentul electric care trece prin înfă-

Tabela 1

Scrierea numerelor în diverse baze

Baza 10	2	3	8
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	10	3
4	100	11	4
5	101	12	5
6	110	20	6
7	111	21	7
8	1000	22	10
9	1001	100	11
10	1010	101	12

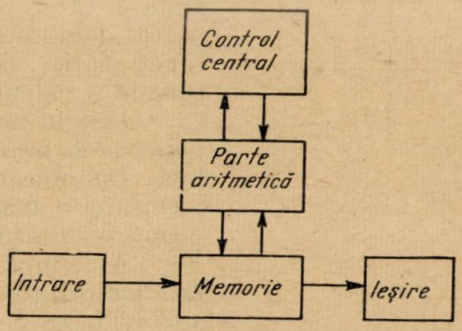


Fig. 1

șurarea electromagnetului are o valoare nulă, atunci releul nu este acționat. Dacă însă, intensitatea curentului are o valoare suficientă, atunci releul comandă contactul electric.

Se înțelege cu ușurință cu atunci cînd dorim să comandăm un electromagnet, viteza de lucru nu poate fi prea mare, deoarece pentru deplasarea părților mobile este necesar să treacă un anumit timp.

Din contră, dacă se întrebuințează tuburi electronice sîntem din nou în prezența unui sistem la care rezistența internă variază în limite mari, dar la care comanda se face practic instantaneu : dacă pe grilă se aplică un semnal puternic negativ, atunci tubul practic nu conduce, iar dacă din contră, grila este pozitivată, tubul se prezintă ca un scurtcircuit.

La fel stau lucrurile și cu elementele semiconductoare.

După ce am văzut această posibilitate — de a prezenta numerele prin diverse sisteme mecanice, electromecanice, electrice și electronice — să trecem la schema-bloc a unui calculator digital.

Caracteristic pentru aceste calculatoare este pe de o parte, faptul că viteza lor de lucru este foarte mare, iar pe de altă parte faptul că ele își desfășoară activitatea în mod automat.

Calculatoarele digitale ating în prezent, viteze de ordinul milioanelor de operații pe secundă. Calculatorul STRETCH efectuează 2 milioane de operații pe secundă, iar calculatorul CONTROL DATA 6600 efectuează 3,5 milioane instrucțiuni pe secundă.

Aceste cifre sînt semnificative, deoarece la viteze de lucru atît de mari, chiar dacă pentru rezolvarea unei probleme este necesar să se efectueze volume foarte mari de calcule, ele pot fi totuși realizate într-un interval de timp relativ redus.

Schema bloc a unui calculator electronic se dă în figura 1.

Se observă aici în primul rînd, *dispozitivul de introducere a datelor*; este vorba de dispozitivul care traduce numerele în simbolurile utilizate de mașină, de obicei în impulsuri electrice în cod binar.

Aceste semnale electrice sînt apoi prelucrate de către *partea aritmetică*, care efectuează operații între numere, în conformitate cu programul de lucru. Partea aritmetică își desfășoară activitatea în conformitate cu programul înregistrat în *memorie*. Tot în memorie se păstrează și datele inițiale ale problemei, ca și unele rezultate intermediare ale calculului. În fine, partea denumită *controlul central* supraveghează funcționarea corectă a mașinii, desfășurarea corectă a calculelor.

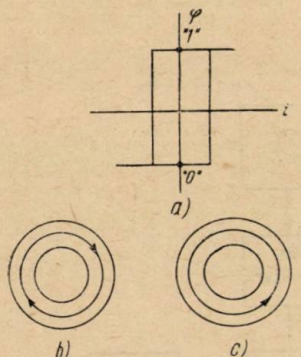


Fig. 2

Rezultatele se extrag din memorie, iar *dispozitivul de ieșire* le traduce într-o formă accesibilă. De obicei, în dispozitivul de ieșire este inclusă și o mașină de scris electrică, care imprimă rezultatele.

Așa după cum s-a spus, în momentul de față majoritatea calculatoarelor utilizează sistemul în baza 2, pentru scrierea numerelor. Fiecare ordin de mărime al unui număr este reprezentat printr-un dispozitiv care poate avea numai două stări stabile, notate convențional cu 0 și 1.

Cele mai uzuale dispozitive de acest gen sînt trigherele electronice, așa numitele *circuite basculante bistabile*, ca și *inelele magnetice cu ciclu de histerezis dreptunghiular*.

În figura 2*a* se reprezintă un ciclu de histerezis al unui astfel de element. Se observă că, în absența unui cîmp magnetic exterior, (curentul i nul) inducția magnetică (fluxul magnetic φ) poate să se afle numai în două stări notate convențional 0 și 1. Aceasta corespunde faptului că fluxul în interiorul circuitului poate să circule fie în sens trigonometric, fie în sensul acelor unui ceasornic, așa cum se arată în figurile 2*b* și *c*.

Prin reuniunea unui număr suficient de mare de astfel de circuite basculante se realizează întregul calculator, dacă se mai adaugă anumite *ciruite logice*.

Circuitele logice utilizate în mod curent în calculatoare sînt așa numitele circuite ȘI, SAU, NU.

Circuitele NU sînt circuite care se caracterizează prin aceea că au o intrare și o ieșire. Atît la intrare cît și la ieșire se aplică semnale avînd numai două valori, notate convențional 0 și 1. Caracteristic este faptul că aplicînd la intrare un semnal denumit 0, la ieșire se obține un semnal 1 și invers. În tabela 2 se arată dependența dintre semnalul de intrare, denumit x și semnalul de ieșire denumit z. Relația dintre z și x se notează $z = \neg x$.

Circuitul ȘI are o funcționare redată în tabela 3. Acest circuit are două borne de intrare, la care se aplică semnalele x și y și un semnal de ieșire numit z. Funționarea sa arată că el are un semnal de ieșire numai atunci cînd se aplică semnale la ambele intrări. Relația dintre x, y și z se notează $z = x \& y$.

În figura 3, se arată cu circuit NU realizat cu ajutorul unei triode. În repaus, această triodă este puternic negativizată, astfel încît în mod normal prin ea nu trece curent. Tensiunea sa anodică este atunci egală cu tensiunea bateriei de alimentare. Dacă se convine a se nota prin 0 un sem-

Tabela 2

$z = \neg x$

x	0	1
	1	0

Tabela 3

$z = x \& y$

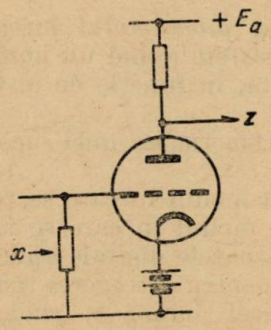
y \ x	0	1
0	0	0
1	0	1

Tabela 4

$z = x \vee y$

y \ x	0	1
0	0	1
1	1	1

nal de tensiune mică și prin 1 tensiunea mare (egală cu tensiunea anodică), se observă că dacă se aplică la intrare 0, rezultă 1 la ieșire. Dacă însă se aplică la intrare un semnal puternic pozitiv, atunci tubul se comportă ca un scurtcircuit, prin rezistența anodică trece un curent intens și tensiunea anodică scade foarte mult ajunînd aproape de potențialul masei. Aceasta înseamnă că la ieșire se va obține un semnal 0.



Fi. 3

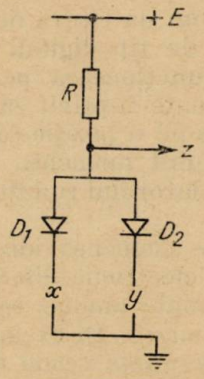


Fig. 4

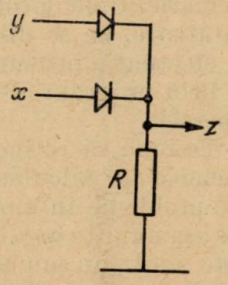


Fig. 5

Circuitul ȘI poate fi realizat se exemplu, cu montajul din figura 4. Dacă la una din borne (de exemplu, x) se aplică semnal (impuls pozitiv), iar la cealaltă (de exemplu, y) nu se aplică semnal, deci avem un scurtcircuit, una din diode (în cazul de față D_2) conduce și tensiunea la ieșire în punctul z este 0.

Deci, condiția necesară și suficientă pentru ca să avem semnal la ieșire este ca la ambele borne de intrare să se aplice simultan impulsuri pozitive.

Vom menționa în fine, așa numitul circuit SAU, caracterizat prin funcționarea redată în tabela 4. La acest circuit se obține semnal 1 la ieșire, dacă cel puțin la una din bornele de intrare se aplică semnal (fig. 5). Se notează $z = x \vee y$.

Așa cum s-a amintit, din combinarea unui număr de elemente logice și a unor circuite basculante bistabile se poate realiza orice subansamblu al unui calculator digital.

Este cazul să arătăm că, de fapt, calculatoarele digitale pot fi realizate nu numai cu elemente electronice, ci și cu alte tipuri de dispozitive,

de exemplu pneumatice sau hidraulice. Trebuie reținut faptul că în prezent se întrebuințează pe scară largă circuitele electronice, deoarece ele singure asigură o viteză foarte mare de lucru, circuitele pneumatice sau hidraulice avînd elemente mecanice în mișcare vor avea o viteză de lucru cu mult mai mică.

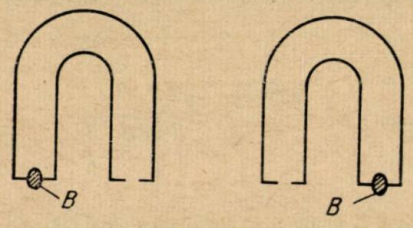


Fig. 6

Totuși, circuitele pneumatice și hidraulice se întrebuințează cu succes acolo unde viteza nu este un factor prohibitiv, de exemplu, în comanda anumitor mașini-unelte.

În figura 6 se dă exemplul unui circuit basculant bistabil realizat cu elemente mecanice. Este vorba de un exemplu ilustrativ, care nu se întîlnește în practică și care, în esență, constă dintr-un tub în formă de U întors, în interiorul căruia se află o bilă. Evident, bila nu se poate afla decît numai în partea inferioară a uneia din cele două ramuri.

În cele ce urmează vom da cîteva detalii cu privire la funcționarea calculatoarelor electronice de tip digital.

Întregul calculator funcționează pe baza *programului* înregistrat în memorie. Calculatorul poate fi privit ca un sistem avînd un număr de comutatoare, ce se dispune pe o poziție sau alta, în funcție de instrucțiunea efectuată într-un anumit moment.

Prin program al calculatorului se înțelege efectuarea unei succesiuni de operații.

Trebuie să reținem de asemenea ideea că modul în care se rezolvă problemele în calculatorul electronic diferă de modul în care se rezolvă aceste probleme în mod curent; anume, calculatoarele digitale aplică metodele așa numite *analize numerice*. De exemplu, pentru extragerea rădăcinii pătrate dintr-un număr, se poate scade din acel număr pe rînd, toate numerele impare, pînă cînd rezultatul devine negativ. Rădăcina patrată căutată se află între rangul ultimului număr care se poate scade, restul fiind pozitiv și succesorul său, avînd în vedere relația fundamentală

$$\sum_{0}^{n} (2k + 1) = n^2$$

Calculatoarele digitale rezolvă în general, problemele cu ajutorul aproximațiilor succesive. De exemplu, pentru extragerea radicalului se poate utiliza și formula

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

unde a este numărul din care se extrage radicalul, x_n este aproximația de ordin n, iar x_{n+1} este aproximația imediat superioară.

În general, la aceste calculatoare procesul se repetă ciclic, pînă în momentul în care este satisfăcută o anumită condiție logică.

Prin marea lor viteză calculatoarele digitale au deschis o etapă nouă în știință și tehnică. Ele se întrebuințează astăzi în mod curent în munci de planificare, de conducere optimală a proceselor industriale, la stimularea unor activități intelectuale etc.

OBSERVAȚII

ASUPRA REZOLVĂRII PROBLEMELOR DATE LA A VII-A OLIMPIADĂ INTERNAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ *

de *T. ROMAN*

Problema IV.

Să se găsească toate grupele de cîte 4 numere reale (x_1, x_2, x_3, x_4) *care satisfac condiția: oricare dintre numere adunat cu produsul celorlalte trei numere dă suma 2.*

Soluția (dată de majoritatea elevilor, cu unele variante).

Enunțul problemei conduce la sistemul

$$x_1 + x_2x_3x_4 = 2, \quad x_2 + x_1x_3x_4 = 2,$$
$$x_3 + x_1x_2x_4 = 2, \quad x_4 + x_1x_2x_3 = 2.$$

Scăzînd termen cu termen din prima ecuație pe rînd fiecare din celelalte, se obține sistemul echivalent

$$x_1 + x_2x_3x_4 = 2, \qquad (x_1 - x_2)(1 - x_3x_4) = 0,$$
$$(x_1 - x_3)(1 - x_2x_4) = 0, \qquad (x_1 - x_4)(1 - x_2x_3) = 0.$$

care conduce la 8 sisteme de ecuații:

1. $x_1 + x_2x_3x_4 = 2,$ $x_1 - x_3 = 0,$ $x_1 - x_3 = 0,$ $x_1 - x_4 = 0.$

2. $x_1 + x_2x_3x_4 = 2,$ $1 - x_3x_4 = 0,$ $x_1 - x_3 = 0,$ $x_1 - x_4 = 0.$

3. $x_1 + x_2x_3x_4 = 0,$ $x_1 - x_2 = 0,$ $1 - x_2x_4 = 0,$ $x_1 - x_4 = 0.$

4. $x_1 + x_2x_3x_4 = 2,$ $x_1 - x_2 = 0,$ $x_1 - x_3 = 0,$ $1 - x_2x_3 = 0.$

5. $x_1 + x_2x_3x_4 = 2,$ $1 - x_3x_4 = 0,$ $1 - x_2x_4 = 0,$ $x_1 - x_4 = 0.$

6. $x_1 - x_2x_3x_4 = 2,$ $1 - x_3x_4 = 0,$ $x_1 - x_3 = 0,$ $1 - x_2x_3 = 0.$

7. $x_1 + x_2x_3x_4 = 2,$ $x_1 - x_2 = 0,$ $1 - x_2x_4 = 0,$ $1 - x_2x_3 = 0,$

8. $x_1 + x_2x_3x_4 = 2,$ $1 - x_3x_4 = 0,$ $1 - x_2x_4 = 0,$ $1 - x_2x_3 = 0.$

Sistemul 1. admite soluția în numere reale

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1 \tag{1}$$

și soluțiile în numere complexe

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}, \tag{2}$$

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2}. \tag{3}$$

*) Continuare din nr. 3/1966.

Sistemul 2. admite soluția (1) și soluția

$$x_1 = x_3 = x_4 = -1, \quad x_2 = 3. \tag{4}$$

Sistemele 3. și 4. se obțin din sistemul 2. permutînd pe x_2 cu x_3 respectiv cu x_4, așa că ele admit soluția (1) și soluția

$$x_1 = x_2 = x_4 = -1, \quad x_3 = 3 \tag{5}$$

respectiv

$$x_1 = x_2 = x_3 = -1, \quad x_4 = 3. \tag{6}$$

Sistemul 5. admite soluția (1).

Sistemele 6. și 7. se obțin din sistemul 5. permutînd pe x_4 cu x_3 respectiv x_2, așa că ele admit soluția (1).

Sistemul 8. admite soluția (1) și soluția

$$x_2 = x_3 = x_4 = -1, \quad x_1 = 3 \tag{7}$$

Soluțiile reale ale sistemului dat sînt (1), (4), (5), (6), (7).

Observații. 1°. Dintre toate problemele date la a VII-a O.I.M., aceasta a ridicat cele mai puține greutăți : 37 elevi au obținnt cîte 6 puncte, 6 cîte 5 puncte, 6 cîte 4 puncte, doar 2 elevi cîte 0 puncte și 5 cîte 1 punct.

Dintre elevii noștri, cinci au obținut cîte 6 puncte, unu 5 puncte și doi cîte 2 puncte.

2°. Soluția de mai sus a fost dată cu unele variante : se scade termen cu termen din prima ecuație cea de-a doua și din a treia pe cea de-a patra, iar apoi discuția se poate face ținînd seama de condițiile ce rezultă din prima ecuație obținută sau din amîndouă ; sau se scade termen cu termen din prima ecuație cea de-a doua, dintr-a doua a treia, dintr-a treia a patra și se completează un sistem echivalent cu cel dat luînd prima ecuație inițială.

Ca lipsuri se pot releva : — un elev ajunge la ecuațiile : $x_3x_4 = 1$, $x_4x_1 = 1$, $x_3 = x_1$, $x_1 + x_2x_3x_4 = 2$ și conchide că soluția este : $x_1 = m$, $x_2 = 2 - m$, $x_3 = m$, $x_4 = \frac{1}{m}$, m fiind arbitrar, fără a observa ca ecuația a patra inițială nu este satisfăcută decît dacă

$$m^4 - 2m^3 + 2m - 1 = 0$$

deci pentru $m = 1$ sau $m = -1$;

— un alt elev, înmulțind prima ecuație cu x_1 (despre care arată că nu poate fi nul), obține

$$x_1x_2x_3x_4 = x_1(2 - x_1),$$

și apoi

$$x_1(2 - x_1) = x_2(2 - x_2) = x_3(2 - x_3) = x_4(2 - x_4) = x_1x_2x_3x_4 = p,$$

și

$$x_1 = 1 \pm \sqrt{1 - p}$$

de unde trage concluzia (care nu-i singura valabilă) : $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$, fără a remarca posibilă, printre altele, o combinație de forma :

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1 - \sqrt{1 - p}, \; x_4 = 1 + \sqrt{1 - p} ;$$

— un alt elev se încurcă în analiza ce încearcă s-o facă, deoarece netransformînd sistemul dat într-unul echivalent și nelucrînd sistematic nu obține toate cazurile posibile.

Problema V

Se dă un triunghi OAB, al cărui unghi O are măsura $\alpha < 90°$. Dintr-un punct oarecare M (diferit de O) din planul triunghiului OAB, se duc perpendicularele MP pe OA și MQ pe OB. Se notează cu H ortocentrul triunghiului OPQ. Care este locul geometric al punctului H, dacă M parcurge :

a) *latura AB,*

b) *interiorul triunghiului OAB.*

Prima soluție (dată de elevii *O. Bîrsă, E. Popa, E. Popescu, J. Weinstein*).

Se consideră întîi cazul unui triunghi OAB ascuțitunghi.

a) Fie A' și B' (fig. 2) picioarele înălțimilor din A și B în triunghiul OAB. În triunghiul OPQ, înălțimile din P și Q intersectează segmentul $A'B'$ în punctele H' respectiv H''.

Din paralelismul dreptelor PH' cu AA', PM cu BB' rezultă :

$$\frac{A'H'}{A'B'} = \frac{AP}{AB'} = \frac{AM}{AB} \qquad (1)$$

iar din paralelismul dreptelor QH'' cu BB', QM cu AA' rezultă

$$\frac{A'H''}{A'B'} = \frac{A'Q}{A'B} = \frac{AM}{AB}, \qquad (2)$$

așa dar

$$\frac{A'H'}{A'B'} = \frac{A'H''}{A'B'},$$

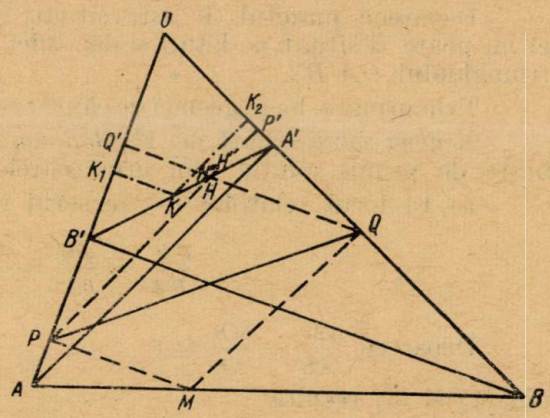


Fig. 2

și deoarece H' și H'' sînt situate pe același segment $(A'B')$

$$H' \equiv H'' \equiv H.$$

Dacă M aparține segmentului AB, Q și P aparțin segmentelor AB' și BA' iar înălțimile QH și PH se află în interiorul triunghiurilor $OB'B$ respectiv $OA'A$, așa că H aparține segmentului $A'B'$, pozițiilor extreme $M = A$ și $M = B$ corespunzîndu-le punctele A', B'.

Reciproc, fie H situat pe $A'B'$, perpendicularele din H pe OA, OB, întîlnesc dreptele OB respectiv OA în Q, respectiv P iar perpendicularele din P pe OA și din Q pe OB întîlnesc segmentul AB în M' respectiv M''.

Dat fiind paralelismul unor drepte, ca mai sus, se poate scrie :

$$\frac{AM'}{AB} = \frac{AP}{AB'} = \frac{A'H}{A'B'} \text{ și } \frac{AM''}{AB} = \frac{A'Q}{A'B} = \frac{A'H}{AB'},$$

așa dar

$$\frac{AM'}{AB} = \frac{AM''}{AB}$$

și deci

$$M' \equiv M'' \equiv M.$$

Prin urmare, locul geometric căutat este segmentul (închis) $A'B'$

b) Dacă punctul M este situat în interiorul triunghiului OAB (în M_1) atunci segmentul A_1B_1 (paralel cu AB și pe care este situat M_1) conduce la punctele A_1', B_1' situate între O și A' respectiv O și B' așa că punctul H_1 — ortocentrul triunghiului OP_1Q_1 — este situat pe $A_1'B_1'$

(demonstrația este aceiași ca mai sus), adică în interiorul triunghiului $OA'B'$.

Reciproc, pornind de la un punct H_1 interior triunghiului $OA'B'$, se duce dreapta $A_1'B_1'$, paralelă cu $A'B'$ și se obține — analog ca la reciproca de la a) — că punctul M este situat în M_1, pe segmentul A_1B_1 paralel cu AB, cu A_1A_1' și B_1B_1' perpendiculare pe OB, respectiv OA.

Deoarece punctul M este situat în interiorul triunghiului OAB, el nu poate fi situat pe laturi și deci nici H nu poate fi situat pe laturile triunghiului $OA'B'$.

Prin urmare, locul geometric căutat este interiorul triunghiului $OA'B'$.

A doua soluție (dată de *Al. Bădescu* și *I. Ștefănescu-Sabba*) se deosebește de prima soluție prin următoarele:

a) În locul relațiilor (2) se scriu relațiile

$$\frac{B'H''}{B'A'} = \frac{BQ}{BA'} = \frac{MB}{AB}. \tag{3}$$

Deoarece $\frac{AM}{AB} + \frac{MB}{AB} = 1$

din (1) și (3) rezultă

$$\frac{A'H'}{A'B'} + \frac{B'H''}{B'A'} = 1$$

adică $A'H' + B'H'' = A'B'$ și deci $H' \equiv H''$.

În mod analog se procedează pentru demonstrarea reciprocei.

b) Se consideră că M parcurge interiorul triunghiului OAB, descriind drepte paralele cu AB și oricît de apropiate între ele.

Observații. 1°. Problema s-a dovedit de greutate mijlocie; 26 elevi au obținut cîte 7 puncte, 9 cîte 6 puncte, 4 cîte 5 puncte, iar 15 zero puncte, 12 cîte un punct și 7 cîte 2 puncte. Se poate remarca faptul că s-au dat soluții prin geometria analitică (pentru punctul a)) sau s-a arătat că $QH = QH_1$, exprimînd fiecare din aceste segmente în funcție de AM și de unghiurile O și A.

Unii elevi au considerat și cazul triunghiului OAB obtuzunghi sau dreptunghi (în A, de ex.) cînd locul geometric de la a) este segmentul $A'B'$, situat în parte în afara triunghiului AOB sau avînd o extremitate pe AB.

Pentru ca prezentarea problemei să fie completă era necesară studierea acestor cazuri. Totuși, nu s-au scăzut puncte pentru această lipsă pentru că studiul lor nu necesită alte mijloace decît cele folosite la triunghiul ascuțitunghi.

Din același motiv, nu s-a aprobat să se acorde o mențiune specială elevului *E. Popa* care a dat o generalizare problemei.

2°. Elevii noștri au rezolvat foarte bine această problemă, cinci obținînd cîte 7 puncte și trei cîte 6 puncte.

Trebuie subliniat faptul că enunțul problemei a fost modificat de juriul O.I.M., înlocuind arcul cercului cu centrul în O cu segmentul AB și interiorul sectorului AOB cu cel al triunghiului OAB. Niciunul dintre elevii noștri nu a dat de fapt soluția preconizată de autorul problemei inițiale, tov. *Gh. D. Simionescu*.

Elevul *E. Popa* și-a formulat problema în termeni mai generali, considerînd segmentele MP și MQ de direcție arbitrară, dar interioare triunghiului AOB și ducînd apoi PH' și QH'' paralele cu MQ respectiv MP.

Într-o variantă la punctul a) al primei soluții, E. Popescu, din relații analoge cu (1) deduce:

$$\frac{QH}{BB'} = \frac{A'Q}{A'B}.$$

Notează apoi cu B'' intersecția lui $A'A$ cu BB' și obține

$$\frac{QH}{BB''} = \frac{A'Q}{A'B}$$

de unde trage concluzia că $BB' = BB''$ și deci $B' \equiv B''$.

Într-o variantă la punctul b) al primei soluții, J. Weinstein consideră punctele K', K'' de intersecție al dreptelor P_1H_1, Q_1H_1 cu $A'B'$ și punctele N', N'' de intersecție a dreptelor P_1M_1, Q_1M_1 cu AB. Arătînd că au loc egalitățile

$$\frac{K'A'}{K'B'} = \frac{N'A}{N'B} \text{ și } \frac{K''A'}{K''B'} = \frac{N''A}{N''B}$$

și observînd că dacă $\frac{N'A}{N'B} < \frac{N''A}{N''B}$ rezultă $\frac{K'A'}{K'B'} < \frac{K''A'}{K''B'}$, conchide că punctul H_1 este situat în interiorul triunghiului $OA'B'$.

Într-o soluție de altă factură decît a celor de mai sus, mai complicată și folosind relații trigonometrice, D. Voiculescu observă întîi că

$$OP \cos B + OQ \cos A = OA \cos B + OB \cos A - AB \cos A \cos B = k = \text{constant}$$

și că $OP' \cos B + OQ' \cos A = k \cos \alpha$.

Apoi demonstrează că toate punctele K de pe segmentul $A'B'$ (fig. 2) și numai ele satisfac o relație de forma

$$OK_1 \cos A + OK_2 \cos B = k_1$$

unde K_1 și K_2 sînt proiecțiile lui K pe OA, respectiv OB.

L. Bucur dovedește că triunghiurile AOM, $A'OH$ sînt asemenea, așa că din egalitatea unghiurilor $OA'H$ și AOM deduce că H descrie dreapta $A'B'$.

3°. Pierderea cîte unui punct este datorită faptului că elevii nu au demonstrat reciprocele afirmațiilor de la punctele a) și b).

Problema VI

Într-un plan se dau $n \geqslant 3$ puncte astfel că distanța cea mai mare dintre oricare două puncte, din cele date, este d. Se numesc diametri ai sistemului de puncte date acele segmente de dreaptă care unesc două dintre punctele date și au lungimea d. Să se demonstreze că numărul acestor diametri nu este mai mare decît n.

Soluția autorului (începută de *Al. Bădescu*, *O. Bîscă*, *L. Bucur*, *I. Ștefănescu-Sabba*, *J. Weinstein*).

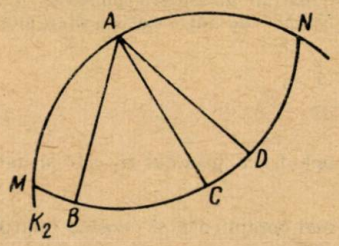
Fie AB, AC, AD trei diametri ai mulțimii de puncte. Rezultă că punctele B, C, D se află pe un arc de cerc K_1, de centru A și rază d iar dacă C este situat pe arcul BD, lungimea acestuia este cel mult egală cu $\frac{\pi}{3} d$ (căci altfel BD ar fi mai mare decît d). Fie K_2 cercul cu centrul în C și de rază d. Toți diametrii (mulțimii de puncte) ce pleacă din C au a doua extremitate pe arcul MAN al lui K_2, situat în interiorul cercului K_1. Dar distanța de la D la un punct al arcului MA sau de la B la un punct al arcului AN este mai mare decît d, în afară de $CA = d$.

Deci, dacă dintr-un punct A al mulțimii de puncte pleacă 3 diametri, atunci din cel puțin una din extremitățile lor (diferite de A) — C de exemplu — nu poate pleca decît un singur diametru.

S-a dovedit astfel că pentru o mulțime de n puncte există doar 2 posibilități: sau din fiecare punct pornesc cîte 2 diametri sau cel puțin dintr-un punct pornește cel mult un diametru.

Demonstrarea se face acum prin inducția completă. Pentru $n = 3$ afirmația din enunț este evidentă. Se consideră afirmația valabilă (pentru $n = k$ (număr natural, $k \geqslant 3$).

Se consideră o mulțime M de $k+1$ puncte : $\{A_1, A_2, \ldots, A_{k+1}\}$. Dacă dintr-un punct, A_1 de ex., nu pornește decît cel mult un diametru, atunci numărul diametrilor lui M depășește cel mult cu o unitate numărul diametrilor mulțimii $\{A_2, \ldots, A_{k+1}\}$ deci este cel mult egal cu $k+1$. Dacă nu există însă un asemenea punct, atunci din fiecare A_i $(i = 1, \ldots, k+1)$ pornesc cîte 2 diametri și deci numărul lor este

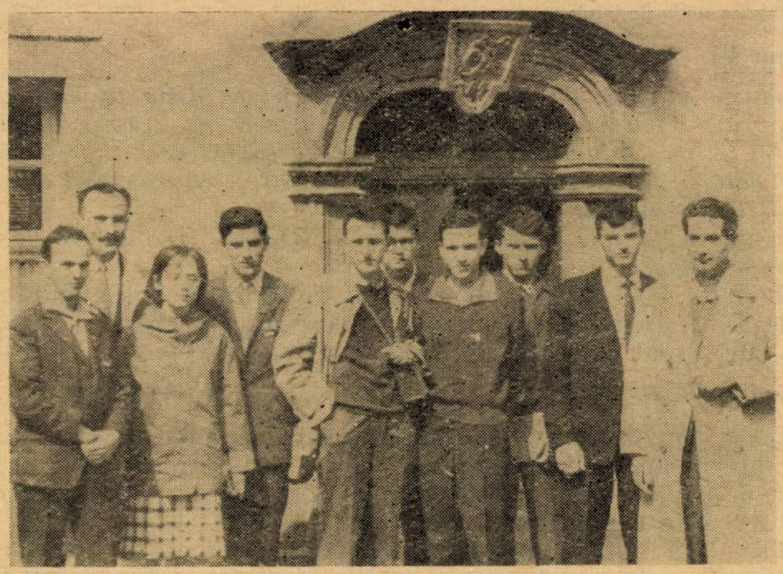


$$2(k+1)\cdot\frac{1}{2} = k+1.$$

Se vede că n este un maxim al numărului diametrilor mulțimii celor n puncte căci, pentru $k = 3$, numărul diametrilor poate fi 1 (dacă ABC este un triunghi scalen), 2 (dacă ABC este isoscel) sau 3 (numai dacă ABC este echilateral) Așa că și numărul diametrilor mulțimii M este cel mult $k+1$.

Numărul maxim este atins de exemplu, într-un poligon stelat cu n laturi (n impar) sau pe fig. de mai sus, dacă $n-3$ puncte sînt situate pe arcul BD (care are 60°) iar celelalte trei puncte sînt A, B, D.

Observații. Problema s-a dovedit cea mai dificilă din concurs. Doar 10 elevi au obținut cîte 9 puncte și 2 cîte 7 puncte (toți 12 aparținînd delegațiilor RPU și URSS). Ceilalți au obținut următorul punctaj : 11 cîte 4 puncte, 13 cîte 3 puncte, 10 cîte două, 13 cîte unu și 21 zero puncte.



Delegația română la a VII-a O.I.M. în fața casei lui Fr. Schiller, la Weimar

Prezentarea ingeniozității și capacității de lucru matematic ale echipei române la a VII-a O.I.M. ne umple inima de bucurie și mîndrie.

Este necesar însă ca asemenea calități și priceperi să fie formate la cît mai mulți elevi pe de o parte iar pe de altă parte să fie lichidate lipsurile semnalate ca și altele constatate la concursurile interne.

PROPRIETĂȚI ALE FUNCȚIEI OMOGRAFICE APLICATE LA DISCUȚIA ECUAȚIILOR

de *OCTAV SACTER*

Se pune uneori problema de a se demonstra că o ecuație algebrică $f(x) = 0$ are una sau mai multe rădăcini situate într-un interval dat (m, n) sau să se găsească condițiile ca aceste rădăcini să fie cuprinse în același interval (m, n). Astfel de probleme se pot rezolva folosind unele proprietăți ale funcției omografice

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

În cele ce urmează ne propunem să arătăm cititorilor noștri cum pot fi rezolvate probleme de acest tip. În prealabil scoatem în evidență o proprietate a funcției omografice.

I. *Funcția* $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$, *unde* a, b, c, d, *sînt niște numere reale oarecare, este monoton crescătoare dacă* $ad - bc > 0$ *și monoton descrescătoare dacă* $ad - bc < 0$ *în orice interval în care este definită funcția.*

Într-adevăr, presupunînd $x_1 < x_2$ două valori ale lui x astfel ca orice interval (x_1, x_2) să nu cuprindă valoarea $-d/c$, unde $f(x)$ nu este definită, avem :

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{1}{x_2 - x_1}\left[\frac{ax_2 + b}{cx_2 + d} - \frac{ax_1 + b}{cx_1 + d}\right] = \frac{ad - bc}{(cx_1 + d)(cx_2 + d)}.$$

Ținînd seama că orice interval (x_1, x_2) nu cuprinde pe $-\frac{d}{c}$, avem $x_1 < -\frac{d}{c}$ și $x_2 < -\frac{d}{c}$ sau $x_1 > -\frac{d}{c}$ și $x_2 > -\frac{d}{c}$; de unde deducem că în oricare din aceste cazuri, avem :

$$(cx_1 + d)(cx_2 + d) > 0.$$

De aici rezultă că

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \text{ are semnul expresiei } ad - bc,$$

ceea ce demonstrează afirmația din enunț.

II. Cu ajutorul celor demonstrate mai sus stabilim *pentru* $m < n$ *că la o rădăcină* x_i *a ecuației* $f(x) = 0$ *situată în intervalul* (m, n) *corespunde o rădăcină* $y_i = \frac{x_i - m}{x_i - n}$ *negativă și reciproc, unde* y *sînt rădăcinile ecuației algebrice*

$$f\left(\frac{ny - m}{y - 1}\right) = 0.$$

În scopul demonstrării acestei afirmații formăm ecuația care are rădăcini y_i.

Din relația $y_i = \frac{x_1 - m}{x_i - n}$, deducem $x_i = \frac{ny_i - m}{y_i - 1}$. Scriind că x_i este o rădăcină a ecuației $f(x) = 0$, rezultă $f\left(\frac{ny_i - m}{y_i - 1}\right) = 0$, ceea ce arată că y_i sînt rădăcini ale ecuației

$$f\left(\frac{ny - m}{y - 1}\right) = 0.$$

Ținînd seama că $y = \frac{x - m}{x - n}$ este o funcție omografică cu $ad - bc = m - n < 0$, rezultă că această funcție este monoton descrescătoare) în intervalele : $(-\infty, n)$, (n, ∞), iar variația funcției în intervalul $(-\infty, \infty)$ este dată de tabelul de variație :

x	$-\infty$	$\nearrow$	m	$\nearrow$	n	$+\infty$
y	1 descreşte		0 descreşte $-\infty$		$+\infty$ descreşte	1

Urmărind acest tablou de variație a funcției $y = \frac{x - m}{x - n}$ constatăm că la orice $x \in (m, n)$ corespunde o singură valoare $y \in (-\infty, 0)$ și reciproc, ceea ce demonstrează afirmația de sub II.

III. Aplicații : 1) *Să se determine cum trebuie să fie* λ *pentru ca ecuația*

$$f(x) = x^2 + x + \lambda = 0$$

să admită o rădăcină situată în intervalul $(1; 2)$.

Formăm ecuația

$$f\left(\frac{2y - 1}{y - 1}\right) = 0; \quad \left(\frac{2y - 1}{y - 1}\right)^2 + \left(\frac{2y - 1}{y - 1}\right) + \lambda = 0,$$

sau

$$(\lambda + 6)\, y^2 - (2\lambda + 7)y + \lambda + 2 = 0 \qquad (1)$$

Pentru a avea o rădăcină x_i situată între (1 ; 2) trebuie deci ca ecuația (1) să aibă o rădăcină negativă. De unde rezultă condițiile :

$$(2\lambda + 7)^2 - 4(\lambda + 2)(\lambda + 6) > 0 \text{ și } \frac{\lambda + 2}{\lambda + 6} < 0,$$

cu soluția

$$\lambda \in (-6; \ -2).$$

2) *Să se discute soluțiile ecuației* $\sin x \sin 3x = m$ *după diferitele valori ale parametrului* m.

Înlocuind $\sin 3x$ prin $3\sin x - 4\sin^3 x$, ecuația devine

$$4\sin^4 x - 3\sin^2 x + m = 0,$$

și apoi substituind $\sin x$ prin $\frac{1-\cos 2x}{2}$, obținem

$$2\cos^2 2x - \cos 2x + 2m - 1 = 0$$

o ecuație $f(y) \equiv 2y^2 - y + 2m - 1 = 0$ unde s-a notat $\cos 2x = y$.

Pentru a găsi soluții reale pentru x este necesar și suficient ca ecuația $f(y) = 0$ să aibă cel puțin o rădăcină y cuprinsă în intervalul $(-1,1)$; de aceea formăm ecuația $f\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = 0$. La fiecare rădăcină z negativă corespunde o valoare y cuprinsă între -1 și 1 și prin urmare soluții x reale date de $\cos 2x = y$.

Rădăcinile z ale ecuației $f\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = 0$ sînt date de

$$2mz^2 - 2(2m-3)z + (2m+2) = 0 \qquad (2)$$

Pentru discutarea naturii și a semnelor rădăcinilor ecuației (2) formăm discriminantul $\Delta = (2m-3)^2 - 2m(2m+2) = 9 - 16m$ și expresiile $z_1 z_2 = \frac{m+1}{m}$, $z_1 + z_2 = \frac{2m-3}{m}$ din ale căror semne rezultă natura și semnele rădăcinilor x pe care le înregistrăm în tabelul ce urmează

m	Δ	$z_1 z_2$	$z_1 + z_2$	Rădăcini z
$-\infty$	+	+	+	$z_1 > 0$ $z_2 > 0$
-1	+	−	+	$z_1 < 0$ $z_2 > 0$
0	+	+	−	$z_1 < 0$ $z_2 < 0$
$9/16$	−	−	−	complexe
$3/2$	−	−	+	complexe
∞				

Din tabel rezultă că pentru $m \in (-1\,;\,0)$, ecuația în z are o singură rădăcină negativă, căreia îi corespunde o singură rădăcină $y \in (-1\,;\,1)$, iar pentru această valoare y avem $\cos 2x = y$ cu soluții reale pentru x.

Pentru $m \in \left(0\,;\,\frac{9}{16}\right)$, ecuația în z are două rădăcini negative cărora le corespund două rădăcini y cuprinse între -1 și 1 și prin urmare vom obține pentru x două mulțimi de soluții reale.

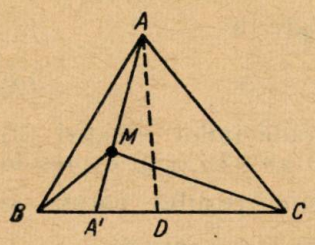
NOTE MATEMATICE

10. În legătură cu o problemă a lui D. Pompeiu

Segmentele care unesc un punct din planul unui triunghi echilateral cu vîrfurile lui pot forma un triunghi.

Demonstrația este cunoscută și se face cu ajutorul numerelor complexe.

Fie M un punct din interiorul triunghiului echilateral, sau situat pe o latură a triunghiului ABC. Prelungim semgentul MA pînă întîlnește latura BC în A. Avem evident, $AA' \leqslant AB$, deoarece AA' este mai apropiată de perpendiculara AD dusă din A. Egalitatea are loc cînd M se află pe o latură a triunghiului.



Avem apoi $MB + MC > BC$ și cu atît mai mult vom avea $MB + MC > AA'$. Suma $MB + MC$ este mai mare ca segmentul AA' și cu atît mai mult va fi mai mare ca o parte MA din acest segment

$$MB + MC > MA$$

În mod analog se vor demonstra inegalitățile :

$$MA + MB > MC; \qquad MC + MA > MB,$$

care dovedesc că segmentele MA, MB, MC pot forma un triunghi.

Observare. Proprietatea nu mai este adevărată în triunghiul oarecare. Într-adevăr, dacă M este un punct din planul triunghiului ABC, putem presupune dreapta MA suficient de lungă ca să avem inegalitatea

$$MA > MB + MC$$

I. Teodorescu, Galați

Generalizarea problemelor 2519 și 6020

În cele ce urmează voi da cîteva generalizării ale problemei 6020.

Dîndu-se progresia aritmetică $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots, a_{n+k-1}$ să se calculeze suma :

$$S = \frac{a_1^{p-1} + a_1^{p-2} a_k + \ldots + a_k^{p-1}}{a_1^p a_2^p \ldots a_k^p} + \frac{a_2^{p-1} + a_2^{p-2} a_{k+1} + \ldots + a_{k+1}^{p-1}}{a_2^p a_2^p \ldots a_{k+1}^p} + \ldots +$$

$$\ldots + \frac{a_n^{p-1} + a_n^{p-} a_{n+k-1} + \ldots + a_{n+k-1}^{p-1}}{a_n^p a_{n+1}^p \ldots a_{n+k-1}^p}.$$

Soluție. — Considerăm identitățile evidente :

$$\frac{a_k^p - a_1^p}{a_1^p a_2^p \ldots a_k^p} = \frac{1}{a_1^p a_2^p \ldots a_{k-1}^p} - \frac{1}{a_2^p a_3^p \ldots a_k^p},$$

$$\frac{a_{k+1}^p - a_2^p}{a_2^p a_3^p \ldots a_{k+1}^p} = \frac{1}{a_2^p a_3^p \ldots a_k^p} - \frac{1}{a_3^p a_4^p \ldots a_{k+1}^p},$$

. . . . . .

$$\frac{a_{n+1-1}^p - a_n^p}{a_n^p a_{n+1}^p \ldots a_{n+k-1}^p} = \frac{1}{a_n^p a_{n+1}^p \ldots a_{n+k-1}^p} - \frac{1}{a_{n+1}^p a_{n+2}^n \ldots a_{n+k-1}^p},$$

Descompunînd în factori și ținînd seamă că:

$$a_k - a_1 = a_{k+1} - a_2 = \ldots = a_{n+k-1} - a_n = (k-1)r$$

unde r este rația progresiei aritmetice, cele n identități devin:

$$\frac{(k-1)r\left(a_1^{p-1} + a_1^{p-2}a_k + \ldots + a_k^{p-1}\right)}{a_1^p a_2^p \ldots a_k^p} = \frac{1}{a_1^p a_2^p \ldots a_{k-1}^p} - \frac{1}{a_2^p a_3^p \ldots a_k^p},$$

$$\frac{(k-1)r\left(a_{12}^{p-1} + a_2^{p-2}a_{k+1} + \ldots + a_{k+1}^{p-1}\right)}{a_2^p a_3^p \ldots a_{k+1}^{p1}} = \frac{1}{a_2^p a_3^p \ldots a_k^p} - \frac{1}{a_3^p a_4^p \ldots a_{k+1}^p},$$

. . . . . .

$$\frac{(k-1)r\left(a_n^{p-1} + a_n^{p-2}a_{n+k-1} + \ldots + a_{n+k-1}^{p-1}\right)}{a_n^p a_{n+1}^p \ldots a_{n+k-1}^p} = \frac{1}{a_n^p a_{n+1}^p \ldots a_{n+k-2}^p} - \frac{1}{a_{n+1}^p a_{n+2}^p \ldots}.$$

Adunînd membru cu membru cele n identități obținem suma S.

Cazuri particulare. a) În cazul particular $p = 1$ obținem:

$$\frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_k} + \frac{1}{a_2 a_3 \ldots a_{k+1}} + \ldots + \frac{1}{a_n a_{n+1} \ldots a_{n+k-1}} =$$

$$= \frac{1}{(k-1)r}\left(\frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_{k-1}} - \frac{1}{a_{n+1} a_{n+2} \ldots a_{n+k-1}}\right). \qquad (2)$$

b) În identitatea de mai sus, fie $a_k = k$, $(k = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$:

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (k+1)} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)\ldots(n+k-1)} =$$

$$= \frac{1}{(k-1)\cdot 1}\left(\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (k-1)} - \frac{1}{(n+1)\,(n+2)\,(k+k+1)}\right)$$

sau se mai poate scrie:

$$\frac{0!}{k!} + \frac{1!}{(k+1)!} + \ldots + \frac{(n-1)!}{(n+k-1)!} = \frac{1}{(k-1)}\left(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{n!}{(n+k-1)!}\right)$$

sau sub formă condensată:

$$\sum_{p=0}^{n-1} \frac{p!}{(p+k)!} = \frac{1}{(k-1)}\left(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{n!}{(n+k-1)!}\right) \qquad (3)$$

c) În identitatea (2), fie $k = 2$.

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}\right) = \frac{1}{r} \cdot \frac{a_{n+1} - a_1}{a_1 a_{n+1}}$$

Dar,

$$a_{n+1} - a_1 = nr$$

deci:

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{n}{a_1 a_{n+1}}. \qquad (4)$$

În identitatea de mai sus, fie $a_k = (p-1)k - p + 2$ unde $k = 1, 2, \ldots, n+1$. Obținem:

$$\frac{1}{1\cdot p} + \frac{1}{p(2p-1)} + \ldots + \frac{1}{[(p-1)n - p + 2]\,[(p-1)n + 1]} = \frac{n}{(p-1)n+1}$$

adică, enunțul problemei 6020 din G.M.F.-B nr. 10/1963.

În identitatea (4), fie $p = 2$ și $n = 99$. Obținem:

$$\frac{1}{1\cdot p} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{99\cdot 100} = \frac{99}{100}.$$

adică enunțul problemei 2519 din G.M.F. seria *B*.

d) În identitatea inițială (1) facem $k = 2$ și $p = 2$. Obținem

$$\frac{a_1 + a_2}{a_1^2 a_2^2} + \frac{a_2 + a_3}{a_2^2 a_3^2} + \ldots + \frac{a_n + a_{n+1}}{a_n^2 a_{n+1}^2} = \frac{1}{(2-1)r}\left[\frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a_{p+1}^2}\right]$$

Fie acum, $a_k = 2k - 1$, $(k = 1, 2, \ldots, n+1)$. Obținem:

$$\frac{1+3}{1^2\cdot 3^2} + \frac{3+5}{3^2\cdot 5^2} + \ldots + \frac{2n-1+2n+1}{(2n-1)^2(2n+1)^2} = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{(2n+1)^2}\right]$$

de unde, făcînd calculele obținem identitatea interesantă:

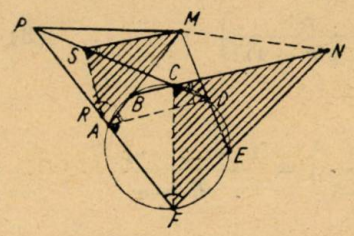
$$\frac{1}{1^2\cdot 3^2} + \frac{2}{3^2\cdot 5^2} + \ldots + \frac{n}{(2n-1)^2\cdot(2n+1)^2} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)^2}$$

Liviu Pîrșan, student matematici București

11. O demonstrație a teoremei lui Pascal

Este cunoscută următoarea teoremă a lui Pascal: *Laturile opuse ale unui exagon înscris într-o conică se taie în trei puncte colineare.*

Fără a restrînge generalitatea putem demonstra această teoremă pentru un cerc, apoi facem o proiecție ortogonală sau conică.



Sînt cunoscute mai multe demonstrații, fie folosind teorema lui *Menelaus* și puterea punctului față de cerc, fie folosind raportul anarmonic.

Vom da aici o cunoscută demonstrație elementară folosind patrulatere inscriptibile.

Fie $ABCDE$ și $M \equiv (AB;\ DE)$, $N \equiv (BC:\ EF)$, $P \equiv (CD;\ AF)$. Ducem MS paralelă cu BC $(S \in CD)$ și MR paralelă cu NF $(R \in AF)$. Deoarece $MS \parallel BC$, $\sphericalangle MSD = \sphericalangle NCD$; dar $\sphericalangle NCD = \sphericalangle MAD$, deoarece patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil. Rezultă $\sphericalangle MSD = \sphericalangle MAD$, deci, patrulaterul $MSAD$ este inscriptibil.

Deoarece $MR \parallel NF$, $\sphericalangle PRM = \sphericalangle PFN$; dar $\sphericalangle PFN = \sphericalangle ADM$ deoarece patrulaterul $ADFF$ este inscriptibil. Rezultă $\sphericalangle PRM = \sphericalangle ADM$, deci, patrulaterul $MRAD$ este inscriptibil.

Cercurile circumscrise patrulaterelor $MSAD$ și $MRAD$, având trei puncte comune M, A și D, coincid. Deci, patrulaterul $ARSD$ fiind inscriptibil, $\sphericalangle RSD = \sphericalangle FAD$. Dar $\sphericalangle FAD = \sphericalangle FCD$, deci $\sphericalangle RSD = \sphericalangle FCD$, deci $RS \parallel CF$. Rezultă că triunghiurile RSM și FCN sînt omotetice, deci, dreapta MN trece prin P.

N. Teodorescu, București

12. Asupra unei inegalități

Ne propunem să rezolvăm următoarea problemă: Să se stabilească numărul soluțiilor în numere întregi ale inegalității

$$|x| + |y| < k$$

considerîndu-se că soluțiile x, y și y, x sînt diferite pentru $x \neq y$, unde k este un număr natural.

Vom căuta numărul perechilor de numere întregi x, y, pentru care $|x| + |y| = i, (i = 0, 1, \ldots, k-1)$. Să calculăm numărul perechilor de soluții x, y care verifică ecuația

$$|x| + |y| = i$$

unde x poate lua $i+1$, valori și anume, $0, 1, 2, \ldots, i-1, i$ în care caz $|y|$ va fi egal respectiv cu $i, i-1, \ldots, 2, 1, 0$. Însă, dacă $|x| = p$, $|y| = i-p$, unde $p \neq 0$; $i - p \neq 0$, ținînd seamă de semnificația modulului, x și y pot lua încă două valori care diferă prin semn, și deci, în acest caz obținem patru soluții diferite pentru ecuația $|x| + |y| = i$ și anume:

$$(p, 1-p),\ (-p,\ i-p),\ (p,\ -i+p) \text{ și } (-p,\ i+p).$$

Dacă $p = 0$ sau $i - p = 0$ obținem numai două soluții pentru ecuația $|x| + |y| = i$ și anume:

$$(0, i) \text{ și } (0, -i) \text{ sau, respectiv } (i, 0) \text{ și } (-i, 0).$$

Astfel, pentru $i \neq 0$ ecuația $|x| + |y| = i$ admite $2 + 4(i-1) + 2 = 4i$ soluții diferite. Dacă $i = 0$ ecuația $|x| + |y| = 0$ admite o singură soluție. De aici rezultă că numărul soluțiilor diferite în numere întregi, ale inegalității $|x| + |y| < k$ este egal cu

$$1 + 4[1 + 2 + \ldots + (k-1)] = 1 + 4 \cdot \frac{(k-1)(k)}{2} = (k-1)^2 + k^2$$

Caz particular. $|x| + |y| < 5$ are numărul soluțiilor întregi diferite egal cu

$$(5-1)^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41 \text{ soluții.}$$

Problema a fost studiată pentru cazul $k = 1000$ în Probleme neelementare tratate elementar de *A. M. Iaglom* și *I. M. Iaglom*

Alexandru Filipoiu, student București

13. În legătură cu teorema lui Van Aubel

Voi demonstra teorema lui *Van Aubel* și voi da cîteva aplicații ale ei.

Triunghiului $AA'C$ și transversalei BMB' îi aplicăm teorema lui Menelaus :

$$\frac{BC}{BA'} \cdot \frac{A'M}{MA} \cdot \frac{AB'}{B'C} = 1 \text{ sau : } \frac{BA'}{BC} = \frac{A'M}{MA} \cdot \frac{AB'}{B'C} \tag{1}$$

Aplicăm teorema lui *Menelaus* și triunghiului ABA' și transversalei CMC' :

$$\frac{BC}{CA'} \cdot \frac{A'M}{MA} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1 \text{ sau : } \frac{CA'}{BC} = \frac{A'M}{MA} \cdot \frac{AC'}{C'B} \tag{2}$$

Adunînd membru cu membru relațiile (1) și (2) avem :

$$1 = \frac{A'M}{MA} \cdot \frac{AB'}{B'C} + \frac{A'M}{MA} \cdot \frac{AC'}{C'B} \text{ sau :}$$

$$A'M \cdot AB' \cdot C'B + A'M \cdot AC' \cdot B'C = MA \cdot B'C \cdot C'B$$

Împărțim această relație cu $B'C \cdot C'B \cdot MA'$ sau : $\frac{AM}{MA'} = \frac{AC'}{C'B} + \frac{AB'}{B'C}$ care este teorema lui Van Aubel.

Aplicații. 1° Centrul de greutate al unui triunghi se află la $\frac{2}{3}$ din mediana corespunzătoare, depărtare de vîrf. Dacă $M \equiv G$ avem :

$$\frac{AG}{GA'} = 1 + 1 = 2 \text{ sau : } \frac{AG}{AA'} = \frac{2}{3}.$$

2° Demonstrarea teremei lui *Ceva* : avem,

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{AM}{MA'} - \frac{AB'}{B'C}$$

Dacă înmulțim această relație cu $\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A}$ avem :

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = \frac{AM}{MA'} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} - \frac{BA'}{A'C} = \frac{BA'}{A'C}\left[\frac{AM}{MA'} \cdot \frac{CB'}{B'A} - 1\right] \tag{3}$$

Din teorema lui Menelaus aplicată triunghiului $AA'C$ și transversalei BMB' avem :

$$\frac{AM}{MA'} \cdot \frac{CB'}{B'A} = \frac{BC}{BA'}$$

deci, relația (3) devine :

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = \frac{BA'}{A'C}\left[\frac{BC}{BA'} - 1\right] = \frac{BC - BA'}{A'C} = 1$$

deci :

$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=1$$

care este teorema lui *Ceva*.

3° Calculul segmentelor AH și HA' (unde $H\equiv$ ortocentrul).

Avem :

$$\frac{AH}{HA'}=\frac{AC'}{C'B}+\frac{AB'}{B'C}=\frac{b\cos A}{a\cos B}+\frac{c\cos A}{a\cos C}=\frac{\cos A}{a}\left(\frac{b}{\cos B}+\frac{c}{\cos C}\right)=$$

$$=\frac{\cos A\cdot(b\cos+c\cos B)}{a\cos B\cdot\cos C}=\frac{\cos A}{\cos B\cdot\cos C}.$$

O proprietate a proporțiilor dă :

$$\frac{AH}{AA'}=\frac{\cos A}{\cos A+\cos B\cdot\cos C}\qquad\frac{\cos A}{\cos A+2\,[\cos(B+C)+\cos(B-C)]}=$$

$$=\frac{2\cos A}{\cos A+\cos(B-C)}=\frac{2\cos A}{2\cos\dfrac{A+B+C}{2}\cos\dfrac{A-B+C}{2}}=$$

$$=\frac{\cos A}{\cos\dfrac{180-2C}{2}\cos\dfrac{180-2B}{2}}=\frac{\cos A}{\sin B\cdot\sin C}.$$

Dar, $AA'=c\sin B$, deci :

$$\frac{AH}{c\sin B}=\frac{\cos A}{\sin B\cdot\cos C}\quad\text{sau :}\quad AH=\frac{c\cos A}{\sin C}=2R\cos A$$

deci : $AH=2R\cos A$.

$$HA'=c\sin B-2R\cos A=2R\sin B\cdot\sin C-2R\cos A=$$

$$=2R\,[\sin B\cdot\sin C-\cos A]=2R[\sin B\cdot\sin C+\cos(B+C)=$$

$=2R\cos B\cdot\cos C$ deci,

$$HA'=2R\cos B\cdot\cos C.$$

4° Calculul segmentelor SI și IA', unde I este centrul cercului înscris. Avem :

$$\frac{AI}{IA'}\cdot\frac{AC}{C'B}\cdot\frac{AB'}{B'C}=\frac{b}{a}+\frac{c}{a},\ \text{teorema bisectoarei}$$

$$\frac{AI}{IA'}=\frac{b+c}{a}\ \text{sau :}\quad\frac{AI}{AA'}=\frac{b+c}{a+b+c}$$

$$AI = \frac{b+c}{2p} \cdot AA' = \frac{b+c}{2p} \cdot \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)} = \sqrt{\frac{bc(p-a)}{p}} \text{ deci :}$$

$$IA' = AA' - AI = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)} - \sqrt{\frac{bc(p-a)}{p}} =$$

$$= \sqrt{bc(p-a)}\left[\frac{2}{b+c}\sqrt{p} - \frac{1}{\sqrt{p}}\right] = \sqrt{bc(p-a)} \cdot \frac{2p-(b+c)}{\sqrt{p(b+c)}} = \frac{a}{b+c}\sqrt{\frac{bc(p-a)}{p}}.$$

Simion G. Gheorghe, liceul 1 Ploiești

14. O generalizare a notei din nr. 4/1964

În articolul „O aplicație de analiză combinatorie" (G.M.-B 4/1964) tov. Mihu Cerchez calculează numărul de broaște care se pot forma cu 4 verturi de forme diferite, astfel încît fiecare broască, alcătuită din 4 verturi. să difere de alta fie prin forma verturilor, fie prin ordine, fie și prin ordine și prin forma lor.

În nota aceasta vom stabili o formulă generală cu ajutorul căreia să se calculeze direct rezultatele unor probleme asemănătoare. Pentru a ajunge la formula căutată întrebuințăm un alt tip de aranjament, S_n^k deosebite de cele obișnuite și anume, cel în care pe lîngă grupările simple inter vin și grupările cu repetiție — unde n este numărul obiectelor, iar k numărul obiectelor ce intră într-o grupă.

Considerăm că avem n obiecte diferite : $a_1, a_2, \ldots, a_n$. În cele ce urmează vom calcula S_n^k care reprezintă numărul tuturor grupelor simple și cu repetiție de k obiecte, formate din cele n obiecte date. Pentru a ajunge la acest număr pornim de la S_n^1 formînd tabloul (T_1) :

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \qquad (T_1).$$

Deoarece fiecare obiect reprezintă o grupă vom avea :

$$S_n^2 = n$$

Pentru a forma tabloul (T_2), reprezentînd numărul aranjamentelor de n obiecte luate cîte două, vom adăuga la dreapta fiecărei grupe din (T_1), rînd pe rînd toate celelalte obiecte obținînd :

$$\begin{array}{llll} a_1a_1 & a_2a_1 & \ldots & a_na_1 \\ a_1a_2 & a_2a_2 & & a_na_2 \\ \vdots & & & \\ a_1a_n & a_2a_n & \ldots & a_2a_n \end{array} \qquad (T_2)$$

Deoarece numărul coloanelor este chiar A_n^1, iar numărul grupelor din fiecare coloană este egal cu n, avem :

$$S_n^2 = n \cdot S_n^1.$$

Presupunem că am ajuns la tabloul (T_{p-1}) reprezentînd S_n^{p-1}. Pentrd a forma tabloul (T_p) așezăm după fiecare grupă din (T_{p-1}) rînd pe rînu

toate obiectele. Deoarece fiecare grupă din (T_{p-1}) a generat n grupe în (T_p) avem :

$$S_n^p = n \cdot S_n^{p-1}.$$

Am ajuns la formula de recurență pe care o folosim pentru a găsi S_n^k. Dînd lui p consecutiv valorile ,2, 3, ..., $k-1$, k obținem :

$$S_n^2 = n \cdot S_n^1,\ S_n^3 = n \cdot S_n^2,\ \ldots,\ S^{k-1} = n \cdot S_n^{k-2},\ S_n^k = n \cdot S^{k-1}$$

Înmulținînd cele $k-1$ relații membru cu membru S_n^1 cu n găsim :

$$S_n^k = n^k.$$

Prin urmare, numărul tuturor grupelor de k obiecte care se pot forma din cele n obiecte este de n^k. În cele mai multe probleme avem $n = k$. Formula utilizată este : $S_n^n = n^n$.

În cazul particular folosit în articolul „O aplicație de analiză combinatorie" cu cele 4 verturi diferite se formează 256 broaște. După formula stabilită de noi, numărul broaștelor este

$$S_4^4 = 4^4 = 256,$$

adică, rezultatul obținut și în articol. Tot cu această formulă putem calcula rezultatul care trebuia obținut la problema 6279 G.M.-B 4/1964,

$$S_9^9 = 9^9 = 387\ 420\ 489 \text{ lacăte.}$$

Observație. — Spre deosebire de aranjamentele obișnuite, la aranjamentele utilizate în această notă indicele superior poate fi mai mare decît cel inferior, deoarece grupele fiind și cu repetiție, oricare dintre obiecte poate fi luat de oricîte ori vrem. Formula pe care am stabilit-o rămîne valabilă și în acest caz, deoarece în cursul notei nu s-a făcut nici o precizare în legătură cu valorile lui p și k.

Aplicație. — O casă de bani are trei uși, astfel încît pentru a ajunge la banii aflați în interior trebuie să se deschidă cu ajutorul unui cifru, rînd pe rînd, fiecare ușă. Cele trei uși au cîte un anumit număr de discuri care se pot roti pe un ax comun, pe fiecare disc fiind gravate cifrele 1...5 în ordine succesivă. Cifrul constă în formarea unor numere cu ajutorul discurilor, cîte un număr la fiecare ușă.

a) Dacă prima ușă are 6 discuri, a doua 5 discuri și a treia 4 discuri să se calculeze numărul caselor de bani care se pot construi știind că diferă între ele cel puțin prin cifrul de la cîte o ușă.

b) Știind că numărul discurilor este egal cu 15, să se arate că în orice mod le așezăm la cele trei uși, numărul total de case de bani cu cifru diferit care se pot construi este același.

Soluția. — Numărul N al caselor de bani este egal cu numărul de cifruri diferite care se pot forma. Presupunem că la prima ușă se pot forma N_1 numere diferite, la a doua N_2 numere, iar la a treia N_3 numere. Fiecărui număr de la prima ușă îi corespunde N_2 numere diferite de la a doua ușă, iar fiecărui număr de la ușa a doua îi pot corespunde N_3 numere diferite de la ușa a treia. Deci, fiecărui număr de la prima ușă îi corespund $N_2 \cdot N_3$ moduri de a aranja numerele de la ușa a doua și a treia. Numărul total de cifruri diferite este deci :

$$N = N_1 \cdot N_2 \cdot N_3 \qquad (1)$$

a) Conform datelor de la acest punct avem : $N_1 = S_5^6 = 5^6$; $N_2 = S_5^5 = 5^5$; $N_3 = S_5^4$. Înlocuim în relația (1) și obținem :

$$N = 5^6 \cdot 5^5 \cdot 5^4 = 5^{15} = 30\,517\,578\,125$$

deci, numărul caselor de bani care se pot construl este de

$$30\,517\,578\,125.$$

b) Presupunem că prima ușă este prevăzută cu m discuri, a doua cu n discuri, iar a treia cu p discuri. Deoarece numărul total de discuri este egal cu 15, avem :

$$m + n + p = 15 \tag{2}$$

mai avem.

$$BN_1 = S_5^m = 5^m;\ N_2 = S_5^n = 5^n;\ N_3 = S_5^p = 5^p.$$

Înlocuind în relația (1) și ținînd seama de relația (2) obținem

$$N = N_1 \cdot N_2 \cdot N_3 = 5^m \cdot 5^n \cdot 5^p = 5^{m+n+p} = 5^{15} = \text{const},$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Dan Apșan, cl. X Lic. 3 Baia Mare

15. Relații metrice într-un triunghi dreptunghic

Dacă în triunghiul ABC, $A' \in BC$, $A'' \in BC$ și $\sphericalangle AA''C = \sphericalangle AA''B = A$ atunci avem :

$$AB^2 = BC \cdot BA'';\quad AC^2 = CB \cdot CA' \tag{1}$$

$$AA'^2 = AA''^2 = BA'' \cdot A'C; \tag{2}$$

$$AB^2 + AC^2 = BC(BC + A'A'') \tag{3}$$

a. Din triunghiurile asemenea $A'AC$ și ABC avem :

$$\frac{A'C}{AC} = \frac{AC}{BC};\ AC^2 = BC \cdot A'C;$$

b. Din triunghiurile asemenea $A''BA$ și ABC avem :

$$\frac{A''B}{AB} = \frac{BA}{BC} \text{ sau : } AB^2 = BC \cdot BA'';$$

c. Din a. și b. reiese că triunghiurile $A'AC$ și $A''BA$ sînt asemenea, deci :

$$\frac{A'C}{A''A} = \frac{A'A}{A''B} \text{ sau : } A'A \cdot A''A = A'C \cdot A''B = A'A^2 = A''A^2$$

Tot din a. și b., adunînd cele două relații :

$$AB^2 + AC^2 = BC(BA'' + A'C) = BC(BA'' + A'A'' + A''C) = BC(BC + A'A'').$$

Se vede că dacă $A = 1$ dr., atunci $A' \equiv A''$ și se obțin relațiile metrice dintr-un triunghi dreptunghic.

Iacob Hadîrcă, profesor Breaza

PROBLEME REZOLVATE

Problema 7040

Fie o sferă S și Γ un cerc mare al său cu diametru AB. Pe planul cercului se ridică o perpendiculară în A și se ia un punct F pe această perpendiculară.

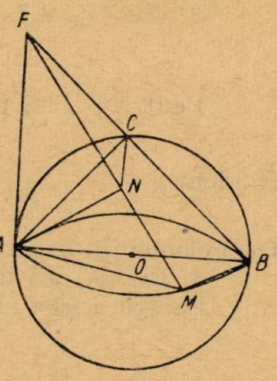
Să se arate că :

a. *M fiind un punct mobil pe cercul Γ, dreapta FM se află în planul perpendicular pe MB în punctul M.*

b. *Cînd M descrie cercul Γ proiecția N punctului A pe dreapta FM descrie tot un cerc al cărui diametru este AC, punctul C fiind intersecția dreptei FB cu sfera dată.*

c) *Cercul obținut la punctul b) să află pe sfera S.*

Lucia Țene



Soluția autoarei a) Conform teoremei celor trei perpendiculare $FM \perp BM$ deci FM se află în planul perpendicular în M pe BM.

b) Notăm cu P planul determinat de punctele F, M, B. FM este perpendiculară pe MB din planul P. AM este perpendiculară pe MB și situată în afara planului P.

Conform reciprocei teoremei celor trei perpendiculare AN este perpendiculară pe planul P.

c) AN fiind perpendiculară pe planul P este perpendiculară și pe NB deci unghiul ANB este drept, rezultă că punctul N se află pe sfera S.

Problema 7041

Se consideră mulțimea perechilor (a,b) pentru care $b \neq 0$ și $a + b \neq 0$ $(a \in R,\ b \in R)$. Două perechi (a,b) și $(c.d)$ sînt egale numai dacă $a = c$ și $b = d$ se definește operația $\ast$ astfel :

$$(a, b) \ast (c,d) = (ac + ad + bc, bd)$$

Să se demonstreze :

1) *Operația $\ast$ este comutativă și asociativă.*

2) *Există element neutru.*

3) *Fiecare element (a,b) admite un invers.*

Lidia Cohal, profesoară, Iași

Soluția autoarei. 1) Să arătăm că operația $\ast$ este comutativă.

În adevăr :

$$(a, b) \ast (c, d) = (ac + ad + bc, bd)$$

și

$$(c, d) \ast (a, b) = (ca + cb + da, bd)$$

de unde rezultă :

$$(a, b) \ast (c, d) = (c, d) \ast (a, b)$$

Să arătăm că operația $*$ este asociativă.

În adevăr :

$$(a, b) * [(c, d) * (ef)] = (a, b) * [(ce + cf + de, df)] =$$
$$= [a(ce + cf + de) + adf + b(ce + cf + de),\ bdf] =$$
$$= (ace + acf + adc + adf + bce + bcf + bde,\ bdf)$$

și

$$[(a, b) * (c, d)] * (ef) = (ac + da + bc, bd) * ef) =$$
$$= [(ac + ad + bc)e + (ac + ad + bc)f + bde, bdf] =$$
$$= [ace + ade + bce + acf + adf + bcf + bde, bdf)$$

De unde rezultă :

$$(a, b) * [(c, d) * (e, f)] = [(a, b) * (c, d)] * ef)$$

2) Fie (x_0, y_0) elementul neutru. El satisface ecuația :

$$(a, b) * (x_0, y_0) = (a, b)$$

Pentru a găsi pe (x_0, y_0) va trebui să rezolvăm sistemul :

$$ax_0 + ay_0 + bx_0 = a,\ by_0 = b$$

Evident :

$$y_0 = 1,\ x_0 = 0$$

Deci elementul neutru este (0,1).

3) Fie (x', y') inversul elementului (a, b)

Pentru a găsi elementul (x', y') care satisface ecuația

$$(a, b) * (x', y') = (0, 1)$$

va trebui să rezolvăm sistemul :

$$ax' + ay' + bx' = 0,\ by' = 1$$

Soluția sistemului este

$$y' = \frac{1}{b},\ x' = -\frac{a}{b}\frac{1}{a+b}$$

Deci inversul elementului (a, b) este :

$$\left(-\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{a+b},\ \frac{1}{b}\right).$$

Problema 7075

Să se construiască grafic două cercuri secante de raze R și r astfel ca distanța centrelor lor să fie egală cu coarda comună.

Gh. Bazacov, Tr. Severin

Soluție dată de *Radu Vasile*, elev Ploiești.

Notăm distanța centrelor cu $O_1 O_2$ coarda comună cu MN și cu P intersecția ei cu linia centrelor.

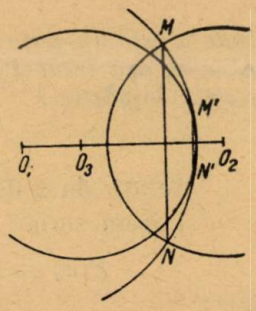
Folosind triunghiurile O_1PM și O_2PM putem scrie :

$$O_1O_2 = \sqrt{R^2 - \frac{MP^2}{4}} + \sqrt{r^2 - \frac{MP^2}{4}} \qquad (1)$$

Se cere ca $O_1O_2 = MN = x$; relația (1) ne conduce la ecuația :

$$x = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}} + \sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}},$$

Avem succesiv :



$$x - \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}}$$

$$x^2 + R^2 - \frac{x^2}{4} - 2x\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}} = r^2 - \frac{x^2}{4}$$

$$x^2 + (R^2 - r^2) = 2x\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}$$

ridicînd din nou la patrat se obține :

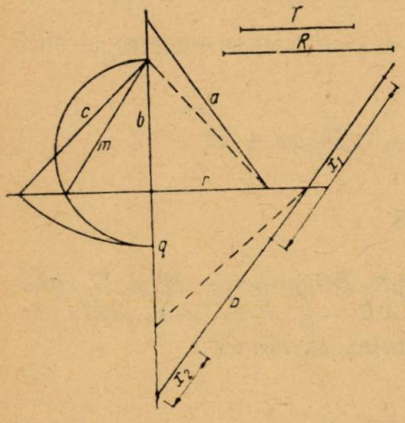
$$2x^4 - 2(R^2 + r^2)x^2 + (R^2 - r^2)^2 = 0.$$

Notăm $R^2 + r^2 = a^2$ și $R^2 - r^2 = b^2$.
Ecuația ia forma :

$$2x^4 - 2a^2x^2 + b^4 = 0, \text{ de unde}$$

$$2x^2 = a^2 \pm \sqrt{a^4 - 2b^4}; \quad x\sqrt{2} = \sqrt{a^2 \pm \sqrt{a^4 - 2b^4}}.$$

Radicalul dublu se poate înlocui cu suma și diferența a doi radicali simpli fiindcă



$A^2 - B^2 = C^2$, unde $c^2 = b^2\sqrt{2}$; atunci,

$$x\sqrt{2} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2\sqrt{2}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a^2 - b^2\sqrt{2}}{2}}$$

sau

$$2x = \sqrt{a^2 + b^2\sqrt{2}} \pm \sqrt{a^2 - b^2\sqrt{2}}$$

Notăm $m^2 = b^2\sqrt{2} = b \cdot b\sqrt{2}$ și atunci

$$2x = \sqrt{a^2 + m^2} \pm \sqrt{a^2 - m^2}.$$

Problema are două soluții. Pentru a determina distanța $O_1O_2 = x$ vom efectua construcțiile următoarelor segmente :

$$a = \sqrt{R^2 + r^2}, \; b = \sqrt{R^2 - r^2}, \; c = b\sqrt{2},$$
$$m = \sqrt{b \cdot c}, \; p = \sqrt{a^2 + m^2}, \; q = \sqrt{a^2 - m^2},$$

Atunci

$$x_1 = \frac{p + q}{2} \qquad x_2 = \frac{p - q}{2}.$$

Toate aceste construcții se pot face grupate într-o singură figură, economisind unele construcții elementare care se repetă.

Problema 7084

Fiind dat polinomul

$$P(x) = x(x+1)^{2n+1} + (\alpha - 1)\, x^n,$$

unde α este un parametru real, iar n un număr natural, se cere să se determine α, așa încît $P(x)$ să fie divizibil prin $x^2 + x + 1$ și să se afle cîtul acestei împărțiri.

Veronica Negrei, Craiova

Soluție dată de *N. Răduinea*, elev Constanța.

Putem scrie :

$$P(x) \equiv x(x+1)\,[(x^2 + x + 1) + x]^n + (\alpha - 1)x^n$$

sau :

$$P(x) \equiv (x^2 + x)\,[(x^2 + x + 1)P_1(x) + x^n] + (\alpha - 1)x^n$$

unde

$$P_1(x) \equiv (x^2 + x + 1)^{n-1} + C_n^1 (x^2 + x + 1)^{n-2}\, x + \ldots \ldots + C_n^{n-1}\, x^{n-1}$$

deci

$$P(x) \equiv (x^2 + x)\,(x^2 + x + 1)\,P_1(x) + (x^2 + x)\,x^4 + (\alpha - 1)x^4$$

$$P(x) \equiv (x^2 + x)\,(x^2 + x + 1)\,P_1(x) + x^4[x^2 + x + \alpha - 1]$$

Pentru ca $P(x)$ să fie divizibil cu $x^2 + x + 1$, este necesar și suficient ca $\alpha - 1 = 1 \to \alpha = 2$
și atunci

$$P(x) : (x^2 + x + 1) = (x^2 + x)P_1(x) + x^4$$

Problema 7093

În dreptunghiul $ABCD$ se iau pe dreapta BC punctele M și N simetrice în raport cu B. Fie $NB = BM = x$ și $AB = y$, $P \equiv (AN, DM)$.

Să se găsească locul geometric al punctului P, cînd :

a) *x e variabil, y fiind constant.*

b) *y e variabil, x fiind constant.*

Leonte Alexandru, Craiova

Soluția autorului, a) Fie $Q \equiv (PB, AD)$

Din asemănarea triunghiurilor PNM și PAD, ținînd seama că $NB = BM$, rezultă $AQ = QD$.

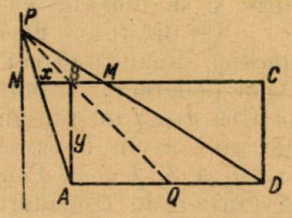
Rezultă că locuî geometric al punctului P cînd x variază este dreapta BQ.

b) Notînd $AQ = l$ (constant), avem din asemănarea triunghiurilor PNB și PAQ

$$\frac{AP}{NP} = \frac{AQ}{NB} \text{ de unde}$$

$$\frac{AP}{AN} = \frac{l}{l - x} \text{ adică}$$

$$AP = k.AN, \text{ unde } k = \frac{l}{l - x}$$



Dacă x este constant, punctul N descrie, o dreaptă Δ paralelă cu AB. În acest caz k este de asemenea constant și urmează că P descrie o dreaptă, anume omotetica dreptei Δ în omotetia de centru A și putere $k = \frac{l}{l - x}$.

Problema E : 2352

Să se arate că expresia :

$E = mn\,(mn - 9) + 2\,(m^2 + n^2) + (m - n)\,(3\,mn - 6)$ *se divide prin 4 pentru orice m și n intregi.*

Ioan Robilă, student, Iași

Soluție dată de *Ioniță Georgeta*, clasa VIII-a, București. Expresia dată se transformă succesiv :

$$E = m^2n^2 - 9mn + 2m^2 + 2n^2 + 3m^2n - 3mn^2 - 6m + 6n =$$
$$= m^2(n^2 + 3n + 2) - 3m\,(n^2 + 3n + 2) + 2(n^2 + 3n + 2) - 4 =$$
$$= (n^2 + 3n + 2)\,(m^2 - 3m + 2) - 4 = (n + 1)\,(n +$$
$$+ 2)\,(m - 1)\,(m - 2) - 4,$$

și cantitatea $(n + 1)\,(n + 2)$ se divide prin 2 ca produs de numerare consecutive, $(m - 1)\,(m - 2)$ de asemenea, deci $(n + 1)\,(n + 2)\,(m - 1)\,(m - 2)$ se divide prin 4.

Problema E : 2353

Să se scrie numărul 1965 folosind toate cifrele 2, 3., 4, 7, 8, 0 cîte o singură dată și folosind doar operații de adunare și scădere.

Eugen Popa, elev, Iași

Soluția autorului. Numărul 1965 nu poate apare ca suma a două numere formate din cele 6 cifre date. Într-adevăr un număr de 4 cifre nu poate apare decît prin adunarea unui număr de 2 cifre cu unul de 4 cifre (și în acest caz primele două cifre ale numărului de 4 cifre ar trebui să fie 19 sau 18, ceea ce nu este admis) sau a două numere de trei cifre lucru iarăși imposibil, deoarece primele cifre ale acestor numere ar trebui să fie 9. Evident că numărul nu poate fi obținut ca

sumă a trei numere, deoarece şi aici un număr ar trebui să aibă patru cifre şi să înceapă cu 19 sau 18.

Ca diferenţă de două numere, numărul 1965 trebuie să se scrie ca *abcd-ef*. Rezultă direct $a = 2$. Pentru b singura valoare convenabilă este 0. Apoi deoarece, trebuie să avem sau $d - f = 5$ sau $10 + d - f = 5$, pentru d şi f nu putem lua decît valorile 8, 3 ; 7, 2 ; 3, 8 ; 2,7. Două din ele nu convin deoarece este folosită cifra 2. Deci avem $d = 8$, $f = 3$, sau $d = 3$, $f = 8$. Pentru c şi e ne-a mai rămas să alegem între 4 şi 7. Avem deci de considerat : $2048 - 73 = 1975$. $2043 - 78 = 1965$, $2078 - 43 = 2035$, $2073 - 48 = 2025$.

Am găsit deci o soluţie a problemei sub forma $1965 = 2043 - 78$.

Dacă remarcăm că numărul 1965 nu poate fi obţinut în condiţiile date scăzînd două numere din altul, deci un poate fi de forma $abcd - s - f$ şi nici de forma $abcd - e + f$, conchidem că soluţia găsită este unică.

Observaţie. Folosind şi alte operaţii, ca de exemplul ridicarea la putere, se obţin şi alte soluţii. Un exemplu :

$$2^{4+7} - 83 + 0 = 1965$$

Problema E : 2360

Într-o secţie a I. F. Nehoiu, în luna mai indicele de valorificare a lemnului a crescut cu 10% faţă de luna aprilie. Ştiind că în lunile aprilie şi mai s-au prelucrat cîte 200 m³ lemn brut şi că în total în cele două luni s-a obţinut 300 m³ de cherestea să se calculeze indicele de valorificare a lemnului şi cantitatea de cherestea din fiecare lună?

Filipoiu Alexandru, elev Buzău

Soluţie dată de *Bogdan Lungulescu*, elev cl VIII Piteşti. Notăm cu x în procente indicele de valorificare a lemnului din luna aprilie şi deci cel din luna mai va fi $x + 10\%$ şi deci vom avea :

$$\frac{200 \cdot x}{100} + \frac{200\,(x + 10)}{100} = 300$$

de unde se obţine $x = 70\%$
şi deci $x + 10\% = 80\%$.

De unde se deduce imediat că în luna aprilie s-a obţinut 140 m³ de cherestea iar în luna mai 160 m³ de cherestea.

CHESTIUNI DE EXAMEN

Subiectele date la olimpiada de matematică 1966
Etapa locală din 6 februarie

Clasa IX liceu şi anul I şcoli pedagogice

7475. Fie $A = 4yz$; $B = x^2 - y^2 - 4z^2$; $C = (x + y)^2 + z\ (3x + 3y + 2z)$. Se cere :

a) Să se calculeze $A^2 - B^2$ şi să se descompună expresia obţinută în factori.

b) Să se simplifice fracția $\frac{A^2 - B^2}{C}$.

c) Se notează cu M respectiv N valorile numerice ale expresiilor $x^2 - y^2 - 4z^2 + 4yz$ și $4yz - x^2 + y^2 + 4z^2$ obținute pentru $x = -6$, $y = 8$, $z = -\frac{5}{2}$, iar cu F_1 și F_2 mulțimile divizorilor diferiți de 1 ai numerelor M respectiv N

Să se determine mulțimile: $E_1 \cap E_2$ și $E_1 \cup E_2$.

Lucia Țene, București

7476. Pe ipotenuza BC a unui triunghi ABC se ia un punct oarecare M. Se notează cu P și Q proiecțiile lui N respectiv pe catetele AB și AC.

a) Să se demonstreze că suma distanțelor punctelor P și Q la ipotenuză este egală cu înălțimea din A a triunghiului dat.

b) Se notează respectiv cu T și S simetricele lui N față de punctele P și Q.

Să se demonstreze că punctele T, A și S sînt în linie dreaptă; segmentele BT și CS sînt paralele și au suma constantă.

c) Care este poziția lui M pe ipotenuză, pentru care perimetrul patrulaterului $BCST$ este cel mai mic.

I. Loziciu, Timișoara

7477. Să se descompună în produs de factori expresia:

$$P(x, y) = (x - 1)^3 + (y + x)^2 + (y - 1)^3 - 4$$

Să se simplifice fracția

$$F(x, y) = \frac{(x - 1)^3 + (x + y)^2 + (y - 1)^3 - 4}{(x^2 + y^2 - xy + 3)(x^2 + y^2)}.$$

Să se afle valoarea numerică a fracției simplificate cînd $x + y = 3$ și $yx = -1$.

(*Subiect de rezervă*). *L. Mănescu*

7478. Se dă triunghiul ABC isoscel cu vîrful în A și unghiul $BAC < 90°$. Notăm cu A'; B'; C' simetricele vîrfurilor A; B; C față de laturile opuse lor. Să se demonstreze că:

a. Triunghiul $AB'C'$ este isoscel.

b. Triunghiul $A'B'C'$ este isoscel.

c. $3\ BC > B'C'$

d. Ce devine triunghiul $A'B'C'$ dacă unghiul $BAC = 120°$.

(*Subiect de rezervă*) *Ilie Stănescu*, Sibiu

Clasa X liceu

7479. Să se arate că

$$\left(\frac{2}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}\right) \cdots \left(\frac{n+1}{n} - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{(2n+1)!}{2^n(n+1)(n!)^3}$$

I. Apolozan, Medgidia

7480. Să se arate că

$n^2(n^2 - 1)(n^2 + 5)$ se divide cu 36, n fiind întreg pozitiv.

Cezar Ivănescu, Tîrgoviște

7481. Într-un plan π se dă un paralelogram $ABCD$ cu unghiul $A = 60°$, $AB = 2a$ și $AD = a$. De aceiași parte a planului π ducem perpendiculare pe plan în punctele A, B, C, D. Pe perpendiculara din B se ia $BM = 2a$, pe perpendiculara din D se ia $DN = 3a$; iar pe perpendiculara din C se ia un punct P astfel că $MP = NP$.

a) Să se calculeze lungimea CP.

b) Planul MNP fiind intersectat de perpendiculara din A în punctul Q, să se calculeze lungimea AQ.

c) Să se calculeze distanțele de la punctele P și Q la dreapta BD.

d) Notînd cu x unghiul diedru format de planul π și planul MNP să se demonstreze că $x > \frac{\pi}{3}$ calculînd valoarea uneia din funcțiile trigonometrice ale unghiului x.

Iulius Ambrozius, Sighișoara

7482. a) Să se stabilească egalitatea:

$$18 + 78 + 204 + \ldots + (n - 1)\, n\, (4n + 1) = n(n + 1)(n^2 - 1)$$

b) Să se verifice această egalitate prin metoda inducției matematice.

(*Subiect de rezervă*). *E. Huniar*, Jimbolia

7483. Să se afle valorile lui x pentru care

$$|1 + \operatorname{tg} x| + |1 - \operatorname{tg} x| = 2\sqrt{3}$$

(*Subiect de rezervă*) *C. Ionescu-Țiu*

7484. Se dă un plan P și o semidreaptă Ox care face cu planul dat un unghi de 30°, O fiind planul P.

Un punct A situat de aceeași parte a planului cu Ox se proiectează pe planul P în punctul B, iar pe semidreaptă în punctul C. Se cere:

a) Să se calculeze distanța BC știind că

$$OA = 17 \text{ cm}, \; OB = 8 \text{ cm și } OC = 12 \text{ cm}.$$

b) Notînd cu D proiecția lui C pe planul P și cu M mijlocul lui OD, să se arate că MA și OD sînt perpendiculare.

c) În cazul cînd punctul A se mișcă în spațiu, menținînd în tot timpul deplasării, distanța AO de 17 cm și BP de 8 cm, să se determine locul descris de punctul A.

(*Subiect de rezervă*). *Gh. Bazacov*, Tr. Severin

Clasa XI liceu

7485. Fie dreptunghiul $OABC$ și pe latura OC punctul variabil M. Se notează cu P punctul de intersecție dintre AM și OB, cu Q punctul de intersecție dintre AC și BM, cu I punctul de intersecție dintre OB și AC și cu N punctul de intersecție dintre PQ și IM. Să se afle locul geometric al punctului N.

b) Dacă R și S sînt respectiv punctele unde BN și AN intersectează pe OC, să se arate că RS = constant.

7486. Se consideră funcția f definită pe $(0, 1]$ prin relația

$$f(m) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{2m + \cos 2mx}{\sin^2 mx} \right)^{\frac{1}{\cos^2 mx}}$$

și se cere:

a) Să se calculeze $f(1)$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{m \to 1 \\ m < 1}} f(m)$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{m \to 0} f(x)$.

Alex. Lalescu, Cîmpina

7487. Să se afle domeniul maxim de definiție al funcției

$$f(x) = \log_2 \log_3 \log_4 \frac{2x^2 - 26x + 56}{x^2 - 9x + 14}.$$

Subiect de rezervă) *Laura Constantinescu*, Sibiu

7488. Să se calculeze

$$\lim_{x \to 0} \left(2 - \sqrt[3]{\cos x} \cdot \cos 2x\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

(*Subiect de rezervă*) *Augustin Matei*, Cluj

7489. a) Să se verifice analitic că ortocentrul H, centrul de greutate G, centrul cercului circumscris O și centrul cercului care trece prin mijloacele laturilor unui triunghi sînt 4 puncte coliniare.

b) Să se calculeze raportul segmentelor OG și GH.

(*Subiect de rezervă*) *E. Bukovski*, Sighișoara

Anul II — școli profesionale

7490. Se dă sistemul:

$$x + y = 3m$$

$$(x - 1)(y - 1) = 2m(m - 2), \; m \text{ parametru real.}$$

Se cere :

a) Să se rezolve

b) Să se determine parametrul real m astfel ca :

$$(xy)^2 + \frac{8}{27}(x + y)^3 = 13m^2 - 2m - 3.$$

Lucia Țene

7491. Se dă un trapez $ABCD$ în care E și F sînt mijloacele laturilor neparalele AD și BC. Bisectoarele unghiurilor D și C întîlnesc linia mijlocie EF respectiv îm M și N. Știind că $\sphericalangle D = 60°$ și $\sphericalangle C = 45°$, se cere : a) Să se calculeze unghiurile patrulaterului $CDMN$. b) Să se arate că AM și BN sînt respectiv bisectoarele unghiurilor A și B. c) Să se arate că triunghiurile ADM și BCN sînt triunghiuri dreptunghice d) Să se construiască grafic trapezul $ABCD$ de mai sus dacă se mai dă că $DM = MN = 2$ cm.

e) Dacă vîrfurile A și D rămîn fixe, iar BA și CD se măresc cu lungimea a fiecare, să se spună cum se modifică segmentul MN?

C. Ionescu-Țiu

Anul III școli pedagogice

7492. Trei dactilografe copiază o lucrare. S-a socotit că dacă o dactilografă va lucra 6 ore, a doua 4 ore iar a treia le va ajuta timp de 1 oră, ele vor transcrie 98 pagini. În fiecare oră de lucru comun cele trei dactilografe transcriu 28 pagini, iar primele două dactilografe lucrează în 3 ore 54 de pagini. Se întreabă :

a) Cîte pagini transcrie fiecare pe oră.

b) Lucrarea copiată de cele trei dactilografe a fost dată la tipar și au ieșit 1347 pagini.

c) De cîte caractere de tipar a fost nevoie pentru paginarea acestei lucrări, fiecare tipar fiind întrebuințat numai o dată.

7493. Într-un triunghi isoscel ABC ($AB = AC$) de laturi $AB = AC = b$, $BC = 2a$ și înălțimea h se consideră cercul înscris și un alt cerc tangent laturilor egale și cercului înscris. Să se exprime cu ajutorul elementelor date ale triunghiului.

a) Razele celor două cercuri și segmentele în care perpendicularele din centrele cercurilor împart latura $AC = b$.

b) Lungimea tangentei comune celor două cercuri perpendiculare pe linia centrelor și limitată la laturile egale ale triunghiului.

c) D fiind un punct pe latura BC astfel ca $CD = \frac{ab}{b + h}$ să se arate că $\sphericalangle CAD$ este o pătrime din $\sphericalangle BAC$.

Elena Flondor

Anul I școli profesionale și de meserii

7494. Se dă expresia :

$$E = \left(\frac{1}{a^3 - ab^2} + \frac{1}{a^2b + 2ab^2 + b^3}\right) : \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \cdot \left(\frac{a^2}{b} - 2a + b\right).$$

Se cere :

a). Să se aducă expresia la forma cea mai simplă

b) Să se afle valoarea numerică a ei pentru :

$$a = \frac{2}{3},\ b = -\frac{5}{6}.$$

Iliescu Dumitru, Grup şcolar energetic Craiova

7495. Un triunghi dreptunghic are ipotenuza $BC = 30$ cm şi o catetă $AC = 24$ cm. Prin punctul M situat pe ipotenuză la distanţa de 12 cm de vîrful C, se duce paralela MN la înălţimea AD.

Să se afle perimetrul triunghiului CMN (punctul N se găseşte pe cateta AC).

Şc. prof. Filatura Românească de Bumbac, Bucureşti

Anul II şcoli profesionale şi de meserii

7496 : Se dă expresia :

$$E = \frac{a + b - \sqrt{a^2 - b^2}}{a + b + \sqrt{a^2 - b^2}} + \frac{a + b + \sqrt{a^2 - b^2}}{a + b - \sqrt{a^2 - b^2}} + 2.$$

Se cere : a) Să se aducă expresia la forma cea mai simplă, b) Să se afle valoarea numerică a ei pentru

$$a = \sqrt{3} \text{ şi } b = \sqrt{2}$$

7497. Se dă o prismă dreaptă cu baza un triunghi cu laturile de 13 cm, 14 cm şi 15 cm, iar înălţimea prismei este egală cu înălţimea triunghiului de bază, corespunzătoare laturei celei mai mari. Se cere : a) Să se afle volumul prismei.

b) Această prismă se taie cu un plan care trece prin latura cea mai mare a unei baze şi vîrful opus al celeilalte baze.

Să se afle perimetrul triunghiului obţinut prin tăiere.

Anul I şcoli tehnice de maiştri

7498. Să se rezolve sistemul :

$$\frac{r + a}{t - b} + \frac{2a + b}{ab - a} = 0$$

$$\frac{r - t + 5}{3 - r + r} = -\frac{5 + 2b}{2b - 3}$$

în care r şi t sînt necunoscute, iar a şi b cunoscute.

7499. Se dă expresia :

$$F = \frac{\text{tg}240° - \text{tg}\,135°}{\cos 330° + \sin 210°} - \frac{\sin 120° - \cos 300°}{\cos(-30°) - \cos 120°}.$$

Se cere să se calculeze valoarea expresiei, cu 2 zecimale exacte.

7500. Se dă triunghiul ABC cu laturile $a = 36$ cm, $b = 29$ cm, $c = 25$ cm.

a) Să se stabilească forma triunghiului (ascuțitunghi, obtuzunghi sau dreptunghi).

b) Să se construiască triunghiul la scara $\frac{1}{5}$.

c) Să se calculeze aria triunghiului dat.

d) În acest triunghi dat se înscrie un pătrat care are două vîrfuri pe latura a, iar celelalte două pe laturile b și c.

Să se calculeze latura acestui pătrat.

Reinheimer Emilia Gr. școlar Unirea București

PROBLEME PROPUSE *

7501. Să se determine numerele de patru cifre $\overline{abcd}$ știind că

$$6ac = bd + 1; \quad a + d = c$$

Alex. Filipoiu, student București

7502. Pe laturile AB și AD ale paralelogramului $ABCD$ se construiesc în exterior triunghiurile isoscele dreptunghice ABE și ADF ($\sphericalangle A = 90°$). Să se demonstreze că AC este perpendiculară pe EF.

V. M. Stoican, elev Golești

7503. Să se descompună în produs de factori expresia :

$$E = xyz + 2\,[xy(x+y) + yz(y+z) + xz(x+z)] + 4[x(x+y)(x+z) + y(y+z)(y+x) + z(x+z)(y+z)] + 8(x+y)(x+z)(y+z).$$

D. Acu, student Cluj

7504. Fie B, C două puncte fixe pe cercul (O) și A un punct mobil pe cerc. Dacă M și N sînt simetricele punctului O față de AC și respectiv AB, să se afle locul geometric al intersecției dreptelor BM și CN, precum și locurile geometrice ale punctelor M și N.

Dan Cartianu, elev București

7505. Să se arate că într-un triunghi dreptunghic există relația :

$$E = \frac{a+b+c}{-a+b+c} - \frac{b+c+a}{-b+c+a} - \frac{c+a+b}{-c+a+b} = 1.$$

unde a, b și c reprezintă ipotenuza, respectiv catetele triunghiului.

V. A. Ciocoiu, student București

---

*) IX (7501—7508); X (7509—7514); XI (7515—7523); S (7524—7528). Soluțiile se primesc pînă la 31 iulie 1966.

7506. Fie ABC un triunghi isoscel cu vîrful în A. Bisectoarele unghiurilor B şi C taie respectiv laturile AC şi AB în D şi E. Notăm $BD \cap CE = O$ şi $(\Delta) \cap AC = P$; $(\Delta) \cap BC = M$, unde $(\Delta) \cap AB = \Phi$ şi $O \in (\Delta)$.

a) Să se arate că avem relaţia $\frac{2}{BC} = \frac{1}{BM} - \frac{1}{AC}$.

b) Să se stabilească condiţiile în care triunghiul NOP este isoscel.

Şerban Bărcănescu, elev Bucureşti

7507. Dacă $a.b.c = 1$ avem : $\frac{1}{c(1+b)} + \frac{1}{a(1+c)} + \frac{1}{b(1+a)} \geqslant \frac{3}{2}$.

Ioan V. Maftei, profesor Bucureşti

7508. Pe diagonala AC a patrulaterului convex oarecare $ABCD$ considerăm un punct mobil F. Prin F trec două drepte variabile (Δ') şi (Δ'') care intersectează laturile AB, BC respectiv AD, DC în M, N respectiv Q, P. Să se afle locul geometric al intersecţiei dreptelor QM, PN cînd F, descrie dreapta AC, iar (Δ') şi (Δ'') se rotesc în jurul lui F.

Andrei Rugină, elev Roman

7509. Să se arate că :

$$128a_{21}^7 - 224a_{21}^5 R^2 + 112a_{21}^3 R^4 - 14a_{21} R^6 - R^7 = 0,$$

unde a_{21} este apotema poligonului regulat cu 21 de laturi şi R raza cercului circumscris. (În legătură cu articolul din G.M.—B 3/1964).

Ion Piuaru, elev Breaza

7510. Se dă ecuaţia :

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + mx + n = 0.$$

Să se arate că dacă $a = c = 0$ atunci :

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} + \frac{1}{x_4^2} + \frac{1}{x_5^2} = \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_5}\right)^2$$

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3 = 0 \quad \text{şi} \quad x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 = 5x_1x_2x_3x_4x_5.$$

Dan Stănescu, elev Ploieşti

7511. Să se arate că dacă $0 < x < 45°$ atunci există inegalitatea $\sqrt{2}\cos x > \operatorname{tg} x$. (În legătură cu problema 7134).

D. Stan, profesor Breaza

7512. Se consideră sumele :

$S_1(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+4)(k^2+3k+1)}{(k+3)!}$ şi $S_2(n) = \sum_{k=1}^{n} k!\,(k+2)(k^2+k+1)$ şi să se determine $f(n)$ din relaţia :

$$\frac{1}{(n+1)!}[1 + S_2(n)] = (n+1)!\left[\frac{11}{6} - S_1(n-2)\right] = f(n).$$

Ambrozie Lelijek, profesor Turda

7513 Să se demonstreze că:

a) $\sin\frac{4\pi}{21}\cdot\sin\frac{10\pi}{21}\cdot\sin\frac{4\pi}{7}=\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{21}\cdot\cos\frac{5\pi}{21}$,

b) $\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\sin\frac{2\pi}{21}\cdot\sin\frac{5\pi}{21}=\frac{1}{8}$.

A. Stanciu, Brăila

7514. Să se arate că pentru n natural expresia $E=a^{n-1}\cdot x^{n+2}+(x+a)^{2n+1}$ este divizibilă cu x^2+ax+a^2.

Andrei Viorel, absolvent Galaţi

7515. Să se reprezinte grafic, fără derivată, funcţiile

$$f(x)=|1-x^2|-|1-|x||$$
$$g(x)=|1-x^2|+|1-|x||.$$

V. Negruţiu, absolvent Oradea

7516. Dacă există relaţia $a_1h_1=a_2h_2=\ldots=a_nh_n$ atunci există şi relaţia:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^p}\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}h_i^p\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{h_i^p}\right).$$

Liviu Pîrşan, Bucureşti

7517. Fiind date dreptele D şi D_1 prin ecuaţiile lor $y=mx+n$ şi $y=m_1x+n_1$, precum şi punctul $P(x_0, y_0)$, să se găsească ecuaţia dreptei simetrică cu D faţă de P şi ecuaţia dreptei simetrică cu D faţă de D_1.

Corneliu Georgescu. Craiova

7518. Fie şirul:

$$a_n=\left(1+\frac{1\cdot2}{n^3}\right)\left(1+\frac{2\cdot3}{n^3}\right)\cdot\ldots\cdot\left[1+\frac{n(n+1)}{n^3}\right].$$

a) Să se arate că $\frac{4}{3}<a<e$; b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

N. A. Diaconescu, elev Bucureşti

7519. Fie punctele A, B, C şi un cerc variabil care trece prin punctele B şi C şi taie pe AB în B_1 şi pe AC în C_1. Paralele duse prin B_1 şi C_1 respectiv la AC şi AB se întîlnesc în punctul M.

a) Se cere locul geometric al punctului M. b) locul geometric al mijlocului segmentului AM.

C. Ionescu-Ţiu

7520. Se consideră un triunghi dreptunghic ABC ($\sphericalangle A = 90°$). Fie M un punct mobil pe latura AB. Paralela din M la BC taie pe AC în P, iar perpendiculara din M pe BC taie pe BC în N. Să se afle locul geometric al mijlocului segmentului NP.

Nicolae Teodorescu, profesor Bucureşti

7521. Să se demonstreze că unica pereche $(a\,;\,b)$ de numere naturale distincte care satisfac relaţia $a^b = b^a$ este $(4\,;\,2)$.

Ion Chiţescu, student Bucureşti

7522. Fiind dat patrulaterul strîmb $ABCD$ şi $K \in (AB)$; $L \in (BC)$; $M \in (CD)$ şi $N \in (DA)$ astfel ca: $AK \cdot BL \cdot CM \cdot DN = BK \cdot CL \cdot DM \cdot AN$ şi KN paralel cu BD, se cere să se arate că:

a) Punctele K, L M, N sînt în acelaşi plan;

b) A', B', C', D' fiind proiecţiile ortogonale ale vîrfurilor A, B, C, D pe planul $(KLMN)$ să se arate că există relaţia:

$$AB(AK - BC) + BC(BL - CL) + CD(CM - DN) +$$
$$+ DA(DN - AN) = A'B'(A'K - B'K) + B'C'(B'L - C'L) +$$
$$+ C'D'(C'M - D'M) + D'A'(D'N - A'N).$$

Răducu Lăzărescu, elev Bucureşti

7523. O dreaptă fixă taie un cerc în punctele A şi B. Fie C mijlocul unuia din arcele AB. Se duce prin C o secantă variabilă care taie dreapta AB în N şi cercul în P. Să se afle locul geometric al centrului cercului ANP. Discuţie.

Dan Cartianu, elev Bucureşti

7524. Să se calculeze cu ajutorul unei nomograme de forma N, expresia $y = \dfrac{x^2}{a - x}$. (În legătură cu articolul din G.M.-B p. 344/1964).

M. I. Focşeneanu

7525. Care este cel mai mic număr întreg nenegativ care trebuie să fie scăzut din $7^{200} + 11^{200}$ pentru ca diferenţa să se dividă cu 13? (În legătură cu articolul Congruenţe de C. Popovici, *G.M.-B* p. 7).

* * *

7526. Să se arate că un număr natural se divide cu 7 dacă şi numai dacă suprimîndu-i ultima cifră şi scăzînd din numărul rămas dublul cifrei suprimate găsim un număr întreg divizibil cu 7). (În legătură cu articolul Congruenţe de C. Popovici, *G.M.-B*, p. 1966 7).

* * *

7527. Să se arate că dacă $a \in (1,3)$, avem:

$$\sqrt{\frac{a+1}{4} + \sqrt{\frac{a-1}{2}}} + \sqrt{\frac{a+1}{4} - \sqrt{\frac{a-1}{2}}} = \sqrt{2}.$$

C. Ionescu-Ţiu

7528. Să se arate că expresia

$$E = n^4 (n^2 - 1)^3 (n^2 - 2) (2n^2 - 1) (2n^2 - 3) (3n^2 - 2)$$

este divizibilă cu 302 400, unde n este un întreg mai mare ca unu.

C. Ionescu-Țiu

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE PENTRU CLASELE V – VIII *)

E : 2479. O livadă de formă dreptunghiulară este împrejmuită și are dimensiunile de 230 m și 110 m. Ea trebuie plantată cu pomi fructiferi care să fie așezați în rînduri paralele cu laturile grădinii. Cîți pomi pot fi sădiți dacă distanța dintre ei este de 6 m, iar în interior și pe marginea ei se lasă pentru circulație un drum, de jur împrejur lat de 4 m?

I. Teodorescu, Galați

E : 2480. La un magazin de stat s-au adus într-o zi mărfuri în valoare de 81 280 lei ; 40 costume bărbătești, 150 uniforme școlare și 120 cămăși. Știind că o uniformă școlară valorează 1/2 din prețul unui costum bărbătesc și de 5 ori mai mult decît o cămașă, să se afle cîte costume s-au adus, cîte uniforme și cîte cămăși.

Nelu Dobre, Merei-Buzău

E : 2481. Cu 1/5 din salariul său, un lucrător cumpără 5 m pînză finet și 6 m pînză șifon, și îi mai rămîn 7 lei. Dacă ar fi cumpărat cîte un metru mai mult din fiecare fel de pînză, ar fi rămas dator 37 lei. Metrul de șifon este de trei ori mai scump decît metrul de finet. Cît costă metrul de pînză din fiecare fel și ce salariu are lucrătorul.

Corneliu Georgescu, Craiova

E : 2482. Două brigăzi de muncitori de pe un șantier de construcții trebuiau să facă o lucrare în 6 zile. Dar numai o brigadă s-a apucat de lucru și a lucrat 5 zile, după care a venit și brigada a doua și lucrînd împreună au terminat lucrarea în 4 zile. Să se afle în cîte zile ar fi putut să execute lucrarea fiecare brigadă lucrînd singură.

D. Mîrzan, Bujoreni

E : 2483. O cooperativă agricolă de producție împarte o tarla de 432 ha în trei părți. Cîte hectare are fiecare parte dacă prima parte este de trei ori mai mare decît celelalte două împreună, iar partea a treia este cu 40 ha mai mare decît a doua.

La admiterea în clasa a IX-a, Brașov 1965

---

*) V (E: 2479–2481); VI (E: 2482–2486); VII (E: 2487–2491); VIII (E: 2492 – 2494). Soluțiile se primesc pînă la 31 iulie 1966.

E : 2484. Să se efectueze :

$$0{,}5\left\{\frac{0{,}8725}{0{,}1745}\cdot\left[\sqrt{0{,}25}\cdot(\sqrt{3249}-3)-3\right]-3\right\}+4-4\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)-\frac{3\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}}.$$

La admiterea în clasa a IX-a, Brașov 1965

E : 2485. O cooperativă agricolă de producție are 4200 păsări. Numărul găinilor, cu dublul numărului rațelor întrece cu 280 numărul rațelor cu triplul numărului gîștelor. Cîte păsări de fiecare fel are cooperativa, dacă numărul găinilor este jumătate din numărul rațelor și numărul gîștelor.

Ionel Atanasiu, profesor Odobești

E : 2486. Să se găsească mulțimea poligoanelor convexe care au un număr de diagonale mai mic ca 100.

I. Teodorescu, Galați

E : 2487. O cooperativă agricolă de producție a obținut de pe cele 40 ha de vie o producție medie de 6091,60 litri de vin la hectar. Pentru păstrarea vinului se achiziționează vase în formă de trunchi de con circular drept cu diametrii bazelor de 64 cm și 240 cm, generatoarea reprezentînd $56\frac{9}{11}$ % din suma celor două raze. Cîte vase sînt necesare pentru păstrarea întregii cantități de vin obținute.

La admiterea în clasa a IX-a, Iași 1965

E : 2488. O cooperativă agricolă de producție a semănat cu grîu 2/5 din tot pămîntul său. O altă cooperativă agricolă de producție care are cu 800 ha mai mult pămînt decît prima a semănat cu grîu 2/7 din pămîntul său. Știind că a doua cooperativă de producție a semănat grîu cu 120 ha mai mult decît prima, să se afle cîte hectare de grîu a semănat fiecare cooperativă agricolă de producție.

La admiterea în clasa a IX-a, Suceava 1965

E : 2489. Să se efectueze :

$$\frac{\frac{4}{5}-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}:1{,}5}{\left(\frac{1}{5}\right)^3:\left(\frac{1}{25}\right)^2}+\frac{58}{75}+\sqrt{940900}-\frac{\frac{3}{5}:\frac{15}{7}+1}{\frac{8}{15}:(20)^2}.$$

La admiterea în clasa a IX-a, Suceava 1965

E : 2490. În două depozite s-au adus 4365 kg grîu. Știind că 3/5 din grîul adus la un depozit împreună cu 11/15 din grîul adus la al doilea depozit fac 2821 și 2/5 kg, să se afle cît grîu s-a adus la fiecare depozit.

La admiterea în clasa a IX-a, Suceava 1965

E : 2491. Doi muncitori au produs într-o săptămînă 360 piese. În cinstea celui de-al IX-a congres al P.C.R. s-au angajat ca în săptămîna următoare, primul muncitor să depășească norma cu 25% în patru zile și cu 50% în următoarele două zile ; iar al doilea muncitor, cu 1/6 față de cît a produs zilnic în prima săptămînă. Cei doi muncitori au produs fiecare același număr de piese. Cît a produs zilnic în prima săptămînă fiecare muncitor?

La admiterea în clasa a IX-a, București 1965

E : 2492. În cele două ateliere ale unei fabrici de textile s-au țesut într-o lună, 8000 metri pînză, realizîndu-se norma prevăzută. Organizînd mai bine munca muncitorii din primul atelier au depășit norma cu 15% iar cei din al doilea atelier cu 20%. În decurs de trei luni, al doilea atelier l-a întrecut pe primul realizînd 3420 metri de pînză mai mult. Care era norma pentru fiecare atelier.

La admiterea în clasa IX-a serală, București 1965

E : 2493. Să se demonstreze că expresia :

$$E = (a + 2b - 3c) \cdot (b + 2a - 3c) + (a + 2c) - (c + \\ + 2a - 3b) + (b + 2c - 3a) \cdot (c + 2b - 3a)$$

este întotdeauna pozitivă și divizibilă cu 13, dacă a, b, c sînt numere întregi.

Dan I. Stănescu, elev Ploiești

E : 2494. Dacă $(a+b)(a-b)+1=0$, atunci $(a+b)^2-2a(a+b) = 1$.

C. Ionescu-Țiu

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME *

Soluții bune primite pînă la 15 ianuarie 1966 (urmare).

LECHINȚA (CLUJ). *Ș. g.* cl. VIII. Corutiu Viorica (2367, 9, 76, 81—4, 95, 402).

LUGOJ. *Ș. g.* 4 cl. VIII. Guțu Ioan (2370, 1, 5—7, 83, 5, 92), L. 1 cl. IX. Bloch Ivan (2367, 80, 92, 711, 20, 7, 9, 30, 1, 6, 80, 8, 94), Streian Virgil (2378—80, 7119—22, 4, 30,1, 6, 85, 8), cl. X. Murariu Dorin (7081, 119, 29, 31, 6, 85, 8, 90, 4, 5, 32, 3, 5), Neu Tiberiu (7119, 27, 9—31, 5—7, 9, 60, 88, 90, 2, 4, 5, 210), Orbulov Petru (7119, 20, 9, 30—6, 58, 65, 85, 90, 4, 5, 215, 32, 33—6), cl. XI. Brînzar Nicolae (7119—2, 4, 7, 9, 30—3, 5, 6, 44, 51).

MĂGIN. *L.* cl. XI. Simion Andrei (7119—26, 7—33, 5—7, 40—2, 5, 51, 3, 5, 60).

MEDGIDIA. *L.* cl. IX. Bărbat Dumitru (2354, 6—62, 4—48), cl. X. Borisov Liuba (7120, 35, 6, 85, 8, 204, 17, 20—4), Brădișteanu Smarand (7120—3, 40, 85, 8, 94, 216—9, 23—6).

MEDIAȘ. *L. 2* cl. XI. Dudici Mircea (7119—24, 30, 1, 8, 40, 5, 85, 8), Georgescu Clement (7119, 21, 2, 4, 5, 30, 6, 51, 68, 88, 96, 212—4, 6—9, 21—4), Ponican Viorel (7122, 4, 31, 85, 8, 94, 216, 7, 9, 22—4).

MIZIL. *Ș. g. 1* cl. VII. Popescu Nicolae 2369, 73, 6, 81—4, 95, 404), cl. VIII. Vlădăreanu Doina (2367—85).

LUCACEȘTI (BACĂU). *Ș. g.* cl. VII. Andrei Ludmila (2381—85, 90, 5—402, 4).

MOLDOVA NOUA (BANAT). *L.* cl. XI. Ianovici Elena (7119, 31, 44, 78, 84, 5, 8, 96, 9, 202, 34, 6, 40).

* *Evidențiații ca rezolvitori de probleme sînt scriși cu litere cursive.*

MORENI (PLOIEŞTI) *L.* cl. VII. (2367—74, 6, 8, 80).

MIZĂCENI DEAL (ARGEŞ). L. cl. XI. x,y.z. (7119, 30, 1, 4, 30, 1, 5, 6, 7, 42, 5, 63).

NADLAC (BANAT), *L.* cl. VIII. Tiriac Ştefan (2370, 6, 81, 3, 95, 7, 401, 4).

NEGRU VODĂ. *L.* cl. X. Dobre Nelu (7119, 24, 30—2, 4, 85, 8, 216, 20, 2—4).

NICOREŞTI (GALAŢI). *Ş. g.* cl. VI. Durlancea George (2367—71, 6, 83, 95, 9, 400, 2), cl. VII. Oprea Dorin (2369, 71, 2, 4, 5, 9, 81—4, 7).

NOVACI (OLTENIA), *L.* cl. V. Andreoiu Elena (2367—70, 6, 81—3), Ciocoiu Viorica (2367—70, 81, 4), Ciorogadu Elena (2367, 8, 70, 1, 6, 81—3), Ciorogadu Ionică (2367, 8, 70, 6, 7, 81—4), Ciucă Ion (2367—70, 81—4), Carol Filimon (2367—71, 6, 81, 2, 4, 9), Dafinescu Elena (2357—70, 6, 81—3), Jega Ilarion (2367—70, 81—4), Popescu Sabin (2367—70, 81—4), Simionescu Olga (2367, 9, 70, 6, 7, 81—3), cl. VI. Bădescu Elena (2367—74, 6, 7), Cuteanu Maria (2367—74, 7), Tomescu Elena (2367—74, 6, 7), Giurcă Maria (2367—74, 6, 7), Paraschivescu Elena (2367—74, 6, 7), Popescu George (2367—74, 6, 7), cl. VII. Corogel Dochia (2367, 8, 70—3, 5—7), Ciocan Maria (2367—73, 5—7), Coconeţu Valerica (2367—71, 5—7), Cosar Gh. (2367—73, 5—7), Cosar Ofelia (2367—72, 5—7), Diaconescu Elena (2367—73, 5—7), Giugiulan Gh. (2367—72, 6—8), Stela Olga (2367—73, 5—7), Truscă Mihai (2367—72, 5—7), cl. VIII, Berbecel Dumitru (2376—9, 70—7, 9, 80), Cioroganu Nicuşor (2367, 70—8, 80), Comănescu Valentin (2367, 9, 70, 1, 3, 5—80), Cuţuliga Irina (2370—3, 5, 6, 80, 1), Porumbel Ion (2367, 9, 70—2, 4—7, 9, 80), Toader Ion (2367, 9, 70—7, 9).

OBREJA (BANAT). *Ş. g.* cl. VI. Lădaru Cătălin (2354, 60, 3, 5, 70, 5—7, 81, 25), Lăzăreni Cătălina (2356, 63, 6, 70, 4—6, 8, 83, 4, 7—9), Lăzăreni Maria (2354, 6—9, 64, 9—72, 5—7), Meilă Ana (2354, 6—9, 5—7, 81—3), Oprean Ana (2354, 6—9, 70—2, 5—7, 82, 3, 5), Răduţ Floarea (69—72, 7, 81, 3, 5).

ORADEA. *L.* cl. VII. Mehesz Ana (2354, 9, 65, 70, 3, 5, 6, 9), cl. X. Brădău Florin (7051, 83, 120, 2, 34, 6, 40, 51, 85, 8, 216, 24), cl. XI. But Tiberiu (7051, 63, 9, 73. 7, 8, 81, 91, 119, 20, 21, 2, 4, 30, 1, 4, 34—6), cl. XI. Bologa Florin (7051, 2, 9—64, 6, 9, 70, 3, 80, 1, 3, 4, 8, 9, 91, 4, 110), Lazăr Virgil (7003, 73, 5, 6, 8, 80, 2, 91, 105, 10, 20, 2, 6, 31, 44), Lucuş Teodor (7119—25, 36, 9, 44, 7, 88, 93), Meer Petru (7051, 4, 62, 4, 6, 9, 70, 3, 8, 80, 1, 4, 96, 105, 10, 5).

ORAŞ DR. PETRU GROZA. *L.* XI. Lazăr Nicolae (7066, 73, 8—81, 120, 3, 4, 31, 5, 6, 40, 3), Vlăduţ Dorina (7119—22, 4, 30, 1, 5, 40, 3, 4, 85, 8, 22, 45).

ORAVIŢA. L. cl. XI. Florescu Florian (7049, 50, 60, 46, 70, 2, 3, 6—81, 4, 96—8).

ORLEŞTI (ARGEŞ). *Ş. g.* cl. VII. Preoteasa Valentin (2368—71, 4—7, 9, 81—5, 7, 94—6, cl. VIII. Pistol Gheorghe (2368—71, 4—7, 9—85, 94—6, 8—405).

ORŞOVA. *L.* cl. VIII. Cicepuligă Poliana (2356, 7, 9, 62, 70, 5, 6, 9), Laub Eleonora (2374, 83, 4, 8—90, 2, 3), Piscureanu Valentin (2370, 6, 7, 82, 5, 9, 95, 400, 2, 4).

PANCIU (GALAŢI). *Ş. g.* cl. VII. Cuedi Iulian (2369, 71, 4, 6, 81, 3, 9, 95, 9, 401).

PECIU NOU. Cl. XI. Stoianovici Radislav (7120—2, 4, 7, 9—31, 5, 8, 85, 8, 216, 7, 22—5, 7, 35, 47).

PĂTIRLAGELE (PLOIEŞTI). *L.* cl. VII. Iamandei Natalia (2375—7, 83, 5, 8—90), cl. X. Toma Veronel (7119—25, 30—2, 4—6, 8, 40, 63), cl. XI. Burjoveanu Constantin (7119—22, 4, 30, 1, 5, 8, 40, 6), Hirsescu Vasile (7119—22, 4, 9—32, 5, 40, 4, 51), Poşoiu Constantin (7119, 20, 2, 4, 7, 9—32, 5, 6, 8, 40, 3—6, 63), Toma Florin (7119—25, 9—33, 5, 6, 8, 40, 51, 9, 63).

PĂUNEŞTI. *Ş. g.* cl. VI. Sugheş Zarafina (2356, 8, 64, 7, 9, 70, 81, 7107), Bîrlă Magdalena (2363, 4, 71, 80, 95, 6, 8, 401), Novac Virginia (2367, 8, 67, 6, 7, 710, 7107, 27), Roşu Elena (2358, 64, 6, 70, 6 81, 7107), cl. VII. Neagu Viorica (2367, 8, 71, 4—6, 9, 80 7146), Nica Lucica (2357, 8, 63, 9, 75—7, 9, 81, 7117), Novac Gh. Maria (2367, 67, 73, 9, 7063, 91, 217), Sandu Mariana (2395—7, 9—402, 9), cl. VIII. Berbece V. Maria (2357, 8, 61, 3, 4, 5, 7, 717), Gheorghiu Gabriela (2357, 8, 64, 5, 9—72, 6), Ignat Victoria (2354, 63, 9, 70, 5—7, 95, 404), Novac N. Maria (2354, 7—9, 63, 4, 9, 71—9), Rizuc Rodica (2361, 3, 4, 7, 80, 3, 95, 9, 400—2), Ungureanu Mihaela (2357, 8, 65, 9, 70, 2, 5, 7).

PETRILA (HUNEDOARA). *Ş. g. 1* cl. VIII. Cenar Ion (2367—71, 4, 6, 7, 80).

PETROŞENI. *Ş. g. 1* cl. V. Siclovan Codruţa (2394—405), cl. VII. Sternbey Margit (2381—5, 9, 80—3), *L.* cl. X. Paicu Nicolae (7119, 21—5, 7, 30—4, 6, 44, 51, 85, 88, 90, 2—4, 7, 210, 16, 7, 9—22, 4—7), Părăianu Sorin (7119, 20, 2, 7, 30, 1, 4—5, 44, 63, 9, 85, 8, 90, 2), Popa Nicolae (7066, 73, 81, 119—22, 4, 5, 7—32, 5, 6, 8, 53, 92—4, 216, 7, 9, 20, 2—7, 35, 6, 9, 47), Stan Mihai (7119, 20, 2, 7, 30, 1, 2, 4—6, 8, 42, 5, 50, 63).

PEŞTEANA JIU (OLTENIA). L. cl. X. Truşcă Matei (7120, 2, 4, 9, 31, 5, 6, 3, 85, 8, 216, 3, 4, 33).

PÎNCOTA (BANAT). *Ş. g.* cl. VIII. Lomoş Constantin (2372, 4, 5, 7, 8, 81—4).

PITEŞTI. *Ş. g. 3* cl. VIII. Haret Viorel (2367, 73, 6, 82, 4, 400, 1), *Ş. g. 4* cl. VI. Ruse Rulian (2376, 7, 81—5, 95), cl. VIII. Ruse Lilion (2368, 85, 88—90, 5—402), *Ş. g. 17.*

cl. VI. Ceapă Adrian (2367—70, 4, 6, 7, 9—85, 8—90, 5, 7), Portugudis Castor (2367, 9, 70, 4, 6, 71, 9—85, 8—90, 5, 7, 9—401), cl. VII. Popa Laurențiu (2367, 9—71, 6, 7, 81, 83, 5, 9). *L. 1* cl. X. *Dumitrache Ion* (7049, 53, 9—70, 3, 7—80, 3, 9, 91, 7, 9, 10, 5, 7, 9, 22, 9—32, 4—6), Lazăr Mircea (7069, 90, 6, 7, 80, 11, 120, 2, 4, 20, 1, 85, 8, 210), Pavelescu Ion (7049, 51, 61, 8, 9, 76, 8, 80, 30, 1, 4, 5), Cl. XI. Costin Francisc (7119—22, 4, 30, 1, 4, 5, 6, 63, 88, 94, Ioana Mariana (7119—25, 30, 1, 4—6, 43, 51, 63), *Lungulescu B. Eugen* (7125, 32, 9, 40, 4, 6, 8, 50, 2, 7, 9, 60, 3—4, 7—71, 3, 4, 8, —81, 3, 5, 6, 8—99, 202, 3, 10, 2—4, 9, 31—4, 0, 2—7, 9, 50, 2, P). Mașola Ion (7120—2, 4, 30, 1, 4, 5, 6, 8, 43, 4, 5, 63). Pietreanu Cristian (7120, 4, 7, 30, 2, 4—6, 63, 94, 6, 9, 216, 24), Sterian Marian (7119, 24, 7, 30, 41, 6, 43, 4, 6, 51, 5, 85, 95), Ștefănescu Lucia (7124, 31, 4, 6, 7, 45, 63, 94, , 8, 200, 2, 16, 7, 24), Topologeanu Marian (7119, 20, 4, 31, 4, 6, 40, 5, 63, 85, 94, 216), Vasilescu Gheorghe (7119—22, 4, 30, 1, 6, 51, 63, 90, 5), Ionescu Radu (2367—72, 4—80), *L. 2* cl. XI. Branițte Dumitru (7119—25, 30, 1, 3, 4, 6, 43, 4, 58, 78, 81, 5, 8, 99), *Preda Vasile* (7119—25, 7, 30—4, 6, 7, 42—6, 8, 52, 81, 92—4, 8, 9, 210, 16, 7, 9, 20, 2—7, 35), *L. 3* cl. X. Armoncea Gabriel (7119—22, 22, 4, 30, 1, 3—6, 8), cl. XI. Nistorescu Constantin (7127, 36—8, 40, 3, 4, 8, 60, 3, 89, 75, 8, 9, 84—6, 1—94, 68, 210, 6, 7, 9, 20—7).

PLOIEȘTI. *Ș. g. 1.* cl. VI. Sprinceanu Mihai (2368—70, 7, 81, 2, 5, 95, 400), *Ș. g. 4* cl. VII. Dumitrescu Florica (2370, 6, 7, 81, 5, 9, 95, 6, 9), Dumitru Mariana (2369, 74, 6, 83, 4, 9, 95), Ion Georgeta (2379, 70, 4, 6, 81—5, 9), cl. VIII. Săndulescu Cristescu (2380, 81, 3—5, 95—8, 400), Dumitrache Ion (2367—74, 6—80), *Ș. g. 12.* cl. VI. Dumitrescu Virgil (2368—74, 6, 7), cl. VII. Tiprigon Carmen (2370, 1, 4, 7—82). *Ș. g. 21.* cl. VII. Moisescu Dorina (2378, 9, 81—3, 5, 95, 400, 1), Ziclinski Roxana (2375, 6, 9, 81—4, 8, 96, 404), Ene Georgeta (2370, 6, 7, 81—3, 93, 5), Manole C. (2370, 5, 7, 81, 3, 5, 95, 6), Popa Norica (2373, 7, 82, 4, 5, 9, 95, 401), Stoicescu Marian (2373, 7, 81, 3, 5, 94, 5, 7, 9, 401), Turțudău Florian (2370, 3, 80—5, 9, 90, 2), *Ș. g. 23* cl. VIII. Avramescu Mircea (2381—5, 8, 93—5, 7, 9—405), Badea Janeta (2367—71, 4, 5, 81, 82), Bunbaum Constantin (2369—71, 6, 80, 95, 401), Dobre Dora (2367—80,), Răduță Viorel (2395, 7—401, 2, 4), Șerpoianu Iulia (2369, 74—6, 9, 81—4), Tudor Ana (2394—402), *L. 1* cl. VI. Mitroi Carmen (2369, 74, 6, 7, 81, 25, 95, 9), Olteanu Horia (2381—5, 95, 6, 8, 402), cl. VII. Ilie Beatrice (2368, 71, 3, 81, 95, 6—9, 401, 2), Munteanu Dinu (2371, 3—6, 85, 9, 93), Necula Luiza (2394—6, 9, 300, 2—4, 6, 9), Solomon Ernest (2381—5, 95—8, 9, 401, 2, 4), cl. VII. Marcovici Barmen (2375, 7, 8, 5, 90, 2, 3, 6—403, 5, 6, 8), Olteanu Gheorghe (2367—701, 2—4, 9, 80), cl. IX. Olteanu Sorin (2350, 995, 6, 7002, 24, 81, 119, 30, 1, 6, 85, 8, 91, 2), cl. X. Botoșanu Lidia (7119, 20, 2, 4, 7, 31, 3, 5, 6, 40, 85, 2116—8, 21—4), Coman Constantin (7119, 21, 4, 5, 30, 1, 3—5 55, 85, 222), Dinescu Iulian (7059, 60, 3, 6, 8, 73, 7, 8, 80, 1, 91, 107, 24, 5, 30, 1, 3—6, 40, 63, 85, 8, 90), Dragomirescu Cezar (7120, 2, 4, 7, 9—31, 85, 8, 94, 7, 216, 7, 9, 23), Dumitrescu Marian (7119, 20, 2, 30—2, 4—6, 85, 8, 216, 7, 9, 20—4, 6), Grințescu Mihaela (7073, 7, 8, 107, 21, 4, 31, 3, 4, 55, 6, 85), Ionescu Lucian (7014, 20—2, 5, 59, 63, 6, 9, 73, 7, 9, 81, 107, 22, 31), Lungulescu Gheorghe (7119, 22, 4, 30, 1, 5, 6, 50, 85, 8, 204, 24), Negut Gheorghe (6114, 9—37, 9—25, 9—37, 42, 5, 41, 5, 63, 85, 8, 92—4, 7, 204), Olteanu Raluca (7119, 20, 4, 7, 40, 1, 3, 4—6, 40, 81, 5, 8, 224, 35), Prelipceanu Minodora (7121, 2, 4, 7, 40, 85, 8, 216, 7, 23, 4, 6, Spiridon Maria (7185, 8, 9, 90, 4, 216, 9, 20, 3—6). cl. X. Stănescu I. Dan (7048, 9, 53—5, 9—65, 7—70, 4, 6—8, 80—4, 7—9, 91, 3, 4, 6, 105, 8, 10, 4), cl. CI. Brătulescu Nicolae (7119—24, 7, 9—23, 35, 6, 42—5, 48, 51, 215, 7, 22, 3, 5, 42), Ciobanu Constantin (7060, 7, 3, 6—8, 80, 8, 122, 31, 4, 40, 51), Ionescu Ion (7119—22, 4, 7, 30, 1, 4—6, 51, 63), Iordan Niculina (7003, 17, 60, 73, 6, 7, 8, 80, 8, 122, 131, 4, 40, 57), Minca Florea (6922, 31, 8, 46, 50, 4, 5, 6, 60, 5, 8, 9, 74, 3, 5, 80, 6, 119—21, 30, 1, 45), Oprea Cornel (7002, 17, 59, 63, 6, 73, 7, 8, 107, 10, 4, 22, 4, 31 4, 63, 6, 80), Rădulescu Natalia (7119, 21, 2, 4, 30, 1, 4—6, 8, 85, 8), *Reghină Vasile* (7049, 51, 2, 4, 5, 9, 60—4, 5, 7, 9, 70, 2, 3, 6—8, 80, 1, 4, 8, 96, 108, 10, 9, 20, 2—5, 31, 5, 44, 6, 9), *Vasiliu Constantin* (7120, 3—5, 719, 32, 5, 8, 9, 92—5, 8, 50, 1, 7, 60, 3, 5, 73, 4, 8, 81, 5, 8, 90, 4, 6, 204, 10, 2, 6, 7, 24, 5, 31, 3, 43, 67), Absolvent Minulescu Gheorghe (2123, 69, 96, 216, 17, 9, 22—7, 34, 5, 42, 7), L. 2 cl. VI. Kluger Alexandru (2367—76, 8—85, 7—90, 3—405), Petrescu Dragoș (2368—70, 2, 7, 81—5), cl. VII. Boning Letiția (2354, 7, 9, 69, 76, 85, 9), Ioniță Violeta (2373, 4, 6, 7, 81, 3, 401, 2, 4, 6), Lungulescu Livia (2370—5, 7—80), cl. VIII. Beffa Mihai (2367, 9—72, 4—8, 80), Mignea Dănuța (2394—401, 3, 4), Nicolescu Traian (2367—71, 3—7, 83—5, 7, 8, 96—405), Stănescu Vivian (2367, 9—77, 81—5, 94—405), cl. X. Georgescu Cecilia (7120—2, 4, 31, 5, 6, 88, 210, 6, 7, 24, 35), *Orășanu Laurențiu* (7126, 9, 33, 4, , 8, 40, 2, 4, 5, 1, 4, 7, 60, 3, 4, 9, 78, 9, 85, 8, 90, 2—4), 6, 7, 9, 203, 16—26). cl. XI. Georgescu Marin (7055, 9, 61, 970, 3, 6—8, 80, 1, 120, 1, 4), *Stan Emil* (2716, 8—30, 3—5, 7—42, 4—6, 8, 50, 1, 3—5, 7—60, 4, 5, 7—9, 76, 8, 85, 8, 90, 2—4, 6, 7, 9, 201, 3, 101, 1). *L. 3* cl. X. — Constantinescu Nicolae (7119—22, 4, 5, 31, 4, 6, 44, 63), 4, 216, 24), Spiegel Wilhelmina (7119—25, 30—2, 2, 5, 6, 40), *L. 4* cl. VIII.

Grigori Rodica (2369—71, 6—9), cl. X. Albulescu Mircea (7119, 20, 4, 30—2, 4, 6, 40, 65, 85, 8, 90), *L. 6* cl. X. Nicolae Otilia (7120, 1, 30, 1, 4, 6, 85, 16, 7, 9, 22—4), Stoixa Valentin (2367—80), Taraş Viorel (7059—61, 9, 70, 3, 6, 7, 81, 91, 119, 29—31).

POIANA DE JOS (BUCUREŞTI). *Ş. g.* cl. VII. Manea Ioana (2376, 81—5, 95, 9, 404, 5), Marin Aurelia (2376, 7, 81, 3, 4, 7, 95, 9, 404, 5).

POTCOAVA (ARGEŞ). *Ş. g.* cl. VI. Rădoi Costel (2356, 7, 9, 66, 9—71, 6—8, 81—3, 5), cl. IX — Bălănescu Dumitru (6848, 64, 79, 81, 927, 32, 96, 7003, 66, 8, 73, 131), Rădoi Ion (6927, 30, 2, 46, 96, 7003, 66, 8, 70, 3, 131).

PRUNDUL BÎRGĂULUI (CLUJ). *L.* cl. V. Ţonea Simona (2368, 70, 7, 6, 81, 3, 5, 94—6), cl. VI. Galben Adriana (2369—71, 3, 7, 81—5), Hingănuţ Ileana (2369, 70, 3, 7, 81—5), Sinilica Valeruţa (2369—71, 3, 7, 81—5), Ţonea Elena (2369—71, 81—5).

PUCHENII MOŞNENI (PLOIEŞTI). *Ş. g.* cl. V. Petre Vasile (2381, 3, 5, 94—8, 404), cl. VII. Stan Vasile (2369, 73, 7, 82, 4, 5, 9, 95, 8, 400).

PUCIOASA. *Ş. g.* VI. Vasilescu Alina (2375, 83, 5, 90, 2, 3, 6—403), cl. VIII. Vlad Eugenia (2372, 4, 81, 2, 4, 5, 9, 400), cl. X. Cimpoca Gh. (7064, 77, 81, 119, 22, 9, 31, 6, 8, 84, 5, 8, 90, 4, 6, 216, 7, 8, 22—4), Diaconu Gheorghe (7050, 9, 73, 81, 91, 110, 9, 22, 30—2, 5, 85, 8, 90—24), *Vasilică Nicolae* (7049, 55, 66, 74, 91, 3, 119—25, 7, 8, 30—2, 40—5, 50, 1, 5, 7, 64, 9, 78, 9, 85, 8, 97—9, 203—5), Zechera Gheorghe (7060—2, 6, 9, 70, 3—5, 80, 108, 10, 7, 20—2, 4, 31, 5, 85).

RĂDĂUŢI. *L.* cl. VII. Horand Ana (2369, 71, 4—6, 8, 2, 4, 94), cl. X — Călăraşu Doru (7119—21, 4, 5, 7, 30, 1, 3, 5, 6, 40, 85, 8, 902, 4, 5, 216, 24), Guşetu Dorin (7050—3 119, 20, 2, 5, 7, 9—31, 5, 6, 8, 45, 52, 9).

REGHIN. *Ş. h. 1.* cl. VII. Chiciudean Anton (2381, 5, 95, 8—404).

REŞIŢA. *Ş. g. 1.* cl. VIII. Andrei Radu (2367, 70—4, 6—8, 7133), *Ş. g. 2* cl. V — Horvath Andrei (2368—70, 81, 3, 94—6, 405), Horvat Monica (2378, 80, 92, 3, 40, 119, 30, 1). *L.* cl. XI. Joiart Ioan (7119—22, 4, 31, 6, 5, 63, 78, 85, 8, 97).

RM. SĂRAT. *Ş. g. 2* cl. VIII. Iorga Emil (2367, 9, 70, 4, 7, 81—5), *L. 1* cl. VII. Rogozeanu Dragoş (2370, 1, 6, 8, 9, 81—3, 402, 5).

RM. VÎLCEA. *Ş. g. 4* cl. VII. Jivan Nicolae (2367—71, 5—7), Vilău Cornelia (2369, 70, 5—7, 8, 8, 402), *Ş g.* cl. VIII. Sandru Ion (2367—71, 3, 5—7, 9, 80), *L.* cl. VI. Alexandridis Ioana (2369—72, 4, 6, 8, 9), cl. X. Deffa Mihai (7119, 20, 2, 30, 1, 4—6, 40, 63, 85, 210), Ghiţă Mircea (7120—4, 7, 3, 4, 6, 8, 42, 63), Motaş Emil (7119, 22, 31, 4, 35, 6, 10, 55,, 63, 79, 85, 8, 90, 4, 210, 3, 6, 32, 5), cl. XI. Buricescu Buricea (7119—25, 30, 1, 4, 43, 4, 63), Catangiu Virginia (7048, 62, 6, 7, 4, 5, 81, 119—24, 31).

RÎUL ALB (PLOIEŞTI). *Ş. g.* cl. VII. Inbu Gheorghe (2369, 72, 4, 6, 95, 1, 401, 2, 4).

ROMAN. L. cl. XI. Bercovici Nelu (7119, 21, 2—4, 30, 1, 6, 44, 85, 8, 219, 22, 4, 6, 6995, 6, 8—7003, 5, 21, 51), Smit Petru (7069, 70, 3, 6, 7, 80, 9, 95, 120, 2, 4, 31, 4, 216 —8, 20, 4). *Ruginâ Andrei* (7169, 73, 8—83, 5, 8—90, 2—9, 203, 4, 11, 2, 4—7, 9—27, 32—7, 9, 40, 2, 7, 50, 1, 7, 8).

ROMÂNEŞTI (PLOIEŞTI). *Ş. g.* cl. VIII. Herea Ion (2068, 9, 79, 81—4, 7—993), Mirică Gheorghe (2369, 71, 3—6, 9, 81, 2, 4).

ROŞIA MONTANĂ (CLUJ). *Ş. g.* cl. VII. Ionuţ Octavian (2367—70, 3—7, 80, 1, 3, 5, 98).

RUDINA (OLTENIA). *Ş. g.* cl. VIII. Mocanu Elvira (2368, 9, 71—4, 6, 7, 9, 80).

SĂCELE (BRAŞOV). *L.* cl. XI. Cesere Lenke (7119—22, 4, 32, 8, 40, 8, 9, 211, 6—20, 2—4, 6).

SĂCUIENI (CRIŞANA). *Ş. g.* cl. VIII. Inau Ştefan (2356—8, 81—3, 5, 92).

SĂLIŞTE (BRAŞOV). *L.* cl. XI. Hanaiu Marilena (7120, 2, 4, 5, 216, 7, 9, 22—4, 6, 47

SATU MARE *Ş. g. 10* cl. VII. Görlu Mihai (2367—77, 9), cl. VIII. Rozenbek Ivan (2371, 3, 4, 9—82, 4, 5, 7, 90), cl. X. Sichet Margareta (7070, 3, 6, 8, 119, 22, 31, 2, 4, 6, 63, 85), *L.* cl. XI Dan Ioan (7069, 73, 7, 81, 91, 119, 20, 4, 30, 1, 6, 55, 94, 7), Nicoară Aurel (7119—22, 4, 9—32, 4, 6, 42, 85, 88, 223, 4), Sandor Vasile (7119—22, 4, 5, 7, 31, 4, 6, 43, 51), Taloş Gheorghe (7119—22, 4, 8, 32, 4, 6, 42, 4).

SĂVENI (SUCEAVA). *L.* cl. XI. Buruiană Emil (7120, 1, 4, 30, 2, 40, 6, 85, 9—90, 20, 202, 13), Clocotici Valentin (7121, 4, 31, 2, 5, 6, 4, 6, 69, 85, 90, 202, 13, 24, 5).

SELIŞ (HUNEDOARA). *Ş. g. 2* cl. V. Trippa Ionel (2367, 8, 70, 1, 6, 7, 82, 1). *L.* cl. X. Bortiş Terentie (7119, 30, 1, 2, 4, 5, 85, 8, 93—6, 216, 20, 2—4), Julca Ştefan (7119, 30—2, 4, 5, 85, 8, 94, 5, 216, 23, 4), Pantazi Nicolae (7119, 30—2, 5, 6, 40, 85, 8, 93—5), Tuduce Florian (7119, 30—2, 8, 93—6, 9, 20, 2—4).

SIBIU. *Ş. g.* cl. V. Serbănuţ Ligia (2374, 6, 7, 81, 3, 95, 7, 404), Ş. g.8 cl. VII. Răceală Moţoc Mircea (2378, 5, 6, 81, 3, 9, 90, 5), Ş. g. cl. V. Vlad Elena (2367—76), *L. 1* cl. X. Babeş Carmen (7069, 70, 119—24, 31, 2, 6, 8), Holmoghi Mircea (6988, 97, 7002—4, 59—61, 4, 6, 70, 3, 91), *L. 2* cl. IX. Trif Felicia (2365, 6, 7006, 9, 73, 6—8, 80, 119, 30, 1), cl. XI.

Trif Nicolae (7048, 50—2, 4, 5, 9—62, 4, 9, 8—70, 2, 3, 6—81, 3, 4, 98, 108—10, 2, 3, 5, 7, 9—24, 6, 30, 4—7, 40, 2, 6). *L. 3* cl. X. Olaru Ieronim (7119, 30—2, 4—6, 85, 8, 216, 9, 24), *L. 4.* cl. X. Moraru Cristian (2367, 9—71, 3—6, 8), *L.* cl. XI. Barth Kacely (7120—2, 4, 7, 36, 43, 51, 2, 188, 90, 2, 4), Dunca Bogdan (7119, 20, 7, 31, 6, 43, 6, 51, 2, 88, 90, 2).

SIMERIA (HUNEDOARA). *L. 1* cl. VIII. Ghilea Mihai (2369, 70, 1, 3—7, 9, 80). cl. IX. Igna Ion (6862, 4, 5, 7, 9, 81, 927, 31, 2, 4, 8, 46, 88, 7003).

SINAIA. *L. 1* cl. XI. Sava Costică (7119—25, 30, 1, 4—6, 43, 5, 52, 69, 85, 8, 93, 4, 6, 203, 4).

SÎNNICOLAUL MARE (BANAT). *L.* cl. VIII. Sîrbescu Eugenia (2369, 77, 82, 3, 5, 402, 4, 6).

SLATINA. *L.* cl. X. Stăncanu Stefan (7048—42, 9—64, 6—70, 5—82, 117, 9, 20, 6, 9—31, 5, 9, 51, 5, 88, 9), cl. XI. Buicescu Radu (7119—24, 44, 216, 7, 22, 3, 5, 6).

STOINEȘTI (BUCUREȘTI). *Ș. g.* cl. VI. Andreescu Mihai (2381—4, 94—401, 4), Mihăilă Ioana (2381—4, 7, 8, 95, 401, 4), cl. VIII. Năchilă Petre (2381—4, 7—9, 92, 401, 3).

SUCEAVA. *L. 1* cl. VII. Iaknovici Liliana (2394—400, 5), cl. X. Olaru Radu (7119, 22 4, 30, 1, 4, 6, 40, 51, 85, 8, 9, 93, 219, 20, 2—4), Taborcea Petru (7052—4, 6, 9, 61, 37—9, 72, 3, 5, 81, 93), 117, 22, 31, 51, 5, 6, 40, 6, 55).

SIVIȚA (GALAȚI). Oprea Vasile (7123, 7, 34, 6, 85, 8, 90, 217, 19, 20, 2—4, 40).

ȘTEFĂNEȘTI (ARGEȘ). *Ș. g.* cl. V. — Cojocaru Laurențiu (2369, 70, 9, 6, 81—3, 5, 7, 9, 400, 4), Pătriche Cornel (2367—70, 6, 7, 81—3, 5), cl. VI. Popescu Marcel (2358, 67, 70, 7, 81, 3, 9, 95, 7), cl. VII. Cojocaru Constantin (2369, 74, 7, 81—3, 95—8, 400), Patriche David (2367—73, 6, 7, 9—81, 3, 5, 9, 70, 7), *Popescu Costică* (2317—85, 7—90, 3—4(5), Țuțuianu Rodica (2369, 70, 6, 81—4, 95, 400), cl. VIII. Buricel Victoria (2367—71, 3, 4,6, 7, 80), Gheorghe Pucol (2367—93, 130—2, 51), Simionică Valerian (2369, 71, 2, 4—6, 81, 2, 4, 7, 95).

TECUCI. *L.* cl. VI. Seuleanu Mircea (2368, 70, 1, 4, 6, 81, 3, 95, 400, 1), cl. VII. Gorjan Lucian (2369, 9, 70, 4—7, 81, 5), cl. VIII. Tașcă Eugenia (2370, 4, 6, 7, 81, 2, 5, 95, 9), cl. XI. Lăzăreanu Zaharia (7119—22, 4, 5, 31, 5, 6, 8, 43, 5).

TIMIȘOARA. *Ș. g. 10* cl. VIII. Mureșan Ioan (2367—70, 2—5, 6, 7, 9), *L. 1.* cl. VI. Boțan Mariana (2369, 70, 4, 73, 81, 2, 97, 404), Boțan Rodica (2369, 70—3, 81, 2, 95, 7, 404), Chiriac Rodica (2369, 71, 6, 81, 2, 4, 9, 93), Ciugudeanu Georgeta (2369, 71, 81, 2, 7, 9, 93, 5, 7, 400, 4), Dîrjan Tudor (2381—4, 94, 5, 8, 9, 400, 4), Dolga Marcela (2369, 70, 3, 4, 80—2, 5, 9, 90, 3), Gilea Gheorghe (2369, 71, 6, 81, 1, 2, 4, 9, 93), Groza Vasile (2369, 71, 4, 6, 8, 1, 3, 4, 9, 95), Ispas Emil (2369, 77, 81, 3, 5, 9, 401, 4), Măruț Marim (2369, 71, 4, 6, 81—4, 93, 5), Moldoveanu Liana E2369, 71, 6, 81, 2, 4, 9, 93), Munteanu Miorița (2369, 71, 6, 81, 4, 9, 93, 5), Oneț Marin (2369, 71, 81, 2, 7, 9, 95, 7, 8, 404), Pîrșan Bogdan (2371, 93, 8, 5, 4001—2, 4), Radu Ion (2371, 4, 6, 81—3, 93, 5, 404), Titeșlea Constantin (2369, 75, 7, 81, 2, 4, 5, 9, 93, 5, 9), Toma Cornelia (2369, 71, 81, 2, 7, 9, 95, 7, 400, 4), Țintaru Georgeta (2370, 1, 6, 81, 95, 400, 2). Vînătoru Viorel (2371, 5, 81, 2, 4, 7, 9, 93), cl. XI. Rogojan Dorina 7119, 4, 5, 9, 30, 1, 3, 5, 6, 40, 3, 5, 63), Teleagă Petru (7119—25, 30—2, 42, 3), *L. 2* cl. VI. Bordea Doina (2367, 8, 80, 3, 6, 81, 2, 4), cl. VIII. Ciupală Ruxandra (2369, 73, 7—80, 2—5), Dordea Toma (2371, 2, 4, 8—80, 2, 3), Lamer Horst (2369, 70, 4, 6, 80, 1, 3, 95), Mirea Mihaela (2369, 70, 4—8, 83, 5, 5). Rădulescu Livia (2381—3, 5, 95, 6, 8, 9, 404), Răduș Adrian (2369—71, 6, 82—4, 95, 404), Varga Gabriela (2370, 5, 6, 9, 81, 3, 95, 8, 404), Winandi Mihai (2370, 6, 7, 81—5), *L. 3* cl. XI. Popa Andreia (7119, 20, 2, 4, 5, 1, 51, 9, 85, 8, 96), *L. 5.* cl. VII. Dumitru Lavinia (2369, 70, 2, 81—4, 7), Laszlo Veronica (2369, 70, 2, 81—4, 7).

TITU (BUCUREȘTI). *L.* cl. XI. Bărbulescu Puiu (7048, 52, 66, 81, 105, 19—21, 9—31, 6, 8, 43, 45, 51, 63).

TÎRGOVIȘTE. cl. VI. Mihai Eugen (2369, 76, 81—3, 7, 95, 8—400, 4), lc. XI. Bănică Aurel (7119, 27, 8, 32, 44—6, 51, 2, 9, 63, 95, 8, 94, 222—5), Mihălcescu Maria (7121, 34, 6, 63, 203, 11, 6—9, 22, 3—5, 7, 47). Stanciu Virgil (7119, 21, 2, 4, 5, 7, 391, 4—6, 8, 42, 5, 6, 50, 3), Ștefănescu Călin (7119—22, 4, 5, 31, 3, 4—6, 51).

TG. JIU. *L. 1* cl. IX. Mărgărit Gabriel (7119, 20, 31, 6, 40, 4, 14, 50, 63, 85, 8, 35), cl. X. Ciocîrlie Valeria (7119, 30, 1, 4—6, 40, 5, 85, 216, 9, 20, 3—5). Diaconu Ilie (7051, 2, 65, 6, 8, 70, 3, 6, 119, 20, 31, 4, 6, 40, 143, 4—6, 63), Drugu Florea (7119—21, 4, 7, 31, 2, 5, 6, 8, 40, 81, 5, 8, 92, 216, 24, 6). Dumitrescu Dan (7122, 5, 7, 30, 1, 5, 6, 63, 85, 9, 210, 6, 7, 21, 2—4), Mălăiuș Ilie (7060, 1, 9, 78, 95, 119, 30, 1, 4—7, 55, 85, 8, 221,—4, 35). Bratu Traian (7143, 68, 9, 84, 5, 8, 90, 2, 4, 5, 7, 9, 200, 4, 5, 11, 3, 22—7), *Daniel Pestroiu* (7120—4, 7, 30, 1, 5, 6, 40, 3, 5, 6, 78, 81, 85, 88, 90, 2—4, 304, 13, 6, 7, 24, 33—8, 47, 61), Golumbovici Dan (7121, 2, 31, 5, 6, 43, 85, 9, 216, 7, 9—24, 34), Petrescu Constantin (7120—22, 4, 36, 8, 42, 3, 6, 210, 11).

TG. MUREȘ. *L.* cl. VII. Dragotă Adrian (2367, 70, 7, 8, 89, 94—6), Poliac Marius (2369, 70, 6, 7, 81—3, 7), Sonenfeld Gabriel (2372, 6. 9, 80, 2, 3, 9, 90), cl. X. Helăzău Nicolae (7127, 30, 1, 5, 6, 63, 85, 8, 9, 92, 3, 8, 9, 210), Ponat Gheorghe (7119, 30, 1, 5, 6, 8, 63, 78, 84, 5, 8, 9, 90, 2—4, 90), cl. XII. Posat Mihaela (7119—22, 4, 30, 1, 5, 6, 8, 63, 84, 5, 8, 90, 2—4, 7, 9, 210, 5).

TG. NEAMȚ. *L.* cl. VIII. Sotaș Marcela (2369—76, 8, 9).

TÎRNĂVENI. S. g. cl. VIII. Gruia Doina (2370, 1, 80—3, 8, 404).

TITEȘTI (ARGEȘ). *Ș. g.* cl. VIII. Dobrin Mielu (2385, 9, 3, 403, 4, 6, 9), Feteanu Mihai (2385, 8, 9, 93, 400—4, 6).

TORNAC. *Ș. g.* cl. VII. Duică Alexandru (2367. 74, 81—3, 93, 7, 403), cl. VIII. Nagy Iuliana (2367, 72, 9, 81, 2, 4, 92, 5), Seș Radu (2353, 4, 6, 9, 70, 5, 6, 9).

TRUȘEȘTI (SUCEAVA) — *L.* cl. X. Andriescu Mihai (7049, 51, 2, 9—61, 3, 4, 6, 9, 70, 3, 21, 110, 63, 20, 85, 8, 94). Corduneanu Dumitru (7048, 60—4, 106, 7, 9, 117, 9, 20, 2—5, 30—6, 8, 53, 5, 63, 85, 8, 90, 4—6). Livadanu Emil (7049—51, 9, 66, 9, 70, 3, 7—80, 109), Roțu Mircea (7051, 2, 9—61, 3, 4, 6, 9, 70, 3, 6, 7, 8, 80, 9, 110, 36, 63, 85, 8), cl. XI. Aionesei Ioan (7079, 93, 112, 33, 6, 8—40, 4, 5, 8, 51, 3—5, 7, 9, 66—9, 78, 81, 4, 5, 8—90, 2—7, 9, 203, 4, 10—4, 35, 7, 46, 7), Șchiopu Constantin (7048, 51, 9, 60, 2, 4, 6, 9, 70, 3, 6, 81, 3, 4, 8, 91, 105, 8, 10, 7).

TULCEA. *L. 1.* cl. VII. Conțescu Vlad (2367, 9, 70, 95—9), Stoina Maria (2374, 7, 81, 3, 4, 95, 401, 4).

TURDA. *L.* cl. X. Șerban Viorel (7119, 20, 2, 4—8, 30—6, 40, 4, 51, 3, 5), cl. XI. Russu Epaminonda (7048, 9, 54, 9—64, 6, 9, 70), Toma Mircea (7119—22, 4, 31, 42, 67, 8, 88, 217, 22—5).

TURNU MĂGURELE. *L.* cl. X. Blejan Florea (7119, 20, 2, 4, 30—2, 85, 8, 94, 216, 20, 3, 4).

TURNU SEVERIN. *Ș. g.* cl. VI. Bivolaru Vasile (2367—72, 95, 401), Popescu Mihaela (2367—74, 82), cl. VII. *Biban Irina* (2367, 72—5, 8—84, 3, 4, 6—9), 3—407, 7127, 40, 6, 9, 95), Păunescu Florica (2367, 71, 81—4, 94, 5, 9—402), Stocker Mariana (2382, 4, 7, 94—401, 4), cl. VIII. Dumitrescu Nicolae (2381—5, 90, 5, 9, 400, 1), Iupceanu Ion (2368, 70—2, 7—85, 8—90, 4—6, 8—402), cl. XI. Popescu Mariana (7119—22, 4, 30—2, 6, 46, 63, 85, 216, 7, 22—4), Sitaru Grigore (7119—22, 4, 30, 1, 5, 6, 48, 88, 92, 6, 203, 16, 7, 24, 39). Nedelceanu Nicu (2369, 70, 3—6, 7, 81—3, 5).

UȘUREI (ARGEȘ). *Ș. g.* cl. VIII. Dincă Ana (2367—71, 4—7, 9, 80).

URLAȚI (PLOIEȘTI). *L.* cl. X. Vasile Ion (7119, 20, 2, 7, 30—2, 5, 6, 8, 163, 85, 216, 9, 22, 3), Zotta Dan (7119, 20, 7, 9—32, 4—6, 8, 40, 4—6, 51, 63).

VĂLENI (ARGEȘ). *L.* cl. XI. Savu Dumitru (7121), 2, 31, 2, 5, 79, 85, 216, 7, 22—4, 51).

VĂRȘAND (CRIȘANA). *Șc. U.V.* anul I. Hotăran Petru (2367—72, 4—6, 8—80).

VASLUI. *L. 1* cl. VII. Bîrlădeanu Aurora (2369, 71, 6, 8, 9, 81, 3, 4, 7), Gold Iulian (2369, 70, 4—6, 81—4), Mihai Ecaterina (2369, 72, 6, 9, 81, 2, 4, 8).

VÎCOV DE SUS (SUCEAVA). cl. IX. Chvalele Otto (2378, 91, 2, 3, 80, 7079, 127, 31, 85, 236), cl. X. Curea Stela (7172, 30—2, 4, 85, 8, 96, 235, 6, 9, 40, 3).

TRIFOI VASILE (7119, 22, 3, 30—3, 5, 6, 8, 46, 55, 66).

VIȘINEȘTI (PLOIEȘTI). *Ș. g.* cl. VIII. Badea Carmen (2370, 6, 7, 81, 3, 5, 95, 8, 9, 30, 2, 3).

VÎRTOAPELE (BUCUREȘTI). *Ș. g.* cl. VIII. Nedelea Stanca (2381—4, 9, 91, 2, 5—8, 400, 1).

ZALĂU (CLUJ). *L. 1* cl. XI. Bîrjoc Delia (7119—24, 30, 1, 4, 44, 85, 8), Fărcașu Marcela (7119—2, 9, 30, —2, 4, 3).

*

Pînă la 1 martie 1966 s-au primit soluții bune la problemele propuse în G.M.B. după *cum urmează*:

ADJUD—BACĂU *S.g.1* cl. VII. Donciu Viorica (E : 2395—8, 402, 4, 12, 3, 28), L. 1 cl. XI. Caraman Vasile (7216, 24, 6, 36, 66, 83—8, 300, 26, 8).

AIUD. *S. g.* cl. VII. Maftei Doina (E : 2381—5, 9, 90, 3—5, 7, 8), Stincel Ioan (E : 2381, 3, 5, 93—6, 8, 404, 13).

ALBA IULIA. *S. g. 1* cl. VII. Magda Nicolau (E : 2381, 3, 5, 94, 5, 401, 2, 24), *L. 1* cl. XI. Tulbure Mircea (7216—28, 35, 7, 9, 45, 50, 1, 77).

ALBEȘTI. *Ș. g.* cl. VII. Belega Viorica (E : 2394—404).

ANINA. *Ș. g. 1* cl. VI. Kovanetz Henrietta (E : 2381, 5, 8, 95, 6, 8, 402, 4), cl. VIII. Codrea Maria (E : 2385, 94—6, 400, 1, 4, 6, 9), Toma Marius (E : 2381—5, 92—6, 400, 1, 5, 6), Varga Renate (E : 2285, 94—6, 400, 1, 4, 9).

ARAD. *L. 1.* cl. VII. Deci Florin (E : 2381—5, 7, 9, 90, 2, 3, 5), cl. IX. Pătru Ionel (E : 2409, 24—8, 7284—9), cl. X Gligor Alexandru (7169, 85, 8, 217, 9, 20, 2—7, 35), *L. 2* cl. VI. Greceanu Radu (E : 2390, 5, 6, 400, 4, 11—3), cl. VII Neuman Elena (E : 2381—5, 95, 9, 401), Vălceanu Virgil (7185, 8, 95, 216, 9, 20, 1, 31, 3—5, 63), *Grup şcolar U.V.* cl. I Hotăran Petru (E : 2381—4, 7, 9—91, 3, 5, 401, 4, 10, 1, 3, 4, 7, 8, 28).

AVRIG. L. 1 cl. X Berghea Vasile (7276, 84, 5, 8, 98—301, 17, 8, 21, 2, 5, 6, 8, 38), cl. XI. Popica Elena (7188, 94, 216, 7, 9, 20, 2—4, 6, 45, 86, 7).

BACĂU. *Ş. g. 2* cl. VIII Beneş Maria (E : 2381—4, 9, 96, 8—400, 2, 5, 10), *Ş. g. 8* cl. VII. Andarache Gabriela (E : 2381—4, 94—404, 11, 3, 24), Cociorvei Victor (E : 2381—4, 95, 6, 8—400, 2), Cîrlan Carmen (E : 2381—4, 95, 6, 8, 400, 2), cl. VIII. Andrei Sorin (E : 2385, 404, 19, 21, 3, 4, 7; 7185), *L. 1.* cl. IX Pacovescu Georgeta (E : 2391—3, 5, 7, 8; 7185, 8, 216, 22, 4, 84—7), cl. X. Paraschiv Alexandru (7216, 9, 21—5, 84—6, 8, 91, 300), Semianu Vladimir (7216, 7, 9—26, 87, 91, 300), cl. XI. Andrei Nicolae (7185, 216, 7, 23, 47, 82, 3, 6, 7, 9—318), *L. 4* cl. IX Andrei Nicolae (7185, 216, 7, 23, 4, 47, 82, 3, 6, 7, 9—308), *L. 4* cl. IX Dănilă Adrian (E : 2425—8, 44—6; 7284, 5, 7, 8, 326, 8).

BAIA DE ARIEŞ. *L. 1* cl. XI. Mariţa Dorin (7185, 8, 90, 4, 9, 204, 10, 32, 5, 9, 47, 51).

BAIA MARE. *Ş. g. 2* cl. VI. Popp Katelin (E : 2395—8, 400, 1, 3, 5), Ş. g. 5 cl. VII. Ardeleanu Gh. (E : 2381—4, 95, 8—401, 4), Birsan Stefan (E : 2381—3, 5, 97, 400, 2, 4), Dobrovski E. (E : 2381, 3, 85, 95, 6, 400, 2, 4), Gavrilescu Livia (E : 2381—3, 5, 95, 8, 40—2, 4), Horgoş Viorica (E : 2381—3, 5, 95, 8, 400, 2—4), Mureşan Aurelia (E : 2381—3, 5, 95, 7, 9, 400, 2—4), Pop Ecaterina (E : 2381—3, 95, 7, 400, 2), Rudics Ecaterina E : 2381, 5, 95, 6, 8, 403, 4), Tamaş Valeria (E : 2381—5, 95, 7, 402, 4), cl. VIII. Buteanu Aurelia (E : 2383, 4, 7, 92, 5, 8—400, 2), Sint Elisabeta (E : 2181—5, 7, 8, 92, 3), *Ş. g. 9* cl. VIII Pop Elena (E : 2395, 402, 5, 9, 23, 4, 6, 8), Torsu Aurora (E : 2395, 402, 5, 9, 24, 4, 5, 6, 8). L. 1. cl. IX Petre Emilia (E : 2409, 24—8; 7284—8, 91), *L. 3* cl. X. Ipsan Dan (7221—3, 5, 6, 35, 6, 46, 76, 87, 99, 308), cl. XI. Veronescu Mircea (7266, 7, 75, 84, 8, 95, 300—4, 8).

BAIA SPRIE. *L. 1* cl. X Trif Lucian (7216, 7, 9, 22, 4, 35, 40, 2, 3, 5, 58, 72, 6, 86, 7, 9, 91, 2, 5, 8, 300, 1, 8, 9).

BALCEŞTI—OLTENIA. *L. 1* cl. IX. Dascălu Ion (7271, 8, 22, 3, 5, 50, 320, 3, 8, 35, 9, 43, 5), Diaconu Teodor (7217, 8, 22, 3, 5, 50, 320, 1, 3, 8, 35, 9, 45).

BĂNEŞTI—PLOIEŞTI. *Ş. g.* cl. VI Radu Elena (E : 2385—6, 8—402, 11—3), Banu Elena (E : 2395, 6, 9—402, 11—3), Brînzea Nicolae (E : 2395, 6, 9—402, 11—3), Cristian Lazăr (E : 2395, 6, 9—402, 11—3), Cristian Maria (E : 2395, 6, 9—402, 11—3), Ioniţă Marian (E : 2395, 6m 9—402, 11—3), Matei Aurelia (E : 2395, 6, 9—402, 11—3), Rădulescu Elena (E : 2395, 6, 9—402, 11—3), Roşca Maria (E : 2395, 6, 9—402, 11—3), Stănuclescu Neguţ (E : 2395, 6, 9—402, 11—3), Stroescu Constantin (E : 2395, 6, 9—402, 11—3), Tache Ileana (E : 2395, 6, 9—402, 11—3), Tudor Ana (E : 2395, 6, 9—402, 11—3).

BEIUŞ—CRIŞANA. *L. 1* cl. VII Ungureanu Adriana (E : 2382—4, 99, 404, 11—3).

BISTRIŢA. *L. 1* cl. IX. Mureşerev George (E : 2424—8,; 7222, 3, 84—8), Timofte Corneliu (E : 2392, 409, 24—8; 7185, 8, 284—8), cl. X Cotoc Ioan (7216, 7, 20—4, 6, 83—8, 92, 300), cl. XI Lupşa Nicolae (7135, 8, 93, 4, 9, 210, 9, 20, 4, 6, 47), *L. 2* cl. IX, Bota Maftei (E : 2409, 24—8; 7223, 84—8), cl. X Merenes M. Teodor (7126, 9, 21, 2, 4, 5, 36, 40, 40, 93, 5, 6, 300).

BIRCA—OLTENIA. *Ş. g.* cl. VIII. Popa Ştefan (E : 2382—4, 89, 90, 2, 5, 7, 402, 4, 5; 7185), Proca Marin (E : 2383, 94, 6, 8, 410, 4, 21, 4), Proca Ştefan (E : 2387, 90, 4—6, 8, 402, 5, 9—11; 7185).

BÎRLAD. *L. 2.* cl. IX Radoveanu Radu (E : 2381—4, 7, 9, 92, 410, 1, 3, 4; 7185), *L. 3* cl. V. Năstase Ana (E : 2381—4, 92, 4—7), Sava Anca (E : 2381—4, 94—9), cl VII. Anghel Georgeta (E : 2381, 4, 95, 7, 9—401, 4), Mihalache Ion (E : 2382, 8, 94—8, 400, 1, 4, 6), cl. VIII. Asu.tanei Mariana (E : 2395, 6, 8, 9, 401, 4, 10, 2—4),, Cornescu Ouminiţa (E : 2395, 8, 9, 406, 10, 1, 3, 25), Ionescu Mariana (E : 2394—400, 2, 4, 6, 9), Protopopescu Cristina (E : 2395, 6, 406, 11—3, 7, 8, 23, 5, 8), Vasiliu Gelu (E : 2394—6, 8—402, 4), Zaharia Lucia (E : 2394—8, 400, 4, 6).

BOCŞA—BANAT. *L. 1.* cl. X Iorgovan Gheorghe (7216, 7, 9, 21, 4, 6—8, 82, 3, 5—7, 91, 6, 300), cl. XI Cernescu Gh. (7216—8, 20, 2—6, 8, 47, 78, 86, 7).

BOLD—SUCEAVA. *Ş. g.* cl. VII Agapie Silvia (E : 2411—3, 21, 8, 32, 4, 8, 9, 41, 2), Alexandru Lica (E : 2411—3, 21, 8, 32, 4, 8, 9, 41, 2), Bordeleanu Janeta (E : 2411—3, 21, 8, 32, 4, 8, 9, 41, 2), Bălăşanu Petru (E : 2411—3, 9, 28, 32, 4, 8, 9, 41, 2), Nechita Maria (E : 2411—3, 9, 28, 32, 4, 8, 9, 41, 2).

BORDENI—PLOIEŞTI. *Ş. g.* cl. VI. Mincu Vasile (E : 2381, 3, 5, 95, 41—3, 5), Niţă Elena (E : 2381, 3, 5, 95, 7, 401—3, 6), Vlaicu Maria (E : 2381, 3, 5, 95, 411—3, 6).

BOTOŞANI. *L. 1.* cl. VIII Filimon Eugenia (E : 2396, 404, 10—3, 23, 7).

OBSZÁGOS MÚSZAKI DOKUMENTÁCIÓS KÖNYVTÁR 1883

BOZOVICI—BANAT. *L. 1* cl. VIII Vroşovan Mariţa (E : 2381, 2, 5, 92, 4, 5, 9—402), Ignea Ana (E : 2402, 6, 10—4, 7—23), Piescu Călina (E : 2406, 10—4, 6—21, 3—8).

BRAD—HUNEDOARA. *Ş. g. 2* cl. VII. Trufaşiu Dan (E : 2381—4, 8, 90, 5—7, 9—404)

BRANIŞTEA—BUCUREŞTI. *Ş. g.* cl. VI. Giugiucă Mariana (2410—4, 7—9, 22), cl. VIII. Giugiucă Liliana (E : 2410—4, 7—9, 22), Gogonţea Marin (E : 2410—9, 21), Vişan Ion (E : 2410—4, 6—8), cl. VIII Tărbuc Dorina (E : 2381, 4, 5, 9, 92, 400, 2, 4—6).

BRAŞOV. *Ş. g. 5* cl. VII. Păun Marius (E : 2381—91, 5—8, 400, 3—6), *Ş. g. 6* cl. VIII Curelea Adrian (E : 2410—3, 8, 9, 21, 4), Oniga Viorica (E : 2381, 3—5, 9, 90, 2, 3), *Ş. g. 13.* cl. VII. Demetrescu Adrian (E : 2381, 3, 95, 8, 9, 401, 3, 4), Lupulescu N. (E : 2394—400, 2), *L. 4* cl. VII. Nistor Andrei (E : 2397—401, 4, 10—2, 7, 8, 25, 6, 8), Pantaze Aurel (E : 2397—401, 4, 10—2, 7, 8, 25, 6, 8), cl. VIII. Barbu Gabriela (E : 2384, 96, 400, 4, 17—9, 21, 8), Bătrînu Niculina (E : 2381, 5, 95, 8, 412, 9, 21, 4), Donţu Alexandrina (E : 2381, 2, 95, 411, 2, 8, 9, 28), Grigoraş Dumitru (E : 2381—5, 97, 400, 1, 4, 10, 1, 3, 4, 7—9, 21, 3, 8), Olteanu Valentina (E : 2389, 94, 403, 5, 11—3, 7, 9, 21, 81). *Şc.-muzică* cl. VIII. Alexandrescu Nicolae (E : 2381, 2, 4, 94, 403, 4, 18, 28).

BRĂILA. *Ş. g. 4* cl. VIII. Ciocla Valeriu (E : 2381—4, 8, 97, 9, 401, 3, 4), Cojocea Cornelia (E : 2381—4, 95, 6, 400, 1), Ivan Mariana (2382, 4, 7, 9, 95, 400, 1, 4), Ş. g. 7, cl. V Nistor Valentin (E : 2394—7, 400—4), Sgircitu Georgeta (E : 2381—5, 7—9, 95, 6), Ş. g. 8 cl. VIII Ichim George (E : 2381—,4, 95, 6, 400—2, 4), Ş. g. 10 cl. VI Florescu Liliana (E : 2394—6, 8—402, 4, 5), *Ş. g. 12* cl. VIII Conciu Mariana (E : 2381—4, 95, 9 401, 3, 4), *Ş. g. 14* cl. VIII Buhociu Constantin (E : 2381—5, 9, 90, 2, 94—7, 9, 40—5), *Ş. g. 17* cl. VI. Şerbănescu Maria (E : 2381—5, 7, 94, 5, 8, 9), *Ş. g. 18* cl. VII Răducu Ion (E : 2395, 6, 8—401, 3, 4, 11, 2, 8, 28), Vintilă Tiberiu (E : 2381—4, 7, 410, 2, 3), cl. VII Stoea Nicolae (E : 2383, 4, 9, 95, 7, 9—401, 4). *Ş. g— 22* cl. VIII Dragomir Gh. (E : 2381—5, 7—90, 2), Enache Marin (E : 2381—3, 5, 8, 92, 5, 7—9, 402), cl. XI Strîmbeanu Fani (E : 2381, 2, 5, 92, 5, 8, 501, 4). *L. 3* cl. X. Pincu Mija (7185, 8, 216, 7, 20, 6, 7, 83, 6, 7, 9, 300).

BRĂNEŞTI—PLOIEŞTI. *Ş. g.* cl. VIII Dragotescu Daniela (E : 2404, 5, 10—2, 4, 5, 19), Ivănescu Liliana (E : 2395, 10, 13, 5, 9, 23, 4, 7).

BREASTA—OLTENIA. *Ş. g.* cl. VI Barbu Lenuţa (E : 2395—7, |400, 4, 11—3), cl. VII. Ungureanu Victor (E : 2383, 4, 95—7, 9, 400, 1, 3, 4).

BREAZA—PLOIEŞTI. *L. 1* cl. X. Cîrtoaje Vasile (7216, 7, 9—27, 31, 3—6, 8, 40—2, 6, 7), Şchiopu Laurenţiu (7185, 8, 216, 7, 20—4, 39, 83—5, 91, 300), Tăleanu Constantin (7185, 8—90, 2—9, 204, 10, 6—24, 6, 34—7, 9, 42, 3, 6, 7, 62), *L. militar* cl. XI. Matache Gh. (7185, 8, 94, 9, 210, 7, 6, 22—6, 34, 47, 83), Nenu Iulian (7185, 8, 98, 204, 24, 5, 32, 4, 6, 46, 7, 9), Prohonţu Constantin (7179, 85, 8, 216, 7, 22, 4, 84—8).

BUCUREŞTI. *Ş. g. 3* cl. VII. Iotcu Magdalena (E : 2410—4, 7, 8, 22, 3), Georgescu Marius (E : 2395, 7, 9, 404, 10—2, 8, 9, 28), cl. VIII. Schwefelberg Alexandru (E : 2398, 405, 6, 21, 3, 6, 7 ; 7286, 7), Stoicu Gheorghe (E : 2393, 401, 6, 10—3, 7, 8, 21, 3—5, 8—32, 8, 9, 41, 2, 4), *Ş. g. 4* cl. VI. Brădăţeanu Mihalea ((E : 2381, 3, 5, 93—6, 8), Udrea Bogdan (E : 2394—402, 4, 10—4, 7, 8, 21, 4), *Ş. g. 5* cl. VI. Bradl Silvian (E : 2381—5, 7—9, 94—6, 8—404), Galles Ioan (E : 2391—5, 7, 9, 90, 4, 5, 7, 9—402, 4, 5), Lazăr Anca (E : 2381—5, 7—90), Streja Dan (E : 2381—5, 8, 9, 97), *Ş. g. 10* cl. VIII Weintraub Andrei (E : 2381—5, 7—90, 2—4, 6, 7, 404, 5), *Ş. g. 21* cl. VI. Dumitriu Liana (E : 2381, 5, 95, 6, 402, 13, 8, 20), cl. VIII Dumitriu Adrian (E : 2381, 5, 9, 92, 400, 2, 9, 19, 21, 4, 8), *Ş. g. 26* cl. VIII Ştefănescu Florin (E : 2389, 90, 3, 5—7, 404, 9), *Ş. g. 50* cl. VII. Ianuş Gh. (E : 2399, 410—14, 7, 8, 20, 1, 8, 31, 2, 4, 8, 40), *Ş. g. 99* cl. VII. Russu Eugen (E : 2395, 7—9, 403, 11—4, 7), *Ş. g. 103* cl. VIII Marinescu Viorel (E : 2382, 5, 8—93), *Ş. g. 114* cl. V. Răsturnoiu Ştefan (E : 2381—4, 95, 7, 410—13), *Ş. g. 118 V. Alecsandri.* cl. VI. Militaru Mircea (E : 2371, 81—3, 95, 6, 8, 412, 13), Udran Liviu (E : 2371, 81—3, 7, 95, 6, 8, 412, 13), Urdăreanu Tiberiu (E : 2371, 81—3, 7, 95, 6, 8, 412, 13), *Ş. g. 121* cl. VIII Ionescu Florin (E : 2385, 9—92, 402—6, 8, 19—28), *Ş. g. 122* cl. VI. Lupulescu Adrian (E : 2381—5, 98, 401, 4), cl. VII. Axelrad Andrei (E : 2381—5, 7, 9, 94), Brătescu St. Anca (E : 2385, 95, 8—400, 2—4), Chivu Gherghina (E : 2381—5, 95, 404, 13, 3), Drăguşin Marian (E : 2381—3, 94, 6, 7, 400, a), Floricâ Georgiana (E : 2395—403), Mărculescu Olimpia (E : 2395, 6, 8, 401, 4, 11, 2, 12, 3, 8), Petrescu Felicia (E : 2381—5, 8, 410, Q), Rothschild M. Mihai (E : 2392, 410, 1, 3—23), Stoica Dan (E : 2381—4, 9, 93, 8, 400, 4), Teodor Ioan (E : 2381—5, 95, 404, 12, 3), Trufin Angela (E : 2381—5, 8, 95, 404, 12, 3), Zeghici Violeta (E : 2381, 3—5, 8, 95, 404, 1, 3), cl. VIII Balaure Aurora (E : 2381, 4, 5, 92, 5, 8, 404, 6, 12), Drăguşin Adrian (E : 2413, 17—9, 21, 3—5, 7, 9—31, 4, 47), Nistor Irina (E : 2381Ţ4, 7—9), *Ş. g. 128* cl. V. Rogobete Nicoleta (E : 2381—5, 7—9), cl. VI. Popa Mihaela (E : 2381—5, 7, 98, 402), cl. VIII Bivolaru Carmen (E : 2381—5, 8—90), Ciontea Mariana (E : 2381—5, 8—90, 3), Ciora Mihaela (E : 2381—5, 7—90), Gruia Mihaela (E : 2381—5, 7—90), Gruia Vladimir (E : 2381—5, 7—90). *(va urma)*

1966 MAJ 2 0

CĂTRE REZOLVITORII DE PROBLEME

— *Rezolvînd probleme pregătiți și Olimpiada Matematică 1966.*

Corespondenții care ne trimit probleme rezolvate trebuie să redacteze fiecare problemă separat, însoțind-o de toate calculele necesare și de figuri desenate cu îngrijire.

Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceeași foaie.

Evidențiații trebuie să aibă cel puțin 35—40 soluții bune.

Problemele care se propun de către colaboratorii revistei să fie clar alcătuite și însoțite de soluții, să fie personale, iar nu luate din cărți sau reviste. Elevii sînt sfătuiți să înceapă a propune probleme numai după ce au rezolvat un număr destul de mare de exerciții și probleme. Problemele propuse, dar necorespunzătoare, nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse au fost publicate în cărți sau reviste, este rugat să arate precis volumul și pagina unde a mai apărut enunțul sau soluția problemei respective.

Solicităm probleme interesante legate de practică.

— *Problemele propuse urmînd a fi publicate ținînd seama de predarea la clasă a materiei respective, autorii lor sînt rugați să trimită problemele din vreme însoțite de una sau mai multe soluții îngrijit scrise precum și observări, discuții sau uneori generalizări, arătînd și modul cum au fost stabilite.*

— ***Problemele propuse*** **(P)**, *note matematice* **(N)**, *articole* **(A)**, *materiale privind cercurile de elevi* **(C)**, *se vor trimite redacției* **G.M.-B.** *de preferat într-un plic separat de broblemele rezolvate.*

Corespondentul nostru care a citit și a înțeles deplin multe din soluțiile publicate, a rezolvat multe din problemele propuse poate și este îndemnat să încerce să schițeze cîte o notă rezultată dintr-o observație făcută cu ocazia rezolvării unei chestiuni mai grele. Aceste note să fie *revăzute de mai multe ori înainte de a fi trimise*, pentru ca redactarea lor să fie *cît mai clară și concisă*. Figurile să fie făcute separat. În redactare se vor evita prescurtările.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

La publicarea problemelor rezolvate se vor menționa rezolvitorii care au dat o bună redactare și o soluție interesantă sau mai multe metode de rezolvare.

Elevii clasei a IX-a pot trimite soluții și la problemele propuse pentru clasa VIII-a. Problemele rezolvate trebuie să fie din ultimile trei numere apărute în G.M.B. *Problemele rezolvate* vor fi expediate în cursul unei luni și vor fi însoțite de un borderou cu numărul problemelor, scrise în ordinea crescîndă. Pe plic se va scrie școala, clasa și localitatea rezolvitorului. Problemele propuse vor fi separate, corect rezolvate și citeț semnate. Desenele să fie făcute îngrijit pe foi separate.

Elevii claselor V—VIII vor fi anunțați în rubrica rezolvitorilor de probleme dacă trîmit odată cel puțin 8 probleme bine rezolvate, iar elevii claselor IX—XI, pentru cel puțin 12 probleme bine rezolvate.

Autorii sînt rugați să semneze clar la sfîrșitul lucrării personale pe care o trimit pentru publicat și să dea adresa lor exactă.

★

În vederea stimulării elevilor clasei XI premiați la olimpiadele internaționale de matematică sau olimpiadele interne (etapa finală), care devin studenți ai facultății de matematică-mecanică sau fizică de la Universități, conducerea Ministerului Învățămîntului a hotărît să li se acorde următoarele forme de sprijin material:

a) bursă în primul an de studii, indiferent de situația lor materială. În următorii ani de studii bursa să fie menținută în aceleași condiții dacă obțin media generală cel puțin 9,00.

b) la începutul primului an de studii să li se acorde cărți și manuale de specialitate în valoare de 500 lei.

c) în vacanțele anului I de studii să fie trimiși cu prioritate la odihnă în taberele studențești (iarna sau vara la alegerea studentului) dacă rezultatele școlare sînt foarte bune.

★

Tirajul fiind limitat, gazetele se trimit mai întîi abonaților și de aceea rugăm colaboratorii noștri să se aboneze de îndată. Prețul este de 2 lei exemplarul. *Abonamentele se pot face prin oficiile poștale locale.*

I. P. „Informația" — c. 3088 INDEX 41601 **Lei 2**

E 1426

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE
DIN REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA

GAZETA MATEMATICĂ

SERIA B

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XVII — mai 1966

5

GAZETA MATEMATICĂ
SERIA B
Anul XVII, nr. 5 — mai 1966

SUMARUL

Pag.

1. Rezolvarea unor ecuaţii de gradul al IV-lea de Gh. Bazacov, Tr. Severin 193
2. Note matematice de Ion Blană, Ion Munteanu şi Cornel Popovici 199
3. Probleme rezolvate (7032, 7033, 7036, 7042, 7077, 7078, 7081, 7082 7085, 7087, 7090) 207
4. Chestiuni de examen (7529—7550) 219
5. Probleme propuse (7551—7579) 223
6. Exerciţii şi probleme propuse pentru clasele V—VIII (E: 2495—2511) 228
7. Din activitatea cercului de matematică a claselor VII, de la liceul 34, C. A. Rosetti, Bucureşti de Nicolae Teodorescu 231
8. Cărţi noi 232
9. Rubrica rezolvitorilor de probleme 232

ANUL XVII 5 MAI

COMITETUL DE REDACŢIE

Dincă N., profesor ; *Grosu A.*, profesoară ; *Ionescu-Bujor C.*, prof. univ. emerit ; *Ionescu-Ţiu C.*, profesor, redactor şef adjunct ; *Kiss E.*, conf. univ. (Cluj) ; *Kovacs K.*, conf. univ. (Cluj) ; *Muşat I.*, profesor ; *Ottescu C.*, profesor ; *Plăviţu M.*, profesor ; *Sacter O.*, conf. univ., redactor şef ; *Simionescu Gh.*, conf. univ. ; *Ţene L.*, profesoară şi *Voinea R.*, prof. univ.

REDACŢIA : Str. Academiei, 14 — Tel. 14.46.53 — Bucureşti

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică a şcolilor, precum şi orice material informativ se vor trimite pe adresa de mai sus.

GAZETA MATEMATICĂ

SERIA B

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XVII nr. 5 mai 1966

REZOLVAREA UNOR ECUAȚII DE GRADUL AL IV-lea

de *GH. BAZACOV*, Turnu Severin

În anul 1545 matematicianul italian *Cardan* publică în lucrarea sa „Ars magna," o serie de elemente de teoria ecuațiilor printre care și formulele de rezolvare a ecuației de gradul al III-lea, deduse de *Tartaglia*, precum și procedeul de rezolvare algebrică a unei ecuații de gradul al patrulea, descoperit de elevul său *Ferrari*. Metoda folosită de *Ferrari* constă în determinarea unui parametru α, pe care-l introduce în ecuația de gradul al IV-lea, în scopul de a pune această ecuație sub una din formulele

$$(x^2 + Ax + B)^2 = (Mx + N)^2 \quad \text{sau :} \quad (x^2 + k)^2 = (mx + n)^2.$$

Pentru aceasta, parametrul α trebuie să aibă o anumită valoare și anume α este rădăcină a unei ecuații de gradul al treilea, ecuație ce a primit denumirea de *rezolvanta* ecuației de gradul al IV-lea.

În prima jumătate a secolului al XVII-lea *René Descartes* determină o altă metodă *), punînd ecuația de gradul al IV-lea sub forma

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d \equiv (x^2 + \alpha x + \beta)(x^2 + \alpha' x + \beta')$$

Dar și în acest caz se ajunge la rezolvarea unei ecuații de gradul al III-lea.

Din cele arătate mai sus ne dăm seama că s-ar putea stabili unele formule care să exprime în radicali, rădăcinile ecuației generale de gradul al IV-lea, dar impotanța lor practică este redusă, fiind prea complicate.

În cele ce urmează ne vom ocupa de unele ecuații de gradul al IV-lea, ai căror coeficienți satisfac anumite condiții și astfel vom putea exprima algebric toate rădăcinile lor.

Mai întîi să stabilim rezolvantele ecuațiilor următoare :

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{și} \quad x^4 + ax^3 + bx + c = 0$$

folosind procedeul lui Ferrari pentru a pune pe prima sub forma $(x^2 + k)^2 = (mx + n)^2$, iar pe a doua, sub forma $(x^2 + Ax + B)^2 = (Mx + N)^2$.

*) Vezi „Elemente de teoria ecuațiilor algebrice și transcendente", de O. Sacter.

Considerăm ecuaţia $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$, care este echivalentă cu ecuaţia.

$$\left(x^2 + \frac{a+\alpha}{a}\right)^2 = \alpha x^2 - bx + \left(\frac{a+\alpha}{2}\right)^2 - c \qquad (1)$$

pentru orice valoarea dată parametrului α.

Pentru ca trinomul din dreapta să fie un patrat perfect, trebuie ca discriminantul să fie nul, adică:

$$b^2 - 4\alpha\left[\left(\frac{a+\alpha}{2}\right)^2 - c\right] = 0.$$

care, după efectuarea calculelor se scrie:

$$\alpha^3 + 2a\alpha^2 + (a^2 - 4c)\alpha - b^2 = 0 \qquad (2)$$

Ecuaţia aceata este rezolvanta ecuaţiei $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ şi α trebuie să fie rădăcină a ecuaţiei (2) pentru ca ecuaţia considerată să poată fi pusă sub forma $(x^2 + k)^2 = (mx + n)^2$.

Rădăcinile ecuaţiei de gradul al patrulea vor fi egale cu rădăcinile obţinute de la ecuaţiile de gradul al doilea:

$$x^2 + k = \pm (mx + n).$$

Un alt mod de a folosi parametrul α este următorul:
ecuaţia $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ se poate scrie şi astfel

$$\left(x^2 + \frac{a\alpha}{2}\right)^2 = a(\alpha - 1)\, x^2 - bx + \left(\frac{a\alpha}{2}\right)^2 - c \qquad (c)$$

Punînd condiţia ca discriminantul trinomului din partea a doua să fie nul se obţine:

$$b^2 - 4(\alpha - 1)\left(\frac{a^2\alpha^2}{4} - c\right) = 0$$

care, după efectuarea calculelor devine:

$$a^3\alpha^3 - a^3\alpha^2 - 4c\alpha - (b^2 - 4ac) = 0. \qquad (4)$$

Aceasta reprezintă rezolvanta ecuaţiei noastre, diferită de rezolvanta (2).

Putem afirma atunci, că o ecuaţie de gradul al patrulea poate avea diferite rezolvante, după felul cum introducem pe α în ecuaţia considerată.

— Să considerăm acum ecuaţia $x^4 + ax^3 + bx + c = 0$ pe care o putem scrie sub forma

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2} + \alpha\right)^2 = \left(2\alpha + \frac{a^2}{4}\right)x^2 + (a\alpha - b)\, x + \alpha^2 - c. \qquad (5)$$

Procedînd la fel ca mai înainte, ajungem la rezolvanta

$$8\alpha^3 + 2(ab - 4c)\,\alpha - (b^2 + a^2 c) = 0 \qquad (6)$$

Înlocuind în (5) valoarea lui α obţinută din ecuaţia (6) atunci ecuaţia considerată se poate pune sub forma:

$$(x^2 + Ax + B)^2 = (Mx + N)^2$$

şi rădăcinile ei sînt date de ecuaţiile de gradul al doilea :

$$x^2 + Ax + B = \pm (Mx + N).$$

Ecuaţia $x^4 + ax^3 + bx + c = 0$ scrisă sub forma

$$\left(x^2 + \frac{ax + \alpha}{2}\right)^2 = \left(\alpha + \frac{a^2}{4}\right) x^2 + \left(\frac{a\alpha}{2} - b\right) x + \frac{\alpha^2}{4} - c \qquad (7)$$

are ca rezolvantă :

$$\alpha^3 + (ab - 4c)\,\alpha - (b^2 + a^2 c) = 0. \qquad (8)$$

— În aplicaţii putem folosi una din formele parametrice ale ecuaţiei date cu rezolvanta respectivă.

Exemplul 1. Să se rezolve ecuaţia

$$x^4 - 10x^2 - 9x - 2 = 0.$$

Rezolvanta (2) va fi în acest caz :

$$\alpha^3 - 50\alpha^2 + 108\alpha - 91 = 0$$

care are rădăcină pe $\alpha = 9$.

Introducînd această valoare în (1) se obţine următoarea formă a ecuaţiei date :

$$\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(3x + \frac{3}{2}\right)^2$$

care se descompune în două ecuaţii :

$$x^2 - \frac{1}{2} = \pm\left(3x + \frac{3}{2}\right) \text{ sau : } x^2 - 3x - 2 = 0 \text{ şi } x^2 + 3x + 1 = 0.$$

Se obţin rădăcinile

$$\frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{17}) \text{ şi } \frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{5})$$

Exemplul 2. Să se rezolve ecuaţia

$$x^4 + 2x^3 + 14x - 1 = 0.$$

Pentru rezolvarea acestei ecuaţii ne vom folosi de forma parametrică (5) şi de rezolvanta (6). Obţinem :

$$\alpha^3 + 8\alpha - 24 = 0$$

care are o rădăcină reală $\alpha = 2$. Ecuaţia se poate scrie atunci

$$(x^2 + x + 2)^2 = 5\,(x - 1)^2 \quad \text{sau :} \quad x^2 + x + 2 = \pm \sqrt{5}(x - 1)$$

Rezolvînd ecuaţiile :

$$x^2 + (1 - \sqrt{5})x + 2 + \sqrt{5} = 0 \quad \text{şi} \quad x^2 + (1 + \sqrt{5})\,x + 2 - \sqrt{5} = 0$$

ajungem la rădăcinile ecuaţiei date :

$$\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5} \pm i\sqrt{2 + 6\sqrt{5}}) \text{ şi } \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{5} \pm i\sqrt{-2 + 6\sqrt{5}})$$

Din aceste exemple, ne putem da seama că rădăcinile iraționale ale unei ecuații algebrice de gradul al patrulea, exprimate prin radicali sînt foarte complicate în comparație cu cele obținute de la o ecuație de gradul al doilea. În asemenea cazuri calcularea valorii aproximative a unei astfel de rădăcini se poate obține mai ușor, folosind metodele de aproximare cuprinse în programa școlii de 12 ani.

— Să trecem acum, la rezolvarea unor ecuații de gradul al IV-lea, cînd coeficienții lor satisfac anumite condiții.

I. Să se rezolve ecuația

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0.$$

în cazul cînd $(a + 1)^2 - b^2 = 4c$.

Rezolvanta (2) va avea în acest caz o rădăcină egală cu 1 ($\alpha = 1$) și atunci ecuația dată se poate pune sub forma:

$$\left(x^2 + \frac{a+1}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{b}{2}\right)^2,$$

ținînd seamă de (1) și de condiția dată.

Rezolvarea ecuației date revine tot la rezolvarea a două ecuații de gradul al II-lea.

Exemplu. Să se rezolve ecuația:

$$x^4 + 4x^2 - x + 6 = 0.$$

Condiția $(a+ 1)^2 - b^2 = 4c$ este îndeplinită și atunci ecuația se poate scrie sub forma

$$\left(x^2 + \frac{5}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$$

de unde se deduc ecuațiile:

$$x^2 - x + 2 = 0 \quad \text{și} \quad x^2 + x + 3 = 0$$

care rezolvate ne vor da rădăcinile:

$$\frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{7}) \text{ și } \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{11})$$

II. a) Rezolvarea ecuațiilor

$$x^4 + ax^3 + bx + c = 0.$$

la care avem $ab = 4c$.

În aceste cazuri ne folosim de forma parametrică (5) și de rezolvanta (6):

$$8\alpha^3 + 2(ab - 4c)\,\alpha - (b^2 + a^2c) = 0.$$

Ținînd seamă de condiția $ab = 4c$ ecuația rezolvantă devine o ecuație binomă

$$8\alpha^3 - (b^2 + a^2c) = 0$$

de unde obținem

$$\alpha = \frac{1}{2}\sqrt[3]{a^2c + b^2}$$

Exemplu. Să se rezolve ecuația

$$x^4 + 2x^3 - 4x - 2 = 0.$$

Îndeplinînd condiția $ab = 4c$ rezolvanta (6) devine $8\alpha^3 - 8 = 0$, care ne dă rădăcina $\alpha = 1$. Înlocuind pe α cu 1 în ecuația (5) obținem ecuația dată sub forma: $(x^2 + x + 1)^2 = 3x^2 + 6x + 3$, care se descompune în două ecuații: $x^2 + x + 1 = \pm\sqrt{3}(x+1)$.

Rezolvînd ecuațiile

$$x^2 + (1 - \sqrt{3})x + 1 - \sqrt{3} = 0 \text{ și } x^2 + (1 + \sqrt{3})x + (1 + \sqrt{3}) = 0$$

obținem cele 4 rădăcini ale ecuației date:

$$\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3} \pm i\sqrt[4]{12}) \text{ și } \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{3} \pm i\sqrt[4]{12})$$

b) Să se rezolve ecuația

$$x^4 + ax^3 + bx + c = 0,$$

în cazul cînd $a^2c + b^2 = 0$. Ecuația rezolvantă, în acest caz, are o rădăcină egală cu zero ($\alpha = 0$) și atunci ecuația dată se va scrie:

$$(x^2 + ax)^2 = \frac{a^2}{4} - bx - c$$

dar, $c = -\frac{b^2}{a^2}$ și atunci ecuația ia forma:

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4}x^2 - bx + \frac{b^2}{a^2}\right) \text{ sau: } \left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}x - \frac{b}{a}\right)^2$$

Ecuația

$$x^4 + bx + c = 0$$

poate fi considerată ca o formă necompletă a ecuației

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0$$

cînd $a = 0$ și atunci, forma ei parametrică se poate deduce din (1), unde facem pe $a = 0$ și obținem:

$$\left(x^2 + \frac{\alpha}{2}\right)^2 = \alpha x^2 - bx + \frac{\alpha^2}{4} - c \qquad (9)$$

iar rezolvanta ei va fi

$$\alpha^3 - 4c\alpha - b^2 = 0$$

a) Să se rezolve ecuația

$$x^4 + bx + c = 0$$

în cazul cînd $b^2+4c = 1$. Ecuaţia rezolvantă (1) va avea atunci rădăcină pe $\alpha = 1$ şi ecuaţia dată se va putea scrie sub forma :

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 - bx + \frac{1 - 4c}{4} = 0.$$

Dar $1 - 4c = b^2$ şi atunci

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 - bx + \frac{b^2}{4} \text{ sau : } \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{b}{2}\right)^2$$

— Considerăm ecuaţia

$$x^4 + ax^3 + c = 0$$

ca un caz particular al ecuaţiei

$$x^4 + ax^3 + bx + c = 0$$

cînd $b = 0$. Această ecuaţie se va putea scrie sub forma (5), unde facem pe $b = 0$:

$$\left(x^2 + \frac{\alpha x}{2} + \alpha\right)^2 = \left(2\alpha + \frac{a^2}{4}\right)x^2 + a\alpha x + \alpha^2 - c \qquad (11)$$

cu rezolvanta

$$8\,\alpha^3 - 8\,x\alpha - a^2c = 0 \qquad (12)$$

Ecuaţia (12) va avea rădăcină $\alpha = -1$, dacă coeficienţii ecuaţiei $x^4 + ax^3 + c = 0$ vor satisface condiţia : $8c - a^2c = 8$. În acest caz, folosindu-ne de ecuaţia (11) ecuaţia dată $x^4 + ax^3 + c = 0$ se va putea pune sub forma

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x - 1\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{a^2 - 8}}{2}x - \frac{a}{\sqrt{a^2 - 8}}\right)^2 \qquad (13)$$

şi se va rezolva cu două ecuaţii de gradul al II-lea.

Exemplu. Să se rezolve ecuaţia

$$x^4 + 3x^3 - 8 = 0$$

Coeficienţii îndeplinesc condiţia de mai sus şi deci, se poate rezolva ecuaţia folosind forma (13) ; avem

$$\left(x^2 + \frac{3}{2}x - 1\right)^2 = \pm\left(\frac{1}{2}x - 3\right)^2$$

de unde obţinem ecuaţiile :

$$x^2 + x + 2 = 0 \quad \text{şi} \quad x^2 + 2x - 4 = 0$$

care ne vor da rădăcinile :

$$\frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{7}) \quad \text{şi} \quad -1 \pm \sqrt{5}.$$

17. Generalizarea unei sume trigonometrice

În G. M. —B 7/1964 în nota intitulată *Stabilirea unei identități trigonometrice* este calculată valoarea sumei

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(k-1)k\sin\alpha_k}{\sin(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{k-1})\sin(\alpha_1+\alpha_2+\ldots\alpha_k)}$$

pentru $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=\frac{\pi}{3}$.

Vom calcula aceeași sumă pentru $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=\alpha$ oarecare.

Considerăm triunghiul AB_0B_n, în care $AB_0=AB_n=1$ și unghiul $\sphericalangle B_0AB_n=\alpha$ (oarecare). Împărțim latura B_0B_n în n părți egale, astfel încît $B_0B_1=B_1B_2=\ldots=B_{n-1}B_n$.

De asemenea notăm unghiurile $B_{i-1}AB_i=\alpha_i$, unde $i=1,2,\ldots,n$.

Se observă că

$$S_{AB_0B_n}=\sum_{i=1}^{n} S_{AB_{i-1}B_i} \text{ sau :}$$

$$\frac{AB_0\cdot AB_n\cdot\sin\alpha}{2}=\frac{1}{2}\sum_{1}^{n} AB_{i-1}\cdot AB_i\cdot\sin\alpha_i$$

unde cu S am notat suprafața triunghiurilor notate la indici.

Aplicînd teorema sinusurilor în triunghiurile AB_0B_i ($i=1,2,\ldots,n-1$) avem pe rînd :

$$\frac{AB_1}{\sin\alpha}=\frac{B_0B_1}{\sin\alpha_1},\quad \frac{AB_2}{\sin\alpha'}=\frac{B_0B_2}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)},\ldots,$$

$$\frac{AB_{n-1}}{\sin\alpha'}=\frac{B_0B_{n-1}}{\sin(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1})},\ldots$$

unde cu α' am notat unghiul AB_0B_n.

Însă, $\sphericalangle\alpha'=\sphericalangle AB_0B_n=\frac{1}{2}(180^\circ-\alpha)=90^\circ-\frac{\alpha}{2}$

Rezultă

$$\sin\alpha'=\sin\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=\cos\frac{\alpha}{2}$$

deci avem :

$$AB_1=B_0B_1\cdot\frac{\cos\alpha/2}{\sin\alpha_1};\qquad AB_2=B_0B_2\cdot\frac{\cos\alpha/2}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)},\ldots,AB_{n-1}=$$

$$=B_0B_{n-1}\cdot\frac{\cos\alpha/2}{\sin(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1})}$$

Putem deci să scriem :

$$AB_k = B_0B_k \cdot \frac{\cos \alpha/2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k)}.$$

Se observă că

$$B_0B_n = 2AB_0 \sin \frac{\alpha}{2} = 2 \sin \frac{\alpha}{2}$$

şi deci, că

$$B_0B_1 = \frac{B_0B_n}{n} = \frac{2}{n} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \text{ şi încă : } B_0B_k = \frac{2k}{n} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$$

Deci,

$$AB_k = \frac{2k}{n} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\cos \alpha/2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k)} = \frac{k \cdot \sin \alpha}{n \cdot \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k)}$$

Înlocuind valorile găsite în relaţia găsită cu ajutorul ariilor avem :

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \sin \alpha = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1) \sin \alpha \cdot k \cdot \sin \alpha \cdot \sin \alpha_k}{n \cdot \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{k-1}) n \cdot \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k)}$$

sau :

$$\sin \alpha = \frac{1}{n} \sin \alpha + \sum_{k=2}^{n} \frac{(k-1) k \cdot \sin^2 \alpha \cdot \sin \alpha_k}{n^2 \cdot \sin(\alpha_1 + \ldots + \alpha_{k-1}) \cdot \sin(\alpha_1 + \ldots + \alpha_k)}$$

şi mai departe :

$$\frac{\sin \alpha}{n^2} \sum_{k=2}^{n} \frac{(k-1) k \cdot \sin \alpha_k}{\sin(\alpha_1 + \ldots + \alpha_{k-1}) \sin(\alpha_1 + \ldots + \alpha_k)} = \frac{n-1}{n}.$$

Deci :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{(k-1) k \cdot \sin \alpha_k}{\sin(\alpha_1 + \ldots + \alpha_{k-1}) \sin(\alpha_1 + \ldots + \alpha_k)} = \frac{n(n-1)}{\sin \alpha}$$

Pentru $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \frac{\pi}{3}$ avem :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{(k-1) k \cdot \sin \alpha_k}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{k-1}) \cdot \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k)} = \frac{2\sqrt{3} \cdot n(n-1)}{3},$$

rezultatul obţinut în nota matematică din *G.M. — B*, 7/1964.

Ion N. Blană, elev L. 2 Constanţa

18. Asupra problemelor 6641, 6906 și 6919

În cele ce urmează ne propunem să demonstrăm cîteva relații între numerele reale și pozitive și să indicăm unele aplicații ale acestora

1. Dacă a_i $(i = 1,2,\ldots,m)$ sînt numere reale și pozitive atunci :

$$\left(\frac{a_1^{\frac{1}{n}} + a_2^{\frac{1}{m}} + \ldots + a_m^{\frac{1}{n}}}{m}\right)^n \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}{m} \leqslant \left(\frac{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_m^n}{m}\right)^{\frac{1}{n}} \tag{1}$$

Pentru demonstrarea acestei duble inegalități folosim inegalitatea (1) din G.M. — B nr. 8/1964, p. 384. Dacă în inegalitatea amintită facem $a_1^j = a_j$ și $a_2^j = a_3^j = \ldots = a_n^j = 1$, atunci obținem :

$$\sqrt[n]{m^{n-1} \sum_{j=1}^{m} a_j} \leqslant \sum_{j=1}^{m} \sqrt[n]{a_j}$$

sau

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}{m} \geqslant \left(\frac{a_1^{\frac{1}{n}} + a_2^{\frac{1}{n}} + \ldots + a_m^{\frac{1}{n}}}{m}\right)^n \tag{2}$$

Inegalitatea (2) după înlocuirea $a_j = b_j^n$, $(j = 1,2,\ldots,\mathrm{m})$ devine :

$$\frac{b_1^n + b_2^n + \ldots + b_m^n}{m} \geqslant \left(\frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_m}{m}\right)^n \tag{3}$$

sau

$$\left(\frac{b_1^n + b_1^n + \ldots + b_m^n}{m}\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant \frac{\mathrm{b_1 + b_2 + \ldots + b_m}}{m} \tag{4}$$

Inegalitatea (4) este valabilă pentru oricare grup de m numere reale și pozitive așa că, dacă numerele b_j le vom înlocui cu a_j și vom compara noul rezultat cu (2) vom obține inegalitatea cerută. Din demonstrație rezultă că (1) este valabilă pentru orice număr natural n. Inegalitățile (2) și (4) și deci și (1) mai pot fi demonstrate și altfel. Este ușor de văzut că, pentru orice număr real $n \geqslant 1$ și x pozitiv, funcția $f_1(x) = x^n$ este convexă iar funcția $f_2(x) = x^{\frac{1}{n}}$ este concavă și deci, pentru un grup de m valori pozitive ale variabilei x, a_j $(j = 1, 2,\ldots,m)$ sînt adevărate inegalitățile :

$$\frac{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_m^n}{m} \geqslant \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}{m}\right)^n \tag{5}$$

$$\frac{a^{\frac{1}{n}} + a_2^{\frac{1}{n}} + \ldots + a_m^{\frac{1}{n}}}{m} \leqslant \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}{m}\right)^{\frac{1}{n}} \tag{6}$$

Inegalitățile (5) și (6) după mici modificări coincid cu (2) și (4) și deci, (1) este demonstrată. Dacă $0 < n < 1$ atunci $f_1(x)$ este concavă iar $f_2(x)$ este convexă. În acest caz inegalitățile (1) trebuiesc înlocuite cu inegalități de sens contrar. Din această demonstrație rezultă că (1) este valabilă pentru orice $n \geqslant 1$ real.

2. În aceleași condiții ca mai sus poate fi demonstrată inegalitatea,

$$\frac{a_1^{-\frac{1}{n}} + a_2^{-\frac{1}{n}} + \ldots + a_m^{-\frac{1}{n}}}{m} \geqslant \left(\frac{a_1 + a_1 + \ldots + a_m}{m}\right)^{-\frac{1}{n}} \tag{7}$$

Este evidentă următoarea relație:

$$\left(\frac{a_1^{-\frac{1}{n}} + a_2^{-\frac{1}{n}} + \ldots + a_m^{-\frac{1}{n}}}{m}\right)^n \geqslant \left(\sqrt[m]{\frac{a_1^{-\frac{1}{n}} \quad a_2^{-\frac{1}{n}} \quad \ldots \quad a_m^{-\frac{1}{n}}}{m}}\right)^n \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\sqrt[m]{a_1 \cdot a_2 \ldots a_m}}. \tag{8}$$

de asemenea

$$\sqrt[m]{a_1 \cdot a_2 \ldots a_m} \leqslant \frac{1}{m}(a_1 + a_2 + \ldots + a_m) \tag{9}$$

Din (8) și (9) se poate obține ușor relația (7). Dacă în inegalitatea (7) vom înlocui $n = 1$ și o vom pune sub formă convenabilă obținem:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_m} \geqslant \frac{m^2}{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}$$

Dacă în (7) $m = 3$, $n = 2$, $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a_3 = c$ și $a + b + c = 1$ atunci găsim:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}} \geqslant 3\sqrt{3}$$

relație care formează enunțul problemei 6641 din G.M.—B nr. 12/1964. Dacă în inegalitatea (7) $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_m = 1$ iar $n = 2^k$ avem:

$$a_1^{-2^{-k}} + a_2^{-2^{-k}} + \ldots + a_m^{-2^{-k}} \geqslant m^{1+2^{-k}} \tag{10}$$

Demonstrăm că, $m^{1+2^{-k}} \geqslant 1 + m^{2^{-k}}$ (11)

Inegalitatea (11) mai poate fi scrisă și sub forma,

$$(m-1)\, m^{2^{-k}} \geqslant 1$$

Această inegalitate este evidentă deoarece, pentru $m \geqslant 2$ întotdeauna $m^{2^{-k}} \geqslant 1$, și $m-1 \geqslant 1$. Deci inegalitatea (11) este adevărată pentru oricare număr natural $m < 2$. Comparînd (10) și (11) putem scrie :

$$a_1^{-2^{-k}} + a_2^{-2^{-k}} + \ldots + a_m^{-2^{-k}} \geqslant 1 + m^{2^{-k}}.$$

Această inegalitate formează enunțul problemei 6906 din G.M.—B nr. 5/1965.

3. Mai departe demonstrăm inegalitatea

$$\frac{a_1^{-n} + a_2^{-n} + \ldots + a_m^{-n}}{m} \geqslant \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}{m}\right)^{-n} \tag{12}$$

În inegalitatea (1) în loc de a_i considerăm numerele $\frac{1}{a_i}$, $(i=1, 2, \ldots, m)$ și avem :

$$\frac{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \ldots + a_n^{-1}}{m} \leqslant \left(\frac{a_1^{-n} + a_2^{-n} + \ldots + a_m^{-n}}{m}\right)^{\frac{1}{n}}; \tag{13}$$

dar

$$\frac{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \ldots + a_m^{-1}}{m} \geqslant \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}{m}\right)^{-1}. \tag{14}$$

Din (13) și (14) se obține ușor (12).

4. Demonstrăm următoarea inegalitate :

$$(a_1^{-n} + a_2^{-n} + \ldots + a_m^{-n})(a_1^n + a_2^n + \ldots + a_m^n) \geqslant m^2 \tag{15}$$

Din (12) și (1) se deduce

$$\frac{a_1^{-n} + a_2^{-n} + \ldots + a_m^{-n}}{m} \geqslant \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}{m}\right)^{-n} \geqslant \left(\frac{a_n^1 + a_2^n + \ldots + a_m^n}{m}\right)^{-1}$$

De aici este evidentă inegalitatea cerută.

5. În continuare demonstrăm inegalitatea :

$$\left(\frac{1}{a_1^{\frac{1}{n}}} + \frac{1}{a_2^{\frac{1}{n}}} + \ldots + \frac{1}{a_m^{\frac{1}{n}}}\right)^n \geqslant \frac{m^{n+\frac{1}{n}}}{(a_1^n + a_2^n + \ldots + a_m^n)^{\frac{1}{n}}} \tag{16}$$

Inegalitatea (7) ne permite să scriem :

$$\left(\frac{a_1^{-\frac{1}{n}} + a_2^{-\frac{1}{n}} + \ldots + a_m^{-\frac{1}{n}}}{m}\right)^n \geqslant \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}{m}\right)^{-1} \tag{17}$$

Din (1) se poate deduce :

$$\left(\frac{a_1 + a_2 \cdots + a_m}{m}\right)^{-1} \geqslant \left(\frac{a_1^n + a_2^n + \cdots a_m^n}{m}\right)^{-\frac{1}{n}} \tag{18}$$

Comparînd (17 şi (18) rezultă că (16) este adevărată.

6. Dacă în (1) din G.M. — B/1964, p. 384 se face înlocuirea $n = 2p$, atunci putem scrie :

$$\left(\sum_{j=1}^{m} a_1^j \sum_{j=1}^{m} a_2^j \cdots \sum_{j=1}^{m} a_{2p}^j\right)^{\frac{1}{2p}} \geqslant \left(a_1^1 \cdot a_2^1 \ldots a_{2p}^1\right)^{\frac{1}{2p}} + \cdots + \left(a_1^m \cdot a_2^m \ldots a_{2p}^m\right)^{\frac{1}{2p}} \quad (19)$$

Dacă în (19) se fac înlocuirile :

$$a_1^j = A_1^j x_1^j ; \quad a_2^j = \frac{B_1^j}{x_1^j}; \quad a_{2p-1}^j = A_p^j x_p^k ; \quad a_{2p}^j = \frac{B_p^j}{x_p^j}.$$

$$\left(\sum_{j=1}^{m} A_1^j x_1^j \cdot \sum_{j=1}^{m} \frac{B_1^j}{x_i^j} \cdot \cdots \cdot \sum_{j=1}^{m} A_p^j x_p^j \sum_{j=1}^{m} \frac{B_p^j}{x_p^j}\right)^{\frac{1}{2p}} \geqslant (A_1^1 A_1^1 \cdot \cdots \cdot A_p^1 B_p^1)^{\frac{1}{2p}} + \cdots$$

$$\cdots + (A_1^m B_1^m \cdots A_p^m B_p^m)^{\frac{1}{2p}} \quad (20)$$

Această inegalitate generalizează problema 6919 din G.M.—B. 5/1965. Dacă $A_1^j = a_j$, $B_1^j = b_i$, $x_1^j = x_j$ iar $p = 1$ atunci din (20) se obţine :

$$\sum_{j=1}^{m} a_j x_j \cdot \sum_{j=1}^{m} \frac{b_j}{x_j} \geqslant \left(\sum_{j=1}^{m} \sqrt{a_j b_j}\right)^2 \quad (21)$$

Această relaţie coincide cu enunţul problemei amintite. Dacă în inegalitatea (21) în loc de numerele a_j şi b_j vom lua a_j^{k+p} şi a_j^{k-p} şi dacă $x_{j=1}\,(y = 1, 2, \ldots, m)$, atunci avem :

$$(a_1^{k+p} + a_2^{k+p} + \ldots + a_m^{k+p})(a_1^{k-p} + a_2^{k-p} + \ldots + a_m^{k-p}) \geqslant (a_1^k + a_2^k + \ldots + a_m^k)^2$$

Această inegalitate a făcut obiectul problemei 4482 din G.M.G.—B nr. 12/1960.

7. Demonstrăm următoarele inegalităţi :

$$\operatorname{cosec}^n \alpha_1 + \operatorname{cosec}^n \alpha_2 + \ldots + \operatorname{cosec}^n \alpha_m \geqslant m \operatorname{cosec}^n \alpha \quad (22)$$

$$\operatorname{cosec}^{\frac{1}{n}} \alpha_1 + \operatorname{cosec}^{\frac{1}{n}} \alpha_2 + \ldots + \operatorname{cosec}^{\frac{1}{n}} \alpha_m \geqslant m \operatorname{cosec}^{\frac{1}{n}} \alpha \quad (23)$$

unde

$\alpha = \dfrac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \alpha_j$, iar $\alpha_j\ (j = 1, 2, \ldots, m)$ sînt arce arbitrare în intervalul $(0, \pi)$.

Din inegalitatea (12) se poate deduce :

$$\left(\frac{a_1^{-n} + a_2^{-n} + \ldots + a_m^{-n}}{m}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}{m}$$

Făcînd înlocuirea $a_j = \sin \alpha_j$ și ținînd cont de inegalitatea

$$\frac{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \ldots + \sin \alpha_m}{m} \leqslant \sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m}{m} \tag{24}$$

obținem :

$$\left(\frac{\sin^{-n} \alpha_1 + \sin^{-n} \alpha_2 + \ldots + \sin^{-n} \alpha_m}{m}\right)^{-\frac{1}{n}} \leqslant \sin \alpha \tag{25}$$

De aici se obține ușor (22). Dacă în inegalitatea (7) facem înlocuirea de mai sus și ținem cont de (24) obținem inegalitatea (23).

Multe din inegalitățile demonstrate, particularizate într-un fel sau altul conduc la o serie de inegalități interesante care există între elementele unui triunghi.

Ioan I. Munteanu, student Leningrad

19. Asupra unor aplicații ale inegalității lui Jensen

Plecînd de la inegalitatea lui Jensen

$$f\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n} r_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} r_k}\right\} \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} r_k \cdot f(x_k)}{\sum_{k=1}^{n} r_k} \tag{1}$$

unde r_k sînt numere pozitive arbitrare, x_k puncte aparținînd unui interval E, $(k = 1, 2, \ldots, n)$, iar $f : R \to R$ o funcție *convexă*.

(În cazul funcțiilor *concave*, semnul inegalității (1) se schimbă.)

Vom deduce o seamă de relații interesante.

1. Scriem (1) sub forma

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} q_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} q_k f(x_k) \tag{2}$$

unde $q_k > 0$ și $\sum_{k=1}^{n} q_k = 1$.

În (2) făcînd

$$q_k = \frac{1}{n} \quad (n \text{ fiind număr natural})$$

obținem :

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n} \tag{3}$$

Funcţia $f(x) = x^p$, unde $x < 0$ este convexă pe domeniul ei de definiţie. Deci, aplicînd inegalitatea (3) funcţiei $f(x) = x^p$ obţinem : sau :

$$\left[\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}\right]^p \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k^p}{n} \quad \text{sau :}$$

$$\sqrt[p]{\frac{x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p}{n}} \geqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \tag{4}$$

Pentru $n = 2$ şi $p = 2, 3$, (4) se transformă în inegalităţile problemei 6007.

2. În cazul funcţiilor concave, (3) devine :

$$\frac{\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \ldots + \varphi(x_n)}{n} \leqslant \varphi\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \tag{5}$$

Funcţia
$\sin^u y = \varphi(y)$, unde $0 < u \leqslant 1$; $y \in (o, \pi)$ este *concavă*, deci, aplicîndu-i inegalitatea (5) obţinem :

$$\frac{\sin^u y_1 + \sin^u y_2 + \ldots + \sin^u y_n}{n} \leqslant \sin^u\left(\frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n}\right) \tag{6}$$

Dacă $y_i = A_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sînt unghiurile unui poligon convex (6) se transformă în :

$$\sin^u A_1 + \sin^u A_2 + \ldots + \sin^u A_n \leqslant n \sin^u\left(\frac{360^\circ}{n}\right),$$

deoarece $\sum_{i=1}^{n} A_i = 180^\circ (n-2)$. Egalitatea are loc cînd $A_1 = A_2 = \ldots = A_n$.

În general putem scrie :

$$\sum_{i=1}^{n} \sin\frac{u A_i}{k} \leqslant n \sin^n\left(\frac{180^\circ}{k} - \frac{360^\circ}{nk}\right) \tag{7}$$

unde k este număr natural.

Pentru $u = \frac{1}{\lambda}$ (λ — număr natural), obţinem inegalitatea :

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt[\lambda]{\sin\frac{A_i}{k}} \leqslant n \sqrt[\lambda]{\sin\left(\frac{180^\circ}{k} - \frac{360^\circ}{nk}\right)} \tag{8}$$

Făcînd în (8), $k = 1$ şi $\lambda = 2$ obţinem inegalitatea :

$$\sqrt{\sin A_1} + \sqrt{\sin A_2} + \ldots + \sqrt{\sin A_n} \leqslant n \sqrt{\sin\frac{360^\circ}{n}} \tag{9}$$

adică, tocmai inegalitatea problemei *6500*.

Pentru $A_1 = A$; $A_2 = B$; $A_3 = C$ şi $n = 3$ obţinem tocmai inegalitatea problemei *5696*, A, B, C fiind unghiurile unui triunghi.

3. Dacă ţinem seamă de inegalitatea între numere pozitive :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geqslant n^2 \tag{10}$$

şi de inegalitatea (7) obţinem, înlocuind $x_i = \sin n\frac{A_i}{k}$

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{cosec} \frac{nA_i}{k} \geqslant \frac{n}{\sin^n\left(\frac{180^\circ}{k} - \frac{360^\circ}{nk}\right)} \tag{11}$$

Pentru $n = 3$, $k = 2$, $n = 1$ iar $A_1 = A$; $A_2 = B$; $A_3 = C$ obţinem problema *6378*.

4. Funcţia $tg^\beta x$ este convexă pentru $\beta \geqslant 1$, $x \in \left(0\,;\, \frac{\pi}{2}\right)$

Ţinînd seamă de (3) scriem :

$$\frac{\operatorname{tg}^\beta x_1 + \operatorname{tg}^\beta x_2 + \operatorname{tg}^\beta x_3}{3} \geqslant \operatorname{tg}^\beta\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right) \tag{12}$$

Făcînd în (12), $x_1 = \frac{A}{2}$; $x_2 = \frac{B}{2}$; $x_3 = \frac{C}{2}$, (A, B, C fiind unghiurile unui triunghi), avem :

$$\operatorname{tg}^\beta \frac{A}{2} + \operatorname{tg}^\beta \frac{B}{2} + \operatorname{tg}^\beta \frac{C}{2} \geqslant (\sqrt{3})^{2-\beta} \tag{13}$$

În sfîrşit, făcînd în (13) $\beta = 6$ obţinem inegalitatea

$$\operatorname{tg}^6 \frac{A}{2} + \operatorname{tg}^6 \frac{B}{2} + \operatorname{tg}^6 \frac{C}{2} \geqslant \frac{1}{9}$$

adică tocmai ceea ce se cerea în problema *6603*.

Cornel Popovici, student I. P. Timişoara

PROBLEME REZOLVATE

Problema 7032

Un trapez înscris într-un cerc are baza mică AB fixă, văzută din centrul cercului sub un unghi de 2α (constant). Să se determine înălţimea trapezului cînd aria sa devine maximă.

Kurta Ferenc, student, Iaşi

Soluție.
Luăm ca variabilă independentă pe x ($x = \sphericalangle FOC$).

Din $\Delta\ AEO$: $AE = EB = r\sin\alpha$; $AB = 2r\sin\alpha$; $EO = r\cos\alpha$
Din $\Delta\ DOF$: $DF = FC = r\sin\alpha$; $DC = 2r\sin x$; $OF = r\cos x$

$$A(x) = \frac{B+b}{2} \cdot h = \frac{AB+DC}{2} \cdot EF;$$

$A(x) = r^2(\sin x + \sin\alpha)(\cos x + \cos\alpha) = r^2[\sin x\cos x + \sin(x+\alpha) + \sin\alpha\cos\alpha]$; $A'(x) = \frac{dA(x)}{dx} = r^2[\cos^2 x - \sin^2 x + \cos(x+\alpha)]$. Pentru ca aria să fie extremă punem condiția $A'(x) = 0$, cum $r \neq 0$ rezultă că:

$\cos^2 x - \sin^2 x + \cos(x+\alpha) = 0$, punem $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$,

deci $\cos 2x + \cos(x+\alpha) = 0$; transformăm în produs aplicînd formula

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2};\ \cos 2x + \cos(x+\alpha) =$$

$$= 2\cos\frac{3x+\alpha}{2} \cdot \cos\frac{x-\alpha}{2},$$

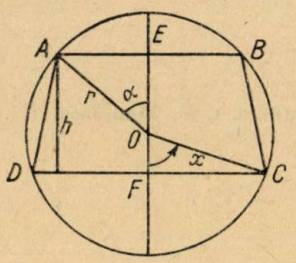
Avem condițiile:

$$\cos\frac{3x+\alpha}{2} = 0,\quad x = \frac{\pi-\alpha}{3} \quad \left(\text{am pus } \frac{3x+\alpha}{2} = \frac{\pi}{2}\right);$$

cazul $\cos\frac{x-\alpha}{2} = 0$ îl înlăturăm pentru că ne dă $x = \pi + \alpha$, imposibil;

$$\frac{3x+\alpha}{2} = \frac{3\pi}{2};\ x = \pi - \frac{\alpha}{3}.$$

Avem



x		$\frac{\pi-\alpha}{3}$		$\pi - \frac{\alpha}{3}$	
$A'(x)$	$+$	$\overset{0}{M}$	$-$	$\overset{0}{m}$	$+$

Deci pentru $x = \frac{\pi-\alpha}{3}$ aria trapezului este maximă. Atunci h — înălțimea devine

$$EF = h = r(\cos x + \cos\alpha) = r\left[\frac{\sqrt{3}+1}{2}\cos\frac{\alpha}{3} + \cos\alpha\right]$$

am pus $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Problema 7033

Să se determine m, m, p, q astfel ca :

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{mx^3+(n+2)\,x^2+14} - \sqrt[3]{nx^3+2x^2-3}$ *să fie egală cu 1.*

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(p+\dfrac{qx}{x^2-1}\right)^x = e^2.$

Ioana Iancu, studentă Iaşi

Soluţie.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{mx^3+(n+2)x^2+15} - \sqrt[3]{nx^3+2x^2-3} =$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{mx^3+(n+2)\,x^2+14-nx^3-2x^2+3}{\sqrt[3]{[mx^3+(n+2)x^2+14]^2}+\sqrt[3]{[mx^3+(n+2)x^2+14](nx^3+2x^2-3)}+\sqrt[3]{(nx^3+2x^2-3)^2}} = 1$$

Pentru că gradul numărătorului este 3 iar gradul numitorului este 2, $m-n=0$ (pentru a avea limita finită)

În acest caz limita este :

$$\frac{n}{m^2+mn+n^2}=1,\ n=m^2+mx+n^2,\ m-n=0,$$

$$\frac{m}{3m^2}=1,\ m\neq 0,\ \frac{1}{3m}=1\ ;\ m=n=\frac{1}{3}$$

b) $p>1\ ;\lim\limits_{x\to\infty}\left(m+\dfrac{nx}{x^2-1}\right)^x=+\infty$

$$p<1\ ;\lim_{x\to\infty}\left(m+\frac{nx}{x^2-1}\right)^x=0$$

$$p=1\ ;\ \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{q}{\frac{x^2-1}{x}}\right)^{\frac{x^2-1}{x}}\right]^{\frac{x}{x^2-1}} = e^q = e^2,\ q=2.$$

Problema 7036

Pe laturile BC, CA, AB ale unui triunghi se iau în acelaşi sens punctele D, E, F care împart laturile în raportul $\frac{1}{3}$ şi simetricele faţă de mijloacele laturilor pe care sînt situate. D', E', F'. Segmentele AD, BE şi CF se taie, două cîte două în punctele K, L, M. Să se arate :

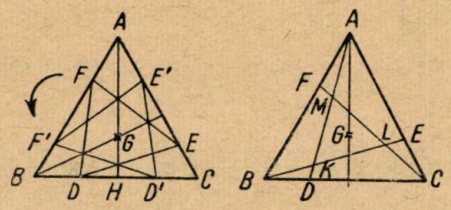
Triunghiurile ABC, DEF, $D'E'F'$, KLM au acelaşi centru de greutate şi că noţiunea de centru de greutate e o noţiune afină.

$$2\cdot MK = 2AM = 8KD$$

D. Rimer, Iaşi

Soluție. Toate noțiunile din problemă sînt afine. De aceea vom face demonstrație pe un triunghi echilateral.

Dăm figurii o rotație de 120° în jurul centrului de greutate G. Vom avea : $A \equiv B$, $B \equiv C$, $C \equiv A$, $F \equiv D$, $F' \equiv D'$, $D \equiv E$, $D' \equiv E'$, $E \equiv F$, $E' \equiv F'$, $K \equiv L$, $L \equiv M$, $M \equiv K$.



Deci triunghiurile DEF, $D'E'F'$ și KLM sînt de asemenea echilaterale. Centrul de greutate este o noțiune afină, întrucît raportul simplu este un invariant afin ; or, avem raportul $\frac{1}{2}$.

1. $AG = EG$; dar $DG = EG = GF$ (prin rotație) ; analog $D'G = E'G = F'G$ precum și $KG = LM = MG$. Deci G este centrul cercurilor circumscrise acestor triunghiuri echilaterale și, în același timp e centrul de greutate al lor. Urmează că și în triunghiul oarecare ABC, și în triunghiurile formate în el, G este centru de greutate c.t.d.

2. Dacă latura triunghiului echilateral ABC este l, urmează : $AD = \frac{\sqrt{13}}{4} l$; cum triunghiurile ABD și AMF sînt aseemenea (BAD comun iar $\sphericalangle ABD = \sphericalangle AMF = 60°$), urmează : $AM = \frac{1}{\sqrt{l_3}} l$, $MF = \frac{1}{4\sqrt{l_3}} l$, $MK = AD - (AM + DK) = \frac{2}{\sqrt{l_3}} l$, deci : $MK = 2AM = 8KD$. Cum raportul lungimilor segmentelor se păstrează prin afinitate, relația rămîne adevărată și în cazul triunghiului oarecare.

Problema 7042

Să se găsească toate matricile pătratice de ordinul doi care verifică ecuația $X^2 = X$. *Să se arate că o matrice* X *este soluție dacă și numai dacă* $I - X$ *este soluție* ($I = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$). *Să se arate că dacă* X_1 *și* X_2 *sînt soluții atunci* $X_1 + X_2$ *este soluție dacă și numai dacă* $X_1X_2 = X_2X_1 = 0$ *unde* $0 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(A se vedea articolul „Matrici" de I. Hitzig din G. M. seria B (nr. 7,1964).

N. Gheorghiu, Iași

Soluția autorului. Fie matricea X de forma $\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ u & v \end{smallmatrix}\right)$. Relația $X^2 = X$ se scrie

$$\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ u & v \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ u & v \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ u & v \end{smallmatrix}\right) \text{ sau } \left(\begin{smallmatrix} x^2+uy & (x+v)y \\ (x+v)u & uy+v^2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ u & v \end{smallmatrix}\right)$$

şi egalînd element cu element se obţine sistemul

$$(1)\quad \begin{cases} x^2 + uy = x \\ (x+v)y = y \\ (x+v)\,u = u \\ v^2 + uy = b \end{cases}$$

Aşa dar, condiţia necesară şi suficientă ca matricea X să verifice ecuaţia $X^2 = X$ este ca elementele sale să verifice sistemul (1).

Putem deosebi între aceste matrici :

a) matricea unitatea $I = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$

b) matricea nulă $0 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$

c) matricile ale căror elemente verifică sistemul

$$\begin{aligned} x^2 + uy &= x \\ x + v &= 1 \end{aligned} \qquad (1')$$

Să presupunem acum că X este o soluţie. Avem prin urmare : $(I - X)^2 = (I - X)\ (I - X) = I^2 - I.X - X.I + X^2 = I - X$, deci şi $I - X$ este o soluţie.

Dacă $I - X$ este soluţie, atunci şi $I - (I - X) = X$ este soluţie.

Fie acum două soluţii X_1 şi X_2. Vom avea :

$$(X_1 + X_2)^2 = X_1^2 = X_1 \cdot X_2 + X_2 \cdot X_1 + X_1^2 = X_1 + X_2 + (X_1X_2 + X_2X_1)$$

Pentru ca $X_1 = X_2$ să fie soluţie este necesar şi suficient ca $X_1X_2 + X_2X_1 = 0$ (dacă $X_1^2 = X_1$ şi $X_2^2 = X_2$). Însă înmulţind această relaţie la stînga cu X_1, obţinem $X_1X_2 + X_1X_2X_1 = 0$ sau $X_1X_2 - (X_2X_1)X_1 = 0$ deci şi $X_1X_2 - X_2X_1 = 0$. Această relaţie împreună cu $X_1X_2 + X_2X_1 = 0$ conduce imediat la $X_1X_2 = X_2X_1 = 0$.

Problema 7077

Unghiul A al triunghiului ABC este cu $15°$ mai mic decît unghiul B şi cu $15°$ mai mare decît unghiul C.

Să se arate că :

a) $3AB^2 = 2BC^2$

b) *aria* $ABC = \dfrac{(3+\sqrt{3})AB^2}{8}$.

Corneliu Georgescu, Craiova

Soluţie.

a) $B = 15° + A$; $C = A - 15°$;

$A + (15° + A) + (A - 15°) = 180°$; $A = 60°$; $B = 75°$; $C = 45°$.

AB este latura patratului înscris în cercul ABC, deci $AB = R\sqrt{2}$; BC este latura triunghiului echilateral înscris în acelaşi cerc, deci $BC = R\sqrt{3}$. Ridicînd la patrat aceste două egalităţi, avem $AB^2 = 2R^2$ şi $BC^2 = 3R^2$ de unde : $3AB^2 = 2BC^2$.

b) Ducem înălțimea BB' și observăm că, în triunghiul dreptunghic ABB', cu unghiul din B de 30°, $AB' = \frac{AB}{2}$, iar triunghiul dreptunghic BCB' este isoscel și $BC^2 = 2BB'^2$, adică

$BB' = \frac{BC\sqrt{2}}{2} = CB'$, dar s-a văzut mai sus că $BC = \frac{AB\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ și atunci $CB' = \frac{AB\sqrt{3}}{2}$ și $AC = CB' + B'A = \frac{AB(\sqrt{3}+1)}{2}$.

Aria $ABC = \frac{AC \cdot BB'}{2} = \frac{AB^2(3+\sqrt{3})}{8}$.

Problema 7078

Fie dată ecuația

$$x^2 - 4a^2x + 2p + 8 = 0 \ (p \text{ întreg diferit de } -4).$$

Să se determine întregul p așa ca a să fie un număr rațional diferit de zero și

$$\frac{4\sqrt{x_1+x_2}}{x_1+x_2} + \frac{\sqrt{x_1+x_2}}{x_1x_2} = \frac{4p}{x_1x_2},$$

unde x_1, x_2 sînt rădăcinile ecuației date.

P. Stavre, Craiova

Soluție.

Cum $x_1 + x_2 = 4a^2$, relația de mai sus se scrie

$$\frac{2|a|}{a^2} + \frac{2|a|}{2p+8} = \frac{4p}{2p+8}, \text{ cu } p \neq -4. \tag{1}$$

Avem $|a|(2p + 8 + a^2) = 2a^2p$. Cum $a \neq 0$ putem scrie

$$\begin{aligned} a^2 - 2ap + 2p + 8 &= 0, \quad \text{dacă} \quad a > 0, \\ a^2 + 2ap + 2p + 8 &= 0, \quad \text{dacă} \quad a < 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Sau global

$$a^2 - 2\varepsilon pa + 2p + 8 = 0, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

De unde

$$a = \varepsilon p \pm \sqrt{p^2 - 2p - 8}.$$

Cum $a \neq 0$ și rațional, trebuie să avem

$$p^2 - 2p - 8 = 0 \text{ sau } p^2 - 2p - 8 = q^2, \ (q \text{ întreg})$$

În primul caz, obținem $p = 4$, $p = -2$ (care nu convine ecuațiilor (2). Deci $a = 4$; $a = -4$ (care convine).

În al doilea caz trebuie ca $(p-1)^2 - 3^2 = q^2$ și deci $|p-1| > |q|$ iar $|p-1|$; 3; $|q|$ să fie numere pitagorice.

Adică $|p-1|=5$ și deci $p=6, p=4$ (care nu convine) $|q|=4$. Deci $a=\frac{\varepsilon p \pm |q|}{1}$ sau $p=6, a=2$ sau 10, $(\varepsilon \neq 1)$ $p=6$, $a=-2$ sau $a=-10$ (dacă $\varepsilon=-1$).

Problema 7081

Să se arate că expresia $E=n^6+34\,n^4+n^2$ este divizibilă prin 36, n fiind număr natural.

Marica Ștefan, Tr. Severin

Soluție.

$$E=n^6+34n^4+n^2=n^6-2n^4+n^2+36n^4=$$
$$=n^2(n^4-2n^2+1)+36n^4=n^2(n^2-1)^2+36n^4=$$
$$=[(n-1)\,n(n+1)]^2+36n^4=M36+M36=M36.$$

Problema 7082

Fiind date segmentele a, b, c, d să se construiască expresia :

$$x=\frac{d(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}{abc(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}.$$

Popescu Eleodor, elev, Tr. Severin

Soluția autorului. În triunghiul ABC de laturi a, b, c ducem înălțimile AA', BB' și CC' și cercul înscris care este tangent la laturile triunghiului în M, N și P.

Conform teoremei lui Pitagora generalizată avem :

$$a^2=b^2+c^2-2b\cdot AB'$$

de unde $AB'=\frac{-a^2+b^2+c^2}{2b}$

și încă relațiile analoage : $BC'=\frac{a^2-b^2+c^2}{2c}$ și $CA'=\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}$.

Mai avem :

$$BM+MC+CN+NA+AP+PB=a+b+c$$

și cum $PB=BM$, $CN=MC$, $NA=PA$ deducem ușor :

$$AM=\frac{-a+b+c}{2}$$ și încă $BM=\frac{a-b+c}{2}$; $CM=\frac{a+b-c}{2}$.

Deci :

$$\frac{AB'\cdot BC'\cdot CA'}{AN\cdot BP\cdot CM}=\frac{(-a^2+b+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}{abc(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

Deducem că :

$$x = \frac{AB' \cdot BC' \cdot CA' \cdot d}{AN \cdot BP \cdot CM}$$

expresie care se construiește ușor, prin metode cunoscute.

Problema 7085

In planul triunghiului ABC laturile AC și BC efectuează mișcări de rotație cu centrele în A și B, în sensuri diferite, fără a traversa triunghiul. Notînd AC_1 și BC_2 aceste laturi după ce s-au rotit de un același unghi α, să se determine valoarea lui α în cazul cînd punctele A, C_1, C_2, B sînt conciclice.

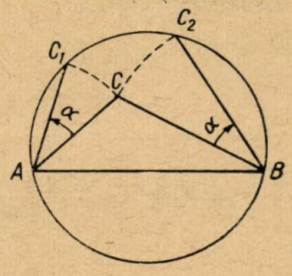
Gh. Bazacov, Tr. Severin

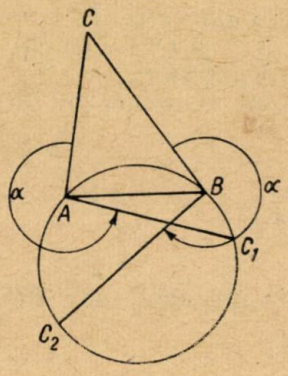
Soluție. Triunghiurile isoscele ACC_1 și BCC_2 au unghiurile egale fiindcă unghiul de la vîrf, de la fiecare, este egal cu α, deci putem scrie :

$$\sphericalangle ACC_1 = \sphericalangle AC_1C = \sphericalangle BCC_2 = \sphericalangle BC_2C = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

În cazul cerut de problemă patrulaterul AC_1C_2B trebuie să fie inscriptibil și atunci unghiurile opuse sînt suplimentare :

$$\sphericalangle C_1C_2B + A + \alpha = 180^\circ; \text{ dar } \sphericalangle C_1C_2B = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} + \sphericalangle C_2$$





și atunci $90^\circ - \frac{\alpha}{2} + C_2 + A + \alpha - 180$, de unde

$$\sphericalangle C_2 = 90^\circ - \left(A + \frac{\alpha}{2}\right).$$

În mod analog se deduce că

$$\sphericalangle C_1 = 90^\circ - \left(B + \frac{\alpha}{2}\right).$$

Am exprimat deci, în funcție de α, unghirile C_1 și C_2 de la triunghiul CC_1C_2. În acest triunghi aplicăm relația sinusului :

$$\frac{CC_1}{\sin C_2} = \frac{CC_2}{\sin C_1} \tag{1}$$

dar $CC_1 = 2b\sin\frac{\alpha}{2}$ și $CC_2 = 2a\sin\frac{\alpha}{2}$ și relația (1) devine :

$$\frac{2b\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left[90^\circ - \left(A + \frac{\alpha}{2}\right)\right]} = \frac{2a\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left[90^\circ - \left(B + \frac{\alpha}{2}\right)\right]}. \tag{2}$$

Simplificînd cu $2\sin\frac{\alpha}{2}$ și ținînd seama de arcele complementare, relația (2) ia forma :

$$\frac{b}{\cos\left(A + \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{a}{\cos\left(B + \frac{\alpha}{2}\right)} \quad \text{sau} \quad \frac{\cos\left(A + \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(B + \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{b}{a};$$

dar $\frac{b}{a} = \frac{\sin B}{\sin A}$ și atunci ajungem la ecuația trigonometrică :

$$\frac{\cos\left(A + \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(B + \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\sin B}{\sin A}. \tag{3}$$

Avem succesiv

$$\sin A\cos\left(A + \frac{\alpha}{2}\right) = \sin B\cos\left(B + \frac{\alpha}{2}\right),$$

$$\sin A\left(\cos A\cos\frac{\alpha}{2} - \sin A\sin\frac{\alpha}{2}\right) = \sin B\left(\cos B\cos\frac{\alpha}{2} - \sin B\sin\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$(\sin A\cos A - \sin B\cos B)\cos\frac{\alpha}{2} = (\sin^2 A - \sin^2 B)\sin\frac{\alpha}{2},$$

$$\frac{1}{2}(\sin 2A - \sin 2B)\cos\frac{\alpha}{2} = (\sin^2 A - \sin^2 B)\sin\frac{\alpha}{2},$$

$$2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sin(A - B)\cos(A + B)}{(\sin A - \sin B)(\sin A + \sin B)},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sin\frac{A - B}{2}\cos\frac{A - B}{2}\cdot\cos(A + B)}{4\sin\frac{A + B}{2}\cos\frac{A + B}{2}\sin\frac{A + B}{2}\cos\frac{A - B}{2}}$$

După simplificări obținem :

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos(A+B)}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}} = \frac{\cos(A+B)}{\sin(A+B)} = \operatorname{cotg}(A+B),$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}[90^\circ - (A+B)] = \operatorname{tg}[90^\circ - (180^\circ - C)] = \operatorname{tg}(C - 90^\circ).$$

Ecuația ia forma simplă :

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg}(C - 90^\circ)$$

Mulțimea de rădăcini ale acestei ecuații este :

$$\frac{\alpha}{2} = 180^\circ n + C - 90^\circ \text{ sau}$$

$$\alpha = 180^\circ (2n - 1) + 2C$$

Vom considera valorile lui α pentru care $\alpha \in (0^\circ ; 360^\circ)$ Pentru $n = 0$, $\alpha = 2C - 180^\circ$; în acest caz $\sphericalangle C > 90^\circ$, deci unghiul C este obtuz.

Pentru $n = 1$; $\alpha = 180^\circ + 2C$ și cum $\alpha < 360^\circ$ trebuie ca $\sphericalangle C$ să fie ascuțit.

În concluzie, avem cîte o soluție a problemei după cum $\sphericalangle C > 90^\circ$ sau $\sphericalangle C < 90^\circ$.

Problema 7087

Muchia cubului $ABCDA_1B_1C_1D_1$ este egală cu a. La ce depărtare de planul $ABCD$ se află punctul M situat pe diagonala DB_1 ($MD < MB_1$), dacă planul ABM împarte cubul în raportul subunitar $\frac{m}{n}$?

Corneliu Georgescu, Craiova

Soluție. Dreapta BM situată fiind în planul DB_1D_1 taie muchia DD_1 în E. Proiecția punctului M pe planul $ABCD$ este N situat pe BD. Se cere să calculăm pe MN.

Din asemănarea triunghiurilor DMN și DBB_1 avem :

$$\frac{MN}{BB_1} = \frac{DN}{DB} \text{ sau : } \frac{MN}{a} = \frac{a\sqrt{2} - BN}{a\sqrt{2}} \tag{1}$$

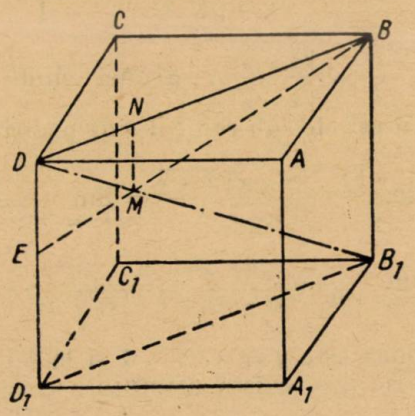
Din asemănarea triunghiurilor BMN și BDE avem :

$$\frac{MN}{DE} = \frac{BN}{a\sqrt{2}} \tag{2}$$

Planul ABM desparte în două prisme : prima cu baza ADE și înălțimea egală cu a și cealaltă cu baza trapezul AA_1D_1E și înălțimea a. Rezultă :

$$\frac{\text{aria } ADE}{\text{aria } AA_1D_1E} = \frac{m}{n} \text{ sau : } \frac{a \cdot DE}{a(a + D_1E)} = \frac{m}{n} \text{ sau încă :}$$

$$\frac{DE}{2a - DE} = \frac{m}{n}$$



de unde $DE = \frac{2am}{m+n}$. Înlocuim acest rezultat în (2) și apoi eliminăm pe BN din (1) și (2) și obținem :

$$\frac{MN(m+n)}{2am} = \frac{BN}{a\sqrt{2}} = 1 - \frac{MN}{a},$$

$$MN(m+n) = 2\ am - 2mMN,\ MN = \frac{2\,am}{3m+n}$$

Problema 7090

Se consideră funcția

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3 - 4}{x - 2}}$$

și se cere :

a) *Să se construiască graficul.*

b) *Volumul corpului obținut prin rotirea în jurul axei xx' a porțiunii din graficul de la punctul a, cuprinsă, între punctele de abscise $x = -2$ și $x = \alpha$ $(\alpha > -2)$.*

Să se determine valoarea lui α pentru care avem :

Volumul $= 4\pi(3 - ln\ 4)$

Veronica Negrei, Craiova

Soluția autoarei. a) Domeniul maxim de definiție:

$$x \in (-\infty, \sqrt[3]{4}] \cup (2,\infty); \lim_{x \pm \infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x^3 - 4}{x - 2}} = -\sqrt{\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 4}{x^3 - 2x^2}} = -1$$

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \to -\infty} \left[\sqrt{\frac{4 - x^3}{2 - x}} + x\right]$$

Se poate scrie $\sqrt{\frac{4 - x^3}{2 - x}} = \frac{\sqrt{4 - x^3}}{\sqrt{2 - x}}$, atunci cînd $x \to -\infty$ deoarece în acest caz ambele expresii de sub radical sînt pozitive. Deci

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{4 - x^3} + x\sqrt{2 - x}}{\sqrt{2 - x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{4 - x^3 - 2x^2 + x^3}{\sqrt{2 - x}\,[\sqrt{4 - x^3} - x\sqrt{2 - x}]} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{2(-x^2 + 2)}{\sqrt{x^4 - 2x^3 - 4x + 8} - 2x + x^2} = -1.$$

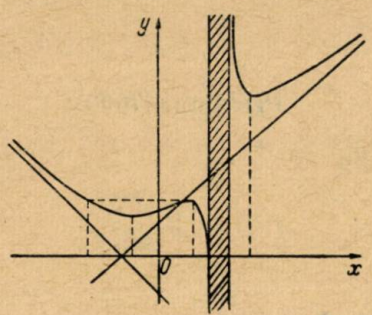
Deci o asimptotă oblică este $y = -x - 1$ și la fel se găsește $y = x + 1$ (pentru $x \to +\infty$). În plus, există asimptota $x = 2$

$$f'(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{(x - 2)^2} \sqrt{\frac{x - 2}{x^3 - 4}}$$

$$f'(x) = 0 \text{ pentru } x = 1 \text{ și } x = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$1 - \sqrt{3} \approx -0{,}73\,;\ 1 + \sqrt{3} \approx 2{,}73\,;$$

$$f(1 - \sqrt{3}) = 3 - \sqrt{3} \approx 1{,}27\,;\ f(1 + \sqrt{3}) = 3 + \sqrt{3} \approx 4{,}73.$$



x	$-\infty$		$1-\sqrt{3}$		1		$\sqrt[3]{4}$		2		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	///////		$-$		0	$+$	
$f(x)$	∞	$\searrow$	$1{,}27$	$\nearrow$	$\sqrt{3}$	$\searrow$	0		∞	$\searrow$	$4{,}73$	$\nearrow$	$+\infty$

$$V = \pi\int_{-2}^{\alpha} \frac{x^3-4}{x-2}\,dx = \pi\int_{-2}^{\alpha}\left(x^2+2x+4+\frac{4}{x-2}\right)dx$$

$$V = \pi\left(\frac{x^3}{3}+x^2+4x+4\ln|x-2|\right)\Big|_{-2}^{\alpha}$$

$$V = \pi\left[\frac{\alpha^3}{3}+\alpha^2+4\alpha+4\ln|\alpha-2|-\left(\frac{-8}{3}+4-8+4\ln|-4|\right)\right]$$

$$V = \pi\left[\frac{\alpha^3}{2}+\alpha^2+4\alpha+4\ln|\alpha-2|+\frac{8}{3}+4-4\ln 4\right]+4\pi(3-\ln 4)$$

Rezultă

$$\frac{\alpha^3}{3}+\alpha^2+4\alpha+4\ln|\alpha-2|+\frac{8}{3}-8=0,$$

$$\frac{\alpha^3}{3}+\alpha^2+4\alpha+4\ln|\alpha-2|-\frac{1}{3}-5=0,$$

$$\frac{\alpha^3-1}{3}+(\alpha-1)(\alpha+5)+4\ln|\alpha-2|=0,$$

sau $$\frac{\alpha-1}{3}(\alpha^2+4\alpha+15)+4\ln|\alpha-2|=0.$$

Sub această formă se vede că soluţia este $\alpha = 1$.

CHESTIUNI DE EXAMEN

7529. Să se rezolve ecuaţia

$$2x^2-(3m+2)x+m^2+m=0.$$

Să se determine m astfel ca cele două rădăcini ale acestei ecuaţii să fie respectiv sinusul şi cosinusul unui acelaşi arc.

Bacalaureat Montréal şi New York, 1964

7530. Se consideră funcţia

$$y=\frac{mx-3}{x+m-4}$$

m fiind un parametru.

a) Pentru cazul cînd m variază, să se găsească locul centrului de simetrie al curbei reprezentative a funcţiei.

b) Să se determine m astfel ca curba reprezentativă să treacă prin punctul P de coordonate p şi q. Să se discute pe baza poziţiei lui P.

Bacalaureat Liban, 1963

7531. În planul raportat la un reper ortonormat $x'Ox$, $y'Oy$ se consideră două puncte fixe $A\,(+1,\ +2)$ și $B\,(+2,\ +1)$ și punctul variabil $M\,(x,y)$.

a) Să se calculeze produsul scalar $\overline{MA}\cdot\overline{MB}$.

b) Să se arate că mulțimea punctelor M pentru care acest produs scalar ia valoarea $+7$ este un cerc (C), căruia i se vor determina centrul și raza.

Subiect tip Bacalaureat Franța

7532. Se consideră expresiile următoare:

$$\frac{1-\sin x}{(\pi-2x)^2} \text{ și } \frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 3x}$$

Să se determine limita către care tinde fiecare din ele, cînd x tinde către $\frac{\pi}{2}$. $\left(\text{Pentru prima expresie se va putea lua } u=\frac{\pi}{2}-x\right)$.

Subiect tip Bacalaureat, Franța, 1964

7533. Se consideră funcția

$$y_\lambda=\frac{x^2-2x+\lambda}{x^2+5x+4}$$

de variabilă reală x, unde λ este un parametru real.

a) Să se determine λ astfel ca această funcție să prezinte un maxim și un minim. Să se determine λ ca această funcție să fie descrescătoare pe axa reală R.

Această funcție poate fi crescătoare pe R?

Există o valoare λ_0 a parametrului λ pentru care funcția y_{λ_0} să aibă un singur maxim sau un singur minim?

b) Să se construiască curba reprezentativă a funcției y_1 obținută dînd parametrului λ valoarea $+1$. Fie (Γ) această curbă.

c) Să se studieze intersecția curbei (Γ) cu o paralelă variabilă la axa absciselor, de ordonată k.

Cînd intersecția precedentă nu este vidă, ea cuprinde, în general, două puncte $M\,(k)$ și $M'\,(k)$. Fie $A\,(k)$ punctul de coordonate $x=0$ și $y=k$. Fie $B\,(k)$ conjugatul armonic al lui $A(k)$ în raport cu punctele $M(k)$ și $M'(k)$.

Să se determine și să se construiască mulțimea punctelor $B\,(k)$ atunci cînd k variază.

Bacalaureat Montreal și New York, iunie 1965

★

7534. Se dă polinomul:

$$P(x)=x^5-7x^4+15x^3+ax^2+bx+c$$

și se cere:

a) Să se determine a, b și c astfel ca polinomul să se dividă cu $(x^2-4)\,(x-1)$.

b) Să se rezolve ecuația $P(x) = 0$, a, b, c, fiind înlocuite cu valorile aflate.

c) Să se raționalizeze expresia

$$E = \frac{1}{\sqrt{u^2v + uv^2} - \sqrt{uv} - \sqrt{u + v}}$$

u și v find rădăcinile complexe ale ecuației $P(x)=0$.

La admitere în Inst. pedagogic Timișoara, 1965

7535. Se dă polinomul $P(x) = x^3 - 8x^2 + ax + b$ și se cere :

a) Să se determine a și b astfel ca $P(x)$ să se dividă cu $(x - 4)$ și suma patratelor rădăcinilor sale să fie 22.

b) Să se calculeze expresia

$$E = \frac{x_1^2 + x_2^2 - i}{x_1^3 + x_2^3 + 2i}$$

unde x_1 și x_2 sînt rădăcinile complexe ale ecuației $P(x) = 0$, a și b fiind înlocuite cu valorile aflate.

La admitere în Inst. pedagogic Timișoara, 1965

7536. Se dă expresia

$$E = \frac{\sin 5x + 2\sin 4x + \sin 3x}{\cos 5x + 2\cos 4x + \cos 3x}$$

și se cere : a) Să se arate că $E = \operatorname{tg} 4x$; b) Să se rezolve ecuația $3E = \operatorname{cotg} 4x$.

La admitere în Inst. pedagogic Timișoara, 1965

7537. Să se calculeze $E = \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{cotg}^3 x$ și $F = \frac{9}{a^2} + \sin 2x + \cos 4x$ în funcție de a, știind că $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = a$.

La admitere în Inst. pedagogic Timișoara, 1965

7538. Dacă $\operatorname{tg} a = \frac{7}{23}$ și $\operatorname{tg} b = \frac{1}{4}$, unghiurile a și b fiind ascuțite, să se arate că avem : $a + 2b = 45°$ și $\sin 2a = \cos 4b$.

La admitere în Inst. pedagogic Timișoara, 1965

7539. Se dă ecuația

$$y - x = \sqrt{y^2 + 2(x + 1)y + 4x}, \tag{1}$$

unde x este o cantitate cunoscută și y necunoscuta.

a) Să se rezolve ecuația (1) exprimînd în mod explicit pe y în funcție de x :

$$y = f(x). \tag{2}$$

Semnalînd că $y - x$ trebuie să fie pozitiv sau nul, să se găsească intervalul sau intervalele în care trebuie ales x pentru ca soluția găsită să convină.

b) Se presupune că x variază în limitele determinate mai sus; să se studieze variația funcției de x, $y = f(x)$, găsită la punctul a) și să se reprezinte grafic. Să se precizeze: extremele, asimptotele și tangenta la origină în acest caz.

c) Să se determine numerele întregi a, b, c, d astfel ca funcția studiată să ia forma

$$ay = bcx + c + \frac{d}{2x+1} \tag{3}$$

Folosind forma (3), să se spună dacă se pot da lui x valori întregi așa fel ca valorile corespunzătoare ale lui y să fie întregi.

N.B. — Să se observe mai întîi, că $\frac{d}{2x+1}$ trebuie să fie un număr întreg, ceea ce delimitează valorile întregi posibile ale lui x.

Bacalaureat Guineea, 1964

7540. $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{D}$ fiind vectori, să se discute și să se rezolve ecuația următoare în x, y, z:

$$\overline{A}x + \overline{B}y + \overline{C}z = \overline{D}.$$

Bacalaureat Guineea, 1964

Probleme care au fost prezentate pentru olimpiada internațională de matematică din 1965, ținută la Berlin, de către țările participante*).

Probleme trimise de R. P. Bulgaria

7541. Să se afle soluțiile în numere naturale x, y ale ecuației

$$2^x = 3^y + 5$$

7542. Laturile a, b, c ale triunghiului ABC sînt în progresie aritmetică, la fel și laturile corespunzătoare ale triunghiului $A_1B_1C_1$. Dacă în plus avem și $\sphericalangle A = \sphericalangle A_1$ să arate că cele două triunghiuri sînt asemenea.

7543. Se dau două cercuri tangente interior. În cercul mai mare se înscrie un triunghi echilateral din ale cărui vîrfuri se duc tangente la cercul mai mic. Dovediți că una din tangente este egală cu suma celorlalte două.

7544. Fie ABC un triunghi echilateral și h înălțimea sa. Se cere locul geometric al punctelor din planul lui ABC, pentru care distanțele x, y, z la laturile triunghiului echilateral satisfac relația:

$$x^2 + y^2 + z^2 = h^2.$$

*) Aceste probleme nu au fost date la lucrările scrise, iar problemele date la concurs au fost publicate în G. M—B 1965 pag. 476

7545. Pe suprafața unui cilindru nemărginit în ambele sensuri și de rază r se consideră n puncte arbitrare și o figură avînd aria 1. Dovediți că printr-o deplasare constînd dintr-o rotație de unghi arbitrar în jurul axei cilindrului și o translație în direcția axei cilindrului de lungime $\leqslant \frac{n}{4\pi r}$, figura poate fi adusă într-o poziție în care să nu conțină nici unul din cele n puncte date.

Probleme trimise de R. S. Cehoslovacia

7546. În plan se dă un poligon regulat $A_1A_2 \ldots A_n$, $(n \geqslant 3)$. Se cere numărul triunghiurilor obtuzunghice $A_iA_jA_k$.

7547. Se dă un șir de numere întregi $a_1, \ldots, a_n$, $(n \geqslant 2)$. Dovediți că există un subșir $a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_m}$ $(1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_m \leqslant n)$ astfel încît

$$a_{k_1}^2 + a_{k_2}^2 + \ldots + a_{k_m}^2 \text{ să se dividă cu } m.$$

7548. Să se rezolve în numere reale ecuația

$$\sqrt{x^2+2xp-p^2} - \sqrt{x^2-2px-p^2} = 1$$

unde p este un număr pozitiv dat.

7549. În plan se dau 5 puncte astfel încît să nu existe 3 puncte colineare printre ele. Fiecare 2 puncte se unesc printr-un segment de culoare roșie sau albastră, astfel încît să nu avem nici un triunghi ale cărui laturi să aibă aceeași culoare.

a) Dovediți că din fiecare din cele 5 puncte date pornesc două segmente roșii și două albastre.

b) Dovediți că segmentele roșii formează o linie închisă. Același lucru și pentru cele albastre.

c) În cîte feluri se pot uni punctele date cu segmente roșii sau albastre astfel încît să fie satisfăcut condițiile problemei?

7550. Dovediți teorema: dacă două bisectoare interioare ale unui triunghi sînt egale, atunci triunghiul este isoscel.

PROBLEME PROPUSE *

7551. Să se construiască triunghiul ABC, cunoscîndu-se lungimea bisectoarei interioare BB', poziția I pe această bisectoare și unghiul BIC, I fiind centrul cercului înscris în triunghi, iar B' piciorul bisectoarei interioare a unghiului B.

Marius Hîncu, elev Oradea

7552. Să se arate că dacă

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \text{ și } \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$$

*) IX(7551 – 7558; X(7559 – 7568); XI(7569 – 7575); S(7576 – 7579). Problemele pentru clasa IX sînt indicate și pentru școli profesionale și pedagogice. Soluțiile se primesc pînă la 31 august 1966.

atunci :

$$\frac{xy}{ab} + \frac{yz}{bc} + \frac{zx}{ca} = 0$$

Atanasiu Ionel, prof. Odobești

7553. Fie (C_1) și (C_2) două cercuri ortogonale secante în A și B Fie PQ un diametru mobil al cercului (C_1). Să se demonstreze, că dreptele PA și QB se întîlnesc pe cercul (C_2).

Gheorghe Szölösy, Sighet

7554. Într-un triunghi dreptunghic ABC $(A = 90°)$, unghiul B este de 30°.

Notăm cu I centrul cercului înscris și cu O centrul cercului circumscris triunghiului dat. Să se arate că $IO = IA$.

C. Strbu, profesor Brăila

7555. Să se rezolve sistemul de ecuații

$$x = (y-a)^2$$

$$y = (x-a)^2$$

Dumitru Petru, profesor Sinaia

7556. Pe laturile unui unghi xoy se iau respectiv segmentele $OA = OB$ și fie Oz bisectoarea unghiului.

Cercul cu centrul în O și rază OB intersectează pe Oz în M, iar paralela prin M la AB taie respectiv pe Ox și Oy în A' și B'. Fie N piciorul perpendicularei din A' pe Oy.

Să se arate că $A'N = AB$.

Dan Ralescu, elev București

7557. În problema cuadraturii cercului se cere raza cercului echivalent cu un patrat cu latura dată, a. Să se arată că putem calcula raza cu o eroare absolută prin adaos $e_1 < 2.10^{-4}$. a, cînd luăm pentru π valoarea apropiată 3,14; și putem calcula această rază cu o eroare prin lipsă $e_2 < 10^{-6} \cdot a$, dacă luăm pentru π valoarea 3,1416.

I. Teodorescu, Galați

7558. Să se afle cîte numere de patru cifre se pot forma cu cifrele 0, 1, 2, 3 știind că fiecare număr format conține de cel puțin două ori una din cele patru cifre date.

Dan Apșan, elev Baia Mare

7559. Să se arate că dacă n este număr natural impar, atunci expresia

$$E = 1040^{2n} - 520^{2n} - 260^{2n} + 13^{2n} - 8^{2n} + 4^{2n} + 2^{5n} - 1$$

se divide prin 1965.

Ștefan Marica, Tr. Severin

7560. Să se arate că:

$$\sin^{2n}x + (-1)^{n+1}\cos^{2n}x + (-1)^n C_n^{n-1}\cos^{2(n-1)}x + \ldots + C_n^3\cos^6 x - C_n^2\cos^4 x + C_n^1\cos^2 x = 1$$

Generalizarea problemei 2827)

Liviu Pîrşan. Bucureşti

7561. Să se arate că dacă $a + b + c = 18°$, avem:

$$\Sigma(\sin 2a + \sqrt{3}\cos 2a) + 2\sin 6° = 8(\cos 12°\cos a\cos b\cos c - \sin 12°\sin a\sin b\sin c).$$

C. Ionescu-Ţiu

7562. Să se rezolve ecuaţia exponenţială:

$$26^x = 10^x + 24^x$$

I. Maftei, profesor Bucureşti

7563. Se consideră un triunghi ABC cu bisectoarele AA', BB', CC'. Se duc perpendicularele $A'M$, $B'N$, $C'P$ respectiv pe AA', BB', CC', punctele M, N, P, fiind situate pe AB, BC, CA. Să se demonstreze relaţia:

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{BC} + \frac{1}{CA} = \frac{1}{AM} + \frac{1}{BN} + \frac{1}{CP}$$

Daniel Pestroiu, elev, Tg. Jiu

7564. Se consideră ecuaţia

$$x^4 - 2x^3 + \lambda x^2 - 2x + 1 = 0, \quad (\lambda \in R)$$

Să se determine λ astfel încît: 1) ecuaţia să admită o soluţie dublă diferită de 1 şi -1; 2) ecuaţia să aibă toate soluţiile reale.

Aristide Leonte, Craiova

7565. În triunghiul ABC, înălţimile taie cercul circumscris triunghiului în punctele A', B', C'.

Se cere: *a*) Să se calculeze unghiurile triunghiului $A'B'C'$ în funcţie de ale triunghiului dat.

b) Să se calculeze laturile triunghiului $A'B'C'$ în funcţie de ale triunghiului dat.

Miron Oprea, Ploieşti

7566. Să se arate că

$$A_n^n C_m^n + A_{n+1}^n C_m^{n+1} + \ldots + A_m^n C_m^m = A_m^n \cdot 2^{m-n}$$

C. Ionescu-Țiu

7567. Să se afle domeniul de definiție al funcției

$$y = \sqrt{1 + 2\sin 2x} + \sqrt{1 - 2\cos 3x}$$

C. Ionescu-Țiu

7568. Să se demonstreze că relația

$$\sin a + \sin b + \sin c = 4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}$$

se descompune în următoarele două relații

$$a + b + c = (4k + 1)\pi,$$

$$\operatorname{tg}\frac{a+b-c}{4}\operatorname{tg}\frac{b+c-a}{4}\operatorname{tg}\frac{c+a-b}{4} = 1.$$

Gh. Buicliu

7569. Considerînd graficele a două drepte paralele și a altor două drepte perpendiculare, într-un sistem de axe perpendiculare, să se găsească direct relația dintre coeficienții unghiulari ai primelor două drepte și relația dintre coeficienții unghiulari ai celorlalte două drepte, folosind triunghiuri asemenea.

Corneliu Georgescu, Craiova

7570. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1 + \sin\frac{\pi}{n}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}\right)^n.$$

M. I. Focșeneanu

7571 Se dau dreptele :

$$D_1 = 2x - y + 2 = 0$$

$$D_2 = x + 2y - 6 = 0$$

$$D_3 = x - \alpha = 0$$

Se cere : *a*) Să se găsească locul geometric al centrului cercului circumscris triunghiului format de dreptele $D_1 = 0$; $D_2 = 0$; $D_3 = 0$.

b) Fie A intersecția dreptelor fixe. Cercul circumscris triunghiului de mai sus taie axa Ox în P și Q. Fie I mijlocul lui PQ. Să se afle locul geometric al intersecției dreptei AI cu tangentele duse la cerc paralele cu Ox.

c) Să se reprezinte grafic acest loc.

D. Manolache, C. de Argeș

7572. Știind că limita există și este finită, să se calculeze

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

fără folosirea teoremei lui l'Hospital.

Szasz Carol, asistent Brașov

7573. Fie cercul $O(R)$ raportat la sistemul de axe rectangulare xoy. Notăm cu $A(R,O)$ și $B(O, R)$, respectiv punctele de intersecție ale cercului cu axele ox și oy. Pe cerc se consideră două puncte mobile M_1 și M_2 astfel că $OM_1 \perp OM_2$. Să se afle locul geometric al punctului M de intersecție a dreptelor AM_1 și BM_2. Discuție.

C. Udriște, asistent

7574. Se dă polinomul $P(x) = 3x^3 - 13px^2 + 18p^2x - 8p^3$

a) Considerînd $P(x) = 0$, să se afle rădăcinile ei, știind că una din ele este media armonică a celorlalte două.

b) Considerînd funcția $f(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{P(x)}{x^2 - 8x + 12}$, unde $p = 3$, să se reprezinte grafic.

c) Să se afle aria cuprinsă între punctele unde curba taie axa Ox și porțiunea corespunzătoare a curbei.

T. Grozescu, Arad

7575. Într-un sistem de coordonate rectangulare $x0y$ se consideră un cerc (C) de rază r tangent în O axei Ox. Fie $P(a, o)$ și $P(a', o)$ două puncte mobile pe axa Ox, astfel încît abscisele lor verifică relația

$$aa' + a + a' + 3 = 0.$$

Din P și P' se duc tangente PT respectiv $P'T'$ la cercul (C) și să notăm cu M punctul lor de intersecție.

a) Să se determine poziția punctelor P și P' astfel ca triunghiul PMP' să fie echilateral. Ce condiție trebuie să îndeplinească r? Discuție. b) Să se afle locul geometric al punctului M. c) Să se demonstreze că dreapta TT' trece printr-un punct fix și să determinăm coordonatele acestui punct.

Tiberiu Weszely, asistent Tg. Mureș

7576. Se consideră unghiul diedru de mărime φ format de semiplanele P_1 și P_2, mărginite de dreapta Δ. Fie S și T două puncte oarecare ale dreptei Δ. Se secționează acest diedru cu planul P_2 care trece prin S și taie P_1 după semidreapta SA_1 și pe P_2 după semidreapta SA_2. Notăm $\sphericalangle(ST, SA_1) = \alpha_1$; $\sphericalangle(ST_1, ST_2) = \alpha_2$ și $\sphericalangle(SA_1, SA_2) = \theta$. Să se demonstreze relația:

$$\cos\theta = \sin^2\frac{\varphi}{2}\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + \cos^2\frac{\varphi}{2}\cos(\alpha_1 - \alpha_2)$$

unde $\alpha_{1,2}$ și φ aparțin intervalului $(0, \pi)$; iar T_1 și T_2 sînt analoage cu A_1 și A_2.

Chițescu Ion, București

7577. Să se demonstreze că dacă $\frac{b}{1+b} < a < b$; $(b \neq -1)$ mulțimea valorilor care verifică relația $|x-a|+|b-x| > ab$ este identică cu mulțimea valorilor pentru care avem

$$\frac{1}{ab+a+b-2x} < \frac{1}{2ab}$$

(Generalizarea problemei 6975).

Ion Dăncilă, absolvent Sibiu

7578. Se dă un triunghi ABC și un punct mobil M pe latura BC. Notăm cu P și Q proiecțiile lui M pe AB și AC. Se cere:

a) Locul geometric al centrului circumscris triunghiului MPQ.

b) Locul geometric al mijlocului segmentului PQ.

Petru Sava, elev Făget

7579. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC în care notăm cu ρ_a, ρ_b, ρ_c puterile punctelor A, B, C respectiv față de cercurile descrise pe BC, CA, AB ca diametre și cu ρ puterea centrului radical al acestor trei cercuri față de cercul ABC.

Să se stabilească inegalitatea:

$$\sum \frac{\frac{1}{\rho_a^2}+\frac{1}{\rho_b^2}}{\frac{1}{\rho_a}+\frac{1}{\rho_b}} \geqslant \frac{2}{\rho}$$

Al. Filipoiu, student București

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE PENTRU CLASELE V–VIII*

E: **2495.** Într-un depozit O.C.L. Alimentara se aflau 320 tone de: zahăr, orez și făină. Orez de 3 ori mai puțin decît zahăr, iar făină cu 40% mai puțin din cantitatea de orez și zahăr la un loc. Cîte tone de zahăr, orez și făină erau în depozit?

Nelu I. Dobre, Merei-Buzău

E: **2496.** Pentru executarea unei lucrări o echipă de muncitori a lucrat 16 zile după care a venit și echipa a doua și ambele au terminat lucrarea în 2 zile. Dacă echipa a doua ar fi venit după 21 zile, cele două echipe ar fi terminat lucrarea în 6 zile. Să se afle în cîte zile ar fi putut executa lucrarea fiecare echipă în parte.

D. Mîrzan, R. Vîlcea

---

* V(E: 2495–2998); VI(E: 2499–2502); VII(E: 2503–2507); VIII(E: 2508–2511). Problemele pentru cl. VII și VIII sînt indicate și pentru școli profesionale și pedagogice. Soluțiile se primesc pînă la 31 august 1966.

E : **2497.** Realizînd o inovație, un muncitor depășește lunar planul de producție cu 12% și obține trimestrial economii în valoare de 8640 lei.

Salariul său lunar se raportă la valoarea producției trimestriale planificate ca $\frac{3}{40}$ iar premiul obținut la sfîrșitul trimestrului întrece cu $\frac{2}{9}$ salariul său lunar. Să se afle ce premiu a primit muncitorul la sfîrșitul trimestrului.

Nelu I. Dobre, Merei-Buzău

E : **2498.** Să se efectueze :

$$\frac{\left(15{,}3-11\frac{1}{3}\right):2\frac{5}{57}-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right):\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\cdot 7}{\left[\left(3{,}5+1\frac{2}{5}\right):4{,}9+\left(4\frac{1}{5}-3\frac{2}{7}\right)-2{,}5\right]\cdot\frac{21}{46}}$$

La admitere în clasa IX, Iași 1965

E : **2499.** Producția de televizoare a anului 1970 va fi de 2,5 ori mai mare decît a anului 1965, iar numărul aparatelor de radio în 1970 va fi cu 200.000 mai mare decît numărul televizoarelor din același an. Știind că raportul dintre numărul aparatelor de radio din 1970 și numărul televizoarelor din 1965 este egal cu 4,5 iar în 1965 se produc cu 215 000 mai multe aparate de radio decît televizoare să se afle producția de aparate de radio și televizoare din anii 1965 și 1970.

Radu Gheorghe, Mizil

E : **2500.** În ziarul Scînteia din 26 sept. 1965 se arată că, în regiunea Oltenia, s-au construit 1000 apartamente de locuit în primele 9 luni ale acestui an, ceea ce reprezintă $27\frac{7}{9}$ % din planificare. Cîte apartamente au fost planificate pe acest an?

Dacă s-ar lucra în același ritm, cît timp ar mai trebuie pentru terminarea celorlalte apartamente?

De cîte ori trebuie mărit ritmul, după cele 9 luni, pentru că planul să fie realizat?

Corneliu Georgescu, Craiova

E : **2501.** O brigadă, conform planului avea de săpat o plantație de salcîm în 27 zile.

După $\frac{2}{3}$ din zilele lucrate, aplicînd întrecerea socialistă în muncă, a terminat restul de săpat cu 3 zile înainte de termen.

Să se afle cu cît la sută s-a mărit productivitatea zilnică a muncii la săpat?

B. Baeră, Păunești

E : **2502.** Să se construiască un patrulater cunoscînd cele patru laturi și știind că diagonala AC împarte unghiul A în două părți egale

D. Mirzan, Bujoreni-Vîlcea

E : **2503.** Să se rezolve sistemul de ecuații :

$$\frac{\frac{2}{3}x-\frac{2}{5}y}{\frac{1}{2}}+\frac{\frac{2}{3}x+\frac{2}{5}y}{\frac{3}{4}}=8$$

$$\frac{0{,}3x-0{,}5y}{3{,}4}-\frac{0{,}3y-0{,}5x}{3}=2$$

La admitere în clasa a IX-a, Iași 1965

E : **2504.** O cantitate de petrol este depozitată în trei cisterne fiecare avînd forma de cilindru circular drept. Prima cisternă are lungimea cercului de bază de 31,4 m și generatoarea egală cu diametrul bazei, a doua are capacitatea reprezentînd $1\frac{1}{5}$ din capacitatea primei cisterne, iar a treia are volumul cu 69 m³ mai mult decît a doua. Cîte vagoane cisternă cu capacitatea de 200001 sînt necesare pentru transportul petrolului din cele trei cisterne. (Se neglijează grosimea pereților cisternei).

La admitere în clasa a IX-a, Iași, 1965

E : **2505.** Într-o librărie s-au vîndut caiete de 0,50 lei, linii de 1 leu și călimări de cerneală de 1,70 lei, încasîndu-se în total 100 lei.

Să se determine numărul fiecărui fel de obiect astfel ca suma lor să fie 100.

În cîte feluri se poate face cumpărarea? Să se scrie aceste soluții.

Cristea Mișu, R. Sărat

E : **2506.** Să se arate că :

$$\frac{1-a}{1+a}+\frac{1-a^2}{1+a^2}+\frac{a^3-1}{a^3+1}=\frac{(1-a)(1-a^2)(1-a^3)}{(1+a)(1+a^2)(1+a^3)},$$

$$\frac{a^8+a^4+1}{a^4-a^2+1}=a^4+a^2+1=(a^2+a+1)(a^2-a+1).$$

C. Ionescu-Țiu

E : **2507.** Ce bază are sistemul de numerație în care avem :

$$\left(\frac{13}{101}+\frac{3}{11}\right):\frac{1001}{1111}=1$$

Gheorghe Szöllösy, Sighet

E : **2508**. Trei cooperative agricole de producție au împreună 12 autocamioane. Prima are de trei ori mai multe decît diferența dintre numărul celei de a doua și celei de a treia.

Cîte autocamioane are fiecare gospodărie?

N. Manolache, elev București

E : **2509**. Să se rezolve ecuația

$$\frac{1+a}{1-a}+\frac{1+b}{1-b}+x=\frac{1+a}{1-a}\cdot\frac{1+b}{1-b}\cdot x$$

E : **2510**. Fie unghiul ascuțit xoy și M un punct interior. Să se determine locul geometric al punctului M astfel ca diferența distanțelor punctului M la laturile unghiului să fie constantă.

Ion Marcu, Giubega

E : **2511**. Raza Pămîntului la ecuator este de 6 378 260 m iar la poli este cu 21 348 m mai mică.

Știind că greutatea unui corp depinde de poziția corpului pe suprafața Pămîntului că la poli un corp va cîntări cu 0,5% mai mult decît la ecuator, iar la îndepărtarea corpului cu o distanță egală cu raza Pămîntului în altitudine, greutatea acelui corp se micșorează de patru ori, să se afle : a) Cît vor cîntări 1,5 t.f. la 1500 km. distanță de la poli?, b) Cît va cîntări aceeași greutate la aceeași distanță în altitudine? c) De cîte ori se va mări această greutate la poli și cu cît va scădea din greutate la acea altitudine?

B. Baeră, Păunești

DIN ACTIVITATEA CERCULUI DE MATEMATICĂ A CLASELOR VII DE LA LICEUL NR. 34, C. A. ROSETTI, BUCUREȘTI

Este cunoscută importanța matematicii în dezvoltarea celorlaltor ramuri ale științei, precum și rolul mereu crescînd al aplicațiilor matematicii în economia națională. Congresul IX al P.C.R. stabilește ca sarcină, formarea de specialiști cu înaltă calificare, proces complex, ale cărui baze se pun încă din clasele mici ale școlii de cultură generală.

În lumina acestor sarcini, ne-am propus ca la cercurile cu elevii din clasele VII să rezolvăm probleme deosebite, care însă nu necesită cunoștințe peste puterile lor de asimilare.

Cercurile cu elevii claselor VII au fost conduse de Nicolae Teodorescu și Elena Vasiliu, profesori.

Una din ședințele cercului a avut următoarea temă :

Metoda simetriei în rezolvarea problemelor de geometrie plană. Una din problemele propuse a fost următoarea :

Intr-un cerc se dă o coardă AB și fie C mijlocul ei. Prin C se duc coardele MN și PQ. Dreptele MQ și PN taie pe AB în D și E. Să se demonstreze că CD = CE.

Această problemă a fost propusă și rezolvată în G.M.F.—B în anii precedenți.

Am rezolvat această problemă folosind proprietățile unghiurilor înscrise în cerc și egalitatea triunghiurilor.

Soluție. Fie P_1CQ_1 simetrica dreptei PCQ față de diametrul ce trece prin C. Din construcție rezultă că $PC = P_1C$, $\sphericalangle P_1CD' = \sphericalangle PCE$, măs. AQ = măs. BQ_1.

Avem $\sphericalangle MP_1C = \dfrac{\text{măs. } MBQ_1}{2} = \dfrac{\text{măs. } (MB+BQ_1)}{2} = \dfrac{\text{măs. } MB + \text{măs. } AQ}{2} = \sphericalangle MDC.$

Rezultă deci că patrulaterul MP_1DC este înscriptibil, deci $\sphericalangle DP_1C = \sphericalangle DMC$. Pe de altă parte $\sphericalangle DMC = \sphericalangle CPE$ deci $\sphericalangle DP_1C = \sphericalangle CPE$, deci triunghiurile DP_1C și DPE sînt egale avînd o latură și unghiurile alăturate egale. Rezultă deci că $CD = CE$.

Pentru ședința următoare printre problemele propuse a fost și următoarea :

Pe tangenta într-un punct M la un cerc, se iau segmentele $AM = BM$. Prin A și B se duc secantele APQ și BRS. Dreptele SP și QR taie pe AB în C și D. Să se demonstreze că $MC = MD$.

Problema este similară cu precedenta și a fost rezolvată cu o oarecare ușurință de către elevi. Remarcăm deci că, această metodă a simetriei permite rezolvarea unor probleme dificile, la care folosirea altor metode, ar duce la calcule lungi și laborioase.

În aceste ședințe ale cercului de matematică s-au evidențiat în mod deosebit elevii *Enache Roxana, Barna Adriana, Ionescu Alexandru* și *Popescu Doina.*

Folosind metode elementare s-au mai rezolvat și alte probleme din G.M.—B. Dăm mai jos un exemplu :

Pe laturile AB și AC ale unui triunghi se iau punctele M și N astfel ca : $\frac{MB}{MA} + \frac{NC}{NA}$

Să se arate că MN trece prin centrul de greutate al triunghiului ABC.

Soluție. Fie G intersecția dreptei MN cu mediana AD. Trebuie arătat că $\frac{GD}{GA} = \frac{1}{2} = 1$.

Prin A ducem paralela la BC și fie Q și P intersecțiile dreptei MN cu această paralelă și cu latura BC. Din asemănarea triunghiurilor AMQ, BMP și triunghiurilor ANQ și CNP, rezultă : $\frac{MB}{MA} = \frac{BM}{AQ}$ și $\frac{NC}{NA} = \frac{CP}{AQ}$. Prin adunare avem :

$$\frac{MB}{MA} + \frac{NC}{NA} = \frac{BP + CP}{AQ} = \frac{BC + 2CP}{AQ} = \frac{2CD + 2CP}{AQ} = 2.\frac{DP}{AQ}$$

Din asemănarea triunghiurilor GDP și AGQ avem : $\frac{DP}{AQ} = \frac{GD}{GA}$ și ținînd seama de cele de mai sus, avem :

$$\frac{MB}{MA} + \frac{NC}{NA} = 2.\frac{GD}{GA}$$

Rezultă deci că dacă $\frac{MB}{MA} + \frac{NC}{NA} = 1$, atunci $\frac{GD}{GA} = \frac{1}{2}$, deci G este centrul de greutate al triunghiului ABC.

Încheiem, remarcînd că elevii claselor VII au urmărit cu atenție și au contribuit activ la reușita acestor ședințe ale cercului.

Nicolae Teodorescu, profesor la liceul C.A. Rosetti, București

---

CĂRȚI NOI

Constantin Ionescu-Bujor, Elemente de transformări geometrice (partea a patra) Biblioteca Societății de științe matematice din R. S. România nr. 73, Editura tehnică 1966. Cartea cuprinde următoarele capitole:

XXII. Transformarea omografică plană. XXIII. Transformarea omografică în spațiu. XXIV. Corelațiile plane și spațiale. XXV. Transformări plane prin lentile.

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME*

Pînă la 1 martie 1966 s-au primit soluții bune la problemele propuse în G.M.—B după cum urmează:

BUCUREȘTI. S. g. 128. *(urmare)*
Ștefănescu Gilda (E : 2381—5, 7, 9, 90, 3), *Ș. g. 145.* cl. VII Bărdiță Mariana (E : 2394—8, 401, 4, 10, 12, 3, 7, 9, 29), Comana Marian (E : 2383, 5, 95—7, 9—401, 4, 10—3, 6—8, 24, 8), Dumitrache Eugen (E : 2395, 400, 10, 2, 3, 7, 8, 24, 8), Dumitru Marin (E : 2395, 6, 410—3, 6—9, 24), Șerban Radu (E : 2395, 400, 10, 2, 7, 8, 24), Stan Ion (E : 2385, 95, 400, 12, 7, 8, 24, 8), Stoica Silvia (E : 2396—401, 4), Szaba Ana (E : 2395, 6, 400—3, 7, 8, 28), cl. VIII Candidatu Liviu (E : 2381—4, 95—7, 401), Chilipirea Doina (E : 2382—4, 95—9, 404), Ș. g. *146,* cl. VIII Bădescu Smaranda (E : 2381—4, 7—93), *Ș. g. 156* cl. VIII Ștefănescu D. Cătălin

*) Evidențiații ca rezolvitori de probleme sînt scriși cu litere cursive.

(E : 2385—7, 9, 91—7), *Ş. g. 159* cl. VI Mirea Mariana (E : 2381—4, 90, 5, 400, 4), Popa Violeta (E : 2381—4, 90, 5, 400, 4), Ş. g. 166 cl. VI. Vasiliu Paula (E : 2381—5, 9, 95, 8, 402, 4). cl. VII. Cernescu Gabriela Marina (E : 2387, 8, 90, 3, 5, 6, 8—404, 6), Crivăţ Mia (E : 2381—5, 95, 6, 8), *Ş. g. 169* cl. VII. Hoisescu Niculae (E : 2381—4, 8—91), cl. VIII *Vijelie Luminiţa* (E : 2381—5, 9—401, 3, 4, 6, 7, 9; 7185, 8, 90, 4, 8, 204, 13, 6, 7, 9—26, 33, 5, 6, 9, 46, 7), *Ş. g. 173* cl. VI. Andrievici Bogdan (E : 2381—4, 9, 90, 5, 400), Ş. g. 181 cl. VII. Mateescu Petre (E : 2411—3, 7, 8, 23, 5, 8), *Ş. g. 189* cl. VI. Iliescu Bogdan (E : 2382, 95—7, 410—3), Lupescu Anca (E : 2381—4, 94—7), Mădăraş Iliana (E : 2381—4, 94.7, 410, 1, 3, 4), *Ş. g. 118 V. Alecsandri* cl. VI. Năstase Dana (E : 2391—4, 8, 95, 9, 401, 13). *L. 1 N. Bălcescu* cl. IX. Bănescu Lăcrămioara (7222, 3, E : 2394—8, 400—4, 6), Ceauşu Georgeta, Drăgan Marian Postole Veronica, Sterian Daniela, Tănase Adriana şi Vişner Elena (E : 2381, 2, 9, 91, 8, 410—18, 20, 21, 25). Marcu Viorel (E : 2394—405), Odette Bodo (2367—80, 94—402, 4, 6, 9), cl. X. Adrian Sorin (7276, 8, 83,—8, 91—3, 5—7, 9—301, 6, 8, 9), Boca Cristian (E : 7267, 74, 84—8, 300, 17, 8, 25, 6, 8), Carp Victor (7282—92, 5, 6, 301), Chirca Mihai (7283—8, 92, 300, 1, 2, 17, 8, 22, 5, 6, 8), *Georgescu V.M. Dan* (7171, 3, 8, 82—5, 7, 9, 90, 2—6, 204, 6, 10, 3—26, 31, 3—6, 8, 40—2, 7, 52, 61, 83—93, 6, 300), Ionescu George (7185, 217, 210, 2—5, 67, 83, 9, 300, 17, 25, 6, 8). Şerbănescu Marius (7219, 21, 83—8, 90—2, 5, 6, 300, 1), *Mineanu Mihaela* (7171, 8, 12, 5, 8—90, 2, 3, 5, 6, 8, 204, 10, 3, 4, 6, 7, 20, 2—5, 31—6, 40, 1, 7, 52, 82—7, 9—95, 304), Udrea Mircea (7225, 6, 33, 7, 45, 72, 6, 8, 83—7, 91, 3, 5, 300, 1, 8, 17, 8, 20, 3, 5—8, 32, 3, 5, 7), cl. XI. Negulescu Adrian (7188, 96, 203, 24, 47, 60, 1, 85, 6, 302, 3, 4), Oprea Alexandru (7119—22, 5, 7, 35, 88, 210, 6, 7, 22, 4), *L. 5* cl. VII. Botta Alexandru (E : 2398—402, 4—6, 17, 9), Doran Andrei (E : 2398—402, 4—6, 9, 17), Munteanu Dlorin (E : 2382—4, 410—3, 8), cl. IX Kauffmann M. Liviu (E : 2391—3, 425—8; 7185, 8, 72, 6, 84—8, 95), cl. X. Constantinescu V. Nicolae (7185, 8, 72, 7, 84—8, 95), cl. X. Constantinescu V. Nicolae (7190, 3, 4, 216, 9—24, 40, 76, 300), *L. 6* cl. CIII Weiner Iruna (E : 2381—5, 8—90, 2, 3, 5—8, 400—6, 9), cl. VII. Niculescu Irina-(E : 2381—5, 7, 9, 91—403, 4, 6, 9), Redlinger Daria (E : 2394—301, 3—6, 9), *L. 8* cl. IX. Cinteza Mircea (E : 2407, 9, 25—8; 7190, 21—3, 5—7, 9, 84—8), *L. 10* cl. VII Brateş Nanu (E : 2381, 3, 5, 95, 8, 402, 4, 24), Tafeta Gabriel (E : 2395, 6, 8, 400, 2, 4, 6, 11, 3, 7, 8, 25), Pătrîngeanu Victor (E : 2381—5, 98—402, 4, 24), cl. VIII. Ioan Sanda (E : 2381—5, 92, 6, 7) *L. 11* cl. IX. Petrescu Corneliu (E : 2425—8; 7219, 20, 2—4, 84, 5, 7, 8), Popescu Eugenia (E : 2391, 3, 407—9; 7189, 219—24), cl. X. Ciochină M. (7186, 216, 9—24, 34, 83, 3, 94). *L. 12* cl. X. *Bărcănescu Şerban* (7185, 8—90, 2, 3, 6, 9, 202, 12, 6—24, 6, 7, 31, 5, 40, 3, 64, 76, 8, 80, 2—93, 5—7, 9—302, 5, 8, 9, 12, 3, 7, 8, 20—3, 5—8, 30, 1, 3, 5, 8, 9, 42, 7, 51), cl. X. Rogalschi Mircea (7185, 8, 97, 210, 6, 9—24, 43) *L. 13.* cl. X. Lăzărescu Răducu (7216, 7, 20, 33, 40, 3, 83—9, 12, 3, 6, 7, 9, 300, 17, 8, 20—2, 5—8, 33—5, 7). L. 13. cl. XI Badiu Dan (7169, 73—5, 8, 83, 8, 92, 202, 16, 7, 9—27, 9, 35—7, 9, 40, 7, 50), *L. 15.* cl. V. Cernica Rucsandra (E : 2381—4, 5, 95, 6, 401, 4), cl. VIII. Gafiţeanu Liliana (E : 2311, 4, 6, 9, 20, 3, 7, 8), L. *16.* cl. VIII. Drăguşin Alex. (E : 2381—5, 7—9, 92, 3, 6—9, 401, 2, 4—6, 9; 8188, 95, 218, 22, 3, 4, 35, 7), *L. 17.* cl. IX. Roman Cornel (E : 2408, 9, 49; 7216, 9, 20, 3, 4, 6, 36, 326, 8), cl. XI. Suciu Paul (E : 7168, 88, 9, 93, 4, 6—200, 4, 10—3, 5), *Liceul 21* cl. X. Voiculescu Dan (7235, 46, 86, 97, 8, 305, 7—10, 31), *L. 22* cl. IX Atanasiu D. Drugu (E : 2409, 24, 7, 8; 7216, 9—24, 76, 91), Sergiescu Vlad (E : 2391—3, 407, 9; 7171, 85, 91—3, 9, 204, 6, 15, 9, 20, 2, 3, 34—6, 45), cl. X. Roşca Dan (7126, 9—24, 32, 6, 9, 42, 5, 6), Strujan Vladimir (7185, 8—90, 2—5, 7, 219—26, 33, 5, 6, 8, 40, 2), dl. XI. Mulan Mihai (7216, 7, 10—21, 4—7, 35—7), *L. 23* cl. XI. Băluţă Tudor (7188, 204, 16, 7, 9, 2, 0, 2—5, 47, 300), *L. 24.* cl. V. Moraru Dorin (E : 2395—8, 410—2, 5), cl. VII. Iliel Vuctor (E : 2382, 95—8, 404, 10, 1, 3, 28), cl. VIII Ilieş Andrei (E : 2381—3, 95—401, 4, 10—4, 7, 8, 23, 6, 8), *L. 26.* cl. X. Cotariu Roland (7232, 5, 40, 6, 84—6, 9, 91, 2, 4, 5, 7, 9, 300), L. 28 cl. VI Filip Cristian (E : 2381, 3, 5, 94—7, 9), cl. VIII Arsene Vladimir (E : 2381, 5, 9, 92, 7—400, 2, 4—6, 21), *L. 32* cl. V. Milcoveanu A. Mihai (E : 2381—4, 94—6, 410), cl. VII. Celenti Dan (E : 2391, 410, 1, 3, 4, 7—9, 21, 3, 5, 7, 8, 410—4, 17—9, 21, 3, 3, 7, 8), Popoviciu Liviu (E : 2381—5, 8—90), Săndroiu Mihai (E : 2394, 5, 9—405), *L. 33.* cl. XI. Ionescu B. Liana (7217, 20—2, 4, 7, 35, 43, 50, 66, 72, 6, 8, 83—9, 91, 5, 6, 300, 2, 3, 14, 7, 8, 22, 5, 35, 9, 320), *L. 36* cl. VII. Logofătu M. Anca (E : 2381—5, 7, 8, 90—2), cl. IX. Georgescu Radu (E : 2392, 409, 25—8; 7185, 8, 216, 22—4, 39, 43), *L. 37* cl. X. Kaliez Eugenia (7185, 7—9, 92—4, 216, 7, 22—4), *L. 39.* cl. IX Wiener Adrian (E : 2391—3, 409, 25, 7, 9; 7184—8), *L. 40* cl. VI. Constantin Radu (E : 2394, 6—405), *L. 42.* cl. VI Capridan Iulia (E : 2381—5, 7, 410, 1, 3).

BUHUŞI—BACĂU. *L. 1.* cl. VI. Aciobăniţei Maria (E : 2394—7, 9, 400, 2, 10—3).

BUŞTENI. *Ş. g.* cl. VIII Nicolescu Felicia (E : 2394—6, 9, 403, 10—3, 8), *L. 1* cl. X. Georgescu Georgeta (6928,, 30—3, 6, 46, 96, 703, 52, 65, 5).

BUZA—PLOIEȘTI. *L. 1* cl. VIII Ciocan Nicolae (E : 2381—4, 95, 9, 400, 2, 4, 5, 10—3, 7, 21, 219, 4, 5, 8), Constantinescu Ștefania (E : 2381—4, 95, 9, 400, 4, 5, 11—4, 17, 8, 21, 8), Covaci Alexandru (E : 2395, 412, 19, 9—21, 7, 8), Diniciu Marin (E : 2395, 9, 412, 3, 7, —21), Grigorescu Adriana (E : 2381, 2, 4, 5, 7, 9, 92, 3, 5), Mirea Vasile (E : 2381—4, 9, 95, 400, 1, 4), Vasilescu Paul (E : 2381, 2, 94, 5, 9, 400, 2, 4, 5, 10—5, 7, 8, 21, 4, 8), cl. XI. Manea Nicolae (7216—9, 22—4, 6, 45, 7, 86—8, 9), Marinescu Marian (7185, 8, 93, 4, 6—8, 204, 5, 10, 1, 3, 34, 8, 44, 6, 51, 62, 86, 9, 91—3, 6, 7, 9, 301, 3, 8).

BUZIAȘ—BANAT. *L. 1.* cl. VI. Drăgan Viorel (E : 2381—4, 7—90), Gouca Rodica (E : 2394—8, 400, 1, 4, 5), Heintz Grete (E : 2381—4, 7—9, 91), Opriș Rodica (E : 2394—8, 40, 1, 4), cl. VII. Buzatu Iuliana (E : 2394—6, 8, 9, 402, 4, 5).

CARACAL. *L. 1.* cl. IX. Alexandru Alexandru (E : 2392, 409, 25—8 ; 7185, 222, 84—8), Andrei Octavian (E : 2424, 5, 8, 44—7 ; 7284, 5, 8, 325, 8), Stoica Tudorel (E : 2392, 409, 25—8 ; 7222, 84—8), cl. X. Virtosu Mihail (7169, 74, 85, 7, 8, 90, —5, 7—9, 201, 4, 10, 3, 5, 9, 22—7, 31, 4—7, 42, 3, 6, 7).

CARANSEBEȘ—BANAT. *L. 1* cl. VI. Viorica Alexandru (E : 2381—3, 7—91).

CALAN. *L. 1* cl. VIII. Petruș Dorina (E : 2381, 3, 5, 92, 5, 9, 401, 23), Tadarisid Gheorghița (E : 2381, 3—5, 92, 4, 5, 401), cl. XI. Cubițet Ion (7167, 94, 8, 203, 11, 6—24, 6, 34, 6, 47, 50—2).

CĂLĂRAȘI. *L. 2* cl. IX. Ștefănescu Radu (7185, 223, 4, 36, 7, 84, 6, 7 ; 2391—3, 409, 25, 7, 8).

CĂLIMĂNEȘTI. *L. 1* cl. VIII. Mustăciosu Ada (E : 2425, 7, 8 ; 7284—8), cl. XI. Tamcencu Alexandru (E : 7211, 6, 7, 9, 9—25, 47, 301), Tolaș Anca (7188, 211, 6—25, 47).

CEICA—CRIȘANA. *Ș. g.* cl. VII. Troie Valeriu (E : 2381—5, 8, 9, 94—402, 4—6).

CELARU—OLTENIA. *Ș. g.* cl. VI. Petcu Marian (E : 2395, 6, 8—402, 4), cl. VIII. Andrei Varmena (E : 2395, 402, 4, 12, 3, 9—21, 3, 5), Gănuic Oprica (E : 2381, 3, 95, 8, 404, 12, 3, 9), Ștefan Nicolae (E : 2381, 3, 95, 404, 11—3, 9, 23), Tudor Alexandru (E : 2395, 8, 9, 404, 10—3, 9, 24).

CÎMPULUNG MOLDOVENESC. *Liceul militar Ștefan cel Mare.* cl. XI. *Lău Gheorghe,* (7136, 44, 99, 213—20, 2—9, 33—5, 7, 9, 41—3, 5—7, 9, 50, 63, 5, 67, 8, 82—9, 91, 2, 5, 6, 8—304, 6, 9).

CIORANI—PLOIEȘTI. *Ș. g.* cl. VII. Raicu Viorica (E : 2410—4, 7, 9, 23).

CILIC—OLTENIA. *Ș. g.* cl. VII. Mărășescu Ioana (E : 2391—4, 9, 95, 8, 400).

CÎMPENI—CLUJ. *L. 1* cl. IX. Mucea Ioan (E : 2425—8, 44—6, 9 ; 7235, 7, 45, 84—8, 91, 218, 21, 5, 6, 8), cl. X Dura Traian (7168, 84, 5, 8, 91, 2, 4, 5, 9, 200, 3, 4, 16—20, 22—6, 34, 43, 5).

CÎMPIA TURZII—CLUJ. *L. 3* cl. V. Cîmpeanu Maria (E : 2395—8, 410—3).

CÎMPINA—PLOIEȘTI. *Ș. g. 1* cl. VIII. Ivașcu Ciprian (E : 2381, 2, 4, 9m 99—401, 9), L. 1. cl. VII. Eftimiu Lucian (E : 2394—8, 402, 7, 22), cl. IX. Grădinaru Victor (E : 2391, 2, 409, 27, 8 ; 7185, 8, 222, 36, 84—7), cl. X. Andrei Gheorghe (7119, 20, 30, 85, 8, 94, 216, 7, 22—4, 83), Giurgiu Aurel (7220, 2, 3, 84—7, 91, 9—301, 26), Văcăroiu Ioana (7184, 216, 9, 20, 2,4—, 84—8, 300), L. 2 cl. VI. Opriș Silviu (E : 2395—8, 400, 1, 4, 5, 11, 3, 24).

CÎMPULUNG MUSCEL. *Ș. g.* cl. V. Costăchescu Oltea (E : 2381, 3, 5, 95, 6, 8, 412, 3), Mitroiu Gh. (E : 2395, 401, 2, 12—4, 8, 9, 28), L. 2, cl. IX Enăchescu Adrian (7185, 8, 216—9, 22—4, 84, 5, 8).

CÎMPULUNG MOLDOVENESC. *L. 1.* cl. X. Dragotă Stelian (7272, 6, 8, 82, 3, 6, 7, 9, 91, 2, 6, 8, 9, 300), Popescu Ovidiu (7169, 78, 9, 25, 6, 8, 9, 91—3, 5, 7, 215, 9—24), *L. Militar* cl. X. Vleoanga Vasile (7217, 22, 24, 6, 42, 9, 72, 84, 7, 99, 300, 1).

CLUJ. *Ș. g.* 7 cl. VII. Racoviță Georgeta (E : 2381—5, 7, 93, 402), Zglobiu Nicolae (E : 2384, 5, 7, 8, 90, 1, 4—7, 400—6, 10—4), L. 1 cl. VIII Toacsen Lucian (E : 2411—3, 7—9, 24, 4, 8). *L. 8 N. Bălcescu* cl. XI. *Farkaș Petru* (7184, 5, 8, 90, 2, 4—6, 8—200, 2, 4, 10—1, 3—7, 9—27, 31—7, 40, 2, 6, 7, 9—52). L. seral cl. IX. B—bănaș Ioan (E : 2391—3, 409 ; 7135, 8, 9, 43, 9, 216, 22—4), cl. XI. Taloș Gheorghe (7216—25, 8, 9, 35, 47, 51, 61), *L. 2* cl. VI. Băjănică Stela (E : 2387, 8, 94—8, 400), cl. VIII — Stenerman Vera (E : 2394—6, 9, 400—2, 4—6, 9), *L. 4.* cl. V. Rădulescu Rodica (E : 2381—4, 94—7, 413), cl. VIII Genan Mircea (E : 2381, 3, 4, 94, 5, 7, 404, 13, 7, 8, 21, 8), cl. IX. Dervenici Nadia (E : 2392, 3, 409, 24—8 ; 7185, 284, 5, 81), *L. 5.* cl. VI Roșcău Manuela (E : 2395—404), cl. VIII. Ardeltlich Ana (E : 2411—3, 8, 23, 5, 8, 84), Dana Popescu (E : 2411—3, 7, 9, 21, 3, 8 ; 7286, 7), Grigore Adrian (E : 2395, 401, 10—4, 7, 9, 21), Pop Adrian (E : 2391—4, 96—401, 4), cl. X. Grigore Corneliu (7217, 9, 21, 3, 4, 72, 7, 82—5, 7, 8, 317), *L. 8* cl. VI. Juga Doina (E : 2394—401, 3), Stamate Mircea (E : 2383—5, 7, 8, 95, 8, 400), cl. VII Zamfir Felicia (E : 2381—5, 95, 6), cl. CIII. Cordali Mariela (E : 2381—3, 5, 8, 90, 1, 3—5, 7, 8, 401, 2, 4), Kajtor Maria (E : 2381—5, 7—91, 3—407, 9), Rusa Alexandrina (E : 2381, 3, 5, Bartas Andrei (7216, 21, 2, 4, 887—8, 92, 3, 300), Beca Ion (7185, 8, 90, 216, 9, 24, 39, 84,

6—8, 92), Damian Dorin (7185, 90, 7, 216, 9, 22—4, 86, 7), Florescu Andrei (7185, 8, 90, 216, 9, 23, 4, 7, 84, 5, 7, 8), Tulbure Valerica (7185, 216, 8, 22—4, 84—8, 92, 300), *L. 9* cl. VIII. Ghidel Dan (E : 2381—5, 7—90, 2), cl. IX. Teuşan Ovidiu (7135, 8, 222, 3, 7; E : 2391, 2, 37, 409, 25, 7, 8), Î. 10 cl. VII Marfievici Radu (E : 2381—4, 8, 90, 4—8, 400, 2, 11, 3, 25), Oprişiu Adrian (E : 2382, 4, 94, 5, 7, 8, 401, 4), *L. 11.* cl. IX. Csetri Klara (E : 2391—3, 407—9; 7135, 8, 9, 95, 235—7), *L. 12.* cl. VII. Rosenberg Jaques (E : 2382—4, 94, 6, 7, 401, 2, 4), cl. X. David Nicolae (E : 7216, 7, 9—25, 35, 6, 40, 5), *L. 15.* cl. VI Ianciuc Peopinella (E : 2383, 4, 7, 9, 94—6, 8, 400, 1, 3, 4, 13, 4, 6, 7), cl. VII Astalaş Cristina (E : 2381—4, 93—5, 7, 8, 404), Coca Adrian (E : 2381, 94, 5, 7, 403, 4, 11, 3), Fechete Sorin (E : 2394, 5, 7—9, 401, 3, 4), Iqncic Buba (E : 2383, 7, 9, 90, 3—5, ,7, 9,—400, 4, 5, 10, 1, 3, 4, 6—9, 28), Olteanu Doina (E : 2384, 94, 5, 7—401, 3, 4), Petraşanu Rodica (E : 2381, 3, 95, 6, 8, 401, 2, 4), Schiopu Mineta (E : 2396, 401, 10—3, 7, 8, 24, 6, 8), Topîrdan Georgeta (E : 2394, 5, 7, 9, 404, 10, 2, 3), cl. VIII Firian Adina (E : 2381—3, 5, 7, 99, 401, 2, 4), Iancău Marian (E : 2381—5, 9, 90, 3), Sîrbu Marcela (E : 2381—3, 95, 9, 402, 12, 3, 7, 8).

COGAŞU— CRAIOVA. *Ş. g.* cl. V — Mihai Dan (E : 2381—3, 94—9).

COMARNICA—PLOIEŞTI. *L. 1* cl. X. Aldasarvo Augustin (7217, 9, 20, 22—5, 34, 5, 84—8, 91, 6, 300, 1), Buzatu Constantin (7117, 9, 20, 2—5, 84—8, 96, 300).

CONSTANŢA. *L. 1.* cl. VI. Arvinti Mihaela (E : 2381—5, 7, 94—8, 400), cl. VII. Anghel Elena (E : 2394, 6, 9—402, 4, 5), Doregan Mihaela (E : 2381, 3, 94, 6, 8—402), Gheorghiu Dan (E : 2381—5, 90, 1, 3; 7185), cl. VIII. Ivaneţ Mircea (E : 2395—401, 3—5), cl. IX. Persoi Radu (E : 2424—8; 7190, 219, 58, 84—8, 91), cl. X. Chiriac Călin (7135, 8, 90, 5, 216, 7, 9—24), Ene Sandu (7185, 8, 93—5, 7, 216, 7, 9—26, 36), Mavrodin Aurel (7185—7, 94, 216, 7, 9—24), Mîndruţă Rodica (7225, 33, 5, 6, 47, 89, 91, 3, 317, 8, 23, 6), Omer Adrian (7217, 21, 5, —5, 34—7, 47, 82, 3, 91, 323), L. 3 cl. X. Bedivans Maria (7193, 7, 216, 9, 20, 2—5, 33, 6, 9, 40).

CORBU. S. g. cl. VII Voiculeţ Eugenia (E : 2381—5, 7, 9, 93).

COSTEŞTI—PLOIEŞTI. *Ş. g.* cl. V Stan Ion (E : 2381, 3, 6, 95, 404, 10—3, 23), Tudose Filip (E : 2381, 3, 5, 95, 404, 11, 2, 23).

CRAIOVA. Abs. Teodorescu Ligiana (7126—8, 20, 2—5, 8, 36, 63, 92, 6). *Ş. g. 9* cl. VII Voicu Eugen (E : 2381—5, 7, 9, 90, 5—402, 4, 5), *L. 1* cl. VIII Giurea Alexandru (2410—3, 21, 3, 7, 8), cl. X. Banţă C. Valeriu (7219, 23, 5, 32, 3, 5, 6, 30—3, 5, 52), Băjea Gheorghe (7221, 85, 9, 98, 317, 8, 20, 2, 3, 5, 6, 8), Dumitrescu Aurel (7185, 8, 90, 7, 204, 10, 7, 20, 2—4, 6), Neagu Gabriel (7185, 90, 2, 3, 5, 7, 204, 1, 7, 23, 4, 300), Patra Cristian (7216, 7, 9, 24, 35—7, 47, 86, 7, 91—3, 5, 300, 1). Popescu Adrian (7169, 85, 8, 90, 7, 204, 10, 6, 7, 24, 6, 35), Turcu Ilie (7185—8, 90,—5, 7, 9, 203, 4, 10, 3, 5), Tepuş Nicolae (7185, 90, 2, 3, 5, 7, 204, 10, 6, 7, 9, 21—5, 35, 40, 76, 84—6, 9, 91, 300), cl. XI. Pascu S. Silvia (7077, 8, 80, 91, 121, 220, 84—8), *L. 2.* cl. X. Stănculescu Ovidiu (7185, 8, 94, 216, 9, 20, 22—4, 86, 7, 96, 300), Ştefanache Conelia (7185, 8, 94, 216, 9, 20, 2—4, 86, 7, 96, 300), *L. 3* cl. VI Călinescu Liliana (E : 2394—402), Constantinescu Anişoara (E : 2394—7, 9—402), Corneanu Viorica (E : 2398—401, 13, 16—8), Juga Violeta (E : 2394—402), Lucaci A. Doina (E : 2395—9, 401—3), Marinescu Liliana (E : 2398—401, 11—3, 3, 6, 8), cl. VII. Polizu Sorin (E : 2381, 4, 97, 8, 401, 5, 10—4, 25, 8), Constantin Anca (E : 2410, 1, 3, 4, 6, 18, 9, 21, 3), cl. X. Popescu Monica (7185, 8, 92, 5, 216, 7, 9, 21, 2, 4, 39), Teodorescu Dalia (7185, 8, 216, 7, 20, 1, 3—5, 86, 8, 300), cl. XI. Nicolae Maria (7216—8, 20—8, 47, 92, 9, 302), Paveliu Dlorica (7216—18, 21—8, 47, 51, 84, 5), Vasilescu Cristina (7185, 8, 204, 16, 7, 20—5, 47).

CUDALBI — GALAŢI. *Ş. g.* cl. VII. Barbu Gheorghina (E : 2381—3, 5, 94—7, 94002) Dumitraşcu Teodor (E : 2381—3, 5, 95—8, 400, 2), Pojaxya Panartiţa (E : 2394—7, 400, 2—4, 11—3), Pogaga Elena (E : 2381—3, 5, 9, 94—7, 9, 400, 2), Tăbăcaru Georgeta (E : 2381—3, 5, 9, 94—7, 9—400, 2), cl. VIII. Antohi Tănăsache (E : 2381—3, 5, 94—7, 9—402, 4), Chebac Gabriela (E : 2394—6, 8, 400, 2—4, 11—3, 17, 20), Dodu Maricel (E : 2381—3, 5, 9, 94—7, 9, 405, 9), Goga Aneta (E : 2381—3, 5, 5, 9, 94—7, 9—401, 3—6, 3—6, 9), Gologan Aneta (E : 2394—6, 402, 4, 11—3), Gradea Georgeta (E : 2381—3, 6, 9, 94—7, 9, 400, 3, 4), Grecu Dorina (E : 2381—3, 5, 9, 95—7, 9, 400, 3—5), Stroia Sofiţa (E : 2394—7, 9—401, 3, 4, 11—3, 7, 8), Tatu Victoria (E : 2381—3, 9, 94—7, 9, 400. 3—5. 9), Tapoiu Iulica (E : 2395—7, 400, 3, 4, 11, 3, 7, 8).

DĂENI — DOBROGEA. *Ş. g.* cl. VIII Enciu Aurel (E : 2381—5, 95, 400, 2, 4).

DĂRMĂNEŞTI — ARGEŞ. *Ş. g.* cl. VI. Dumitrache Aneta (E : 2381—7, 9, 90, 94—405).

DEJ, CLUJ. *L. 1.* cl. XI. Suciu Horia (7212, 8, 22—5, 86, 7, 300, 14, 8, 20, 5, 6, 8).

DETA — BANAT. *L. 1* cl. V Chirici Mariana (E : 2394—6, 9, 400—4), cl. VI. Macofan Cornelia (E : 2397, 400, 10, 2, 4, 5, 7, 9, 24, 8).

DEVA — HUNEDOARA. Sc. ped. cl. VI, Oltean Iulia (E : 2394—8, 401, 2, 4).

DOROHOI. *Ş. g. 1* cl. V. Avram Sorin (E : 2381—4, 94, 5, 9, 404), Cheşilneagră Gabriela (E : 2381—4, 94—6, 400), Lavric Elena (E : 2381—5, 94—7), Leixerovici L. (E : 2381——5, 95, z, 8), Mocanu Lenuţa (E : 2381—3, 5, 95—8). Vladimirescu Rodica (E : 2381—5, 95, 6, 8), cl. VII. Vladimirescu Gabriela (E : 2381—5, 7—9), cl. VIII, Corniciuc D-tru (E : 2400, 1, 12, 3, 9, 21, 3, 8).

DOROHOI. *Ş. g. 2* cl. VI. Davidsohn Jeni (E : 2381, 2, 4, 9, 95, 9, 401, 2, 9), cl. VII. Fonia Hania (E : 2381, 2, 4, 7, 9, 95, 6, 8—02), L. 1 cl. VIII Zeilingher Sulem (E : 2382, 4, 7, 9, 94—7, 400—2, 4).

DRĂCŞANI — BUCUREŞTI. Ş. g. cl. VIII Dorobanţu Petre (E : 2396, 8—400, 3—5, 11, 2, 8, 9, 21, 3, 5).

DRĂGANU — ARGEŞ. *Ş. g.* cl. VIII. Diaconescu Natalia (E : 2394, 6—9, 402—4).

DRĂGĂNEŞTI-OLT. *L. 1* cl. VI. Mihalache F.lorica (E : 2381—5, 96, 8, 400, 1), cl. X. Durigu Mircea (7185, 8, 90, 4, 6, 9, 215—7, 22—6, 35—7, 41, 72, 6, 84—8, 92).

DRĂGĂŞANI — ARGEŞ. *L. 1* cl. X. Mărculescu Ilie (7216, 7, 22—4, 40, 83—7, 9, 9, 92, 300, 17, 20, 3).

DREHUŢA — BACĂU. Ş. g. cl. VIII. Floreanu Ana (E : 2410—3, 6—9, 21, 8), Focşa Elena (E : 2381, 2, 4, 5, 8, 95—400, 6—9, 21, 8) Grigoruţ Smaranda (2410—3, 16—9, 21, 8).

DUMBRĂVENI — BRAŞOV. L. 1. cl. C. Widman Wiehelm (7185, 8, 95, 216, 7, 9—24, 6).

FĂGĂRAŞ. *L. 1* cl. VIII. Laschescu Dorin (E : 2381—5, 7, 8, 90, 4—8, 400, *P*, 4, 6), cl. XI. *Ptrocol Gheorghe* (7185, 8, 93, 4, 7—9, 201, 3, 10—7, 35, 6, 44, 55, 82, 3, 96, 8, 301).

FĂLTICENI — SUCEAVA. L. 2. cl. IX. Dreer Rodica (E : 2409, 423—8; 7223, 84—7), cl. X. Chirilă Neculai (7181, 8, 216—8, 22—4, 84—6, 8, 300) fără profesie. Govovei Dorin (E : 2381—5, 9, 90, 3 ; 7167, 8).

FETEŞTI — GARA — BUCUREŞTI. *L. 1* cl. X. Negreanu Tache (7185, 8, 91—5, 7, 216, 7, 9, 22—4, 6, 33, 5, 9, 43, 9).

FIENI — PLOIEŞTI. Ş. g. cl. VI. Holbans Cristian (E : 2385, 90, 4—8, 400, 2, 4). Jipescu Liliana (E : 2385, 90, 4, 6, 402, 4, 12, 3), Răgăjanu Maria (E : 2390, 4—8, 402, 4), cl. IX. Mircescu Gh. (E : 2391—3, 409, 24, 5, 7, 8 ; 7184, 5, 219, 22, 23, 36, 86, 7), Sencovici Gabriela (E : 2409, 24—6, 8 ; 7216, 7, 9—24).

FILIAŞI — OLTENIA. Absolvent Oprescu Viorel (7216—8, 22—4, 34, 86—8, 93, 300, 1), *L.* cl. X. Băluţă Conatantin (7216—27, 32—5, 8—40, 3, 5, 7. 9, 51, 5), Brezeanu Gh. (7169—72, 85—8, 200, 23—6).

FOCŞANI. Ş. g. cl. VI. Călţun Ion (E : 2394—6, 8—402), Iacob Dan (E : 2399—405, 16—8, 24, 8), Pană Dumitru (E : 1294—401), *L. 1* cl. X. Tănăsescu Constantin)7170, 3, 4, 6, 90, 4, 204, 8, 10, 1, 3, 4, 25, 55, 7, 8, 62).

FRASIN — SUCEAVA. *Ş. g.* cl. VII. Grosu Petru (E : 2381—4, 7, 95, 6, 400—2, 4), Ştefănică C. Sînziana (E : 2381—3, 9, 95, 400, 1, 4).

FRÎNCEŞTI — DEZROBIŢI — ARGEŞ. Ş. g. cl. VII. Paraschi D-tru (E : 2382—5, 9, 90, 5, 400).

GALAŢI. *Ş. g. 6* cl. VII. Iordan Magdalena (E : 2381, 3, 90, 5, 401, 12, 3, 8), *Ş. g. 4* cl. VII. Dumitrescu Ştefan (E : 2396, 7, 400, 4, 10—4, 7, 8, 20, 4, 5), Filiuţă Constanţa (E : 2381—5, 7, 9, 95), *Ş. g. 21.* cl. VII. Costea Cornelia (E : 2381—5, 9, 96, 6, 9, 404), cl. VIII. Costică Elena (E : 2395, 401, 2, 12, 7, 20, 1, 3, 4), Neagu Dana (E : 2395, 9—402, 11, 2, 8, 23—5), Roşca Daniela (E : 2381—5, 9, 90, 2, 4, 6—8, 401—6). *Ş. g. 22* cl. VII. Butuman Victor (E : 2381, 2, 5, 95, 6, 8, 400, 2), Gheorghiu Costică (E : 2381, 2, 5, 95, 6, 8—400, 2), Ion Jan (E : 2381, 2, 5, 95, 6, 8—400, 2), Lehman Hedvig (E : 2381, 2, 5, 95, 6, 8, 9, 400, 2), Mănăilă Georgeta (E : 2381, 2, 5, 95, 6—8, 400, 2), Melinte Lfcia (E : 2381, 2, 5, 95, 6, 8—400, 2), Pătrăşcanu Cornelia (E : 2381, 2, 5, 95, 6, 8—400, 2), Tacu Fănică (E : 2381, 2, 5, 95, 6, 8—400, 2). *Ş. g. 24.* cl. VII. Baloş Dorin (E : 2381——3, 95, 7, 9, 401, 2, 4), Dobre Victor (E : 2381—3, 95, 7, 9, 401, 2, 4), Chivirigă Liviu (E : 2381, 3, 7, 95, 7, 8, 402, 4), Costiniuc Florin (E : 2393, 9. 401—6, 9—13), Ioan Alexandru (E : 2396—8, 400, 1, 3, 11, 2), Sofronie Vasile (E : 2381—3, 95, 8, 9, 401, 4, 5), Ş. g. 26 cl. VIII Dăscălescu Luminiţa (E : 2394—7, 400, 1, 3, 9), Ş. g. 27 cl. Leu Dumitru (E : 2381—5, 7, 9, 90), *L. 1* cl. X. Oprea Vasile (7125, 8, 96, 7, 217, 9, 22—4, 6, 31, 6, 40, 4, 7, 300), *L. 2* cl. XI. Galoianu Maria (7119, 2p. 4, 6, 30, 2, 216, 7, 22—4, 35), *L. 4* cl. VII. Ariton Petrică (E : 2383—5, 9, 95—7, 400), cl. X. Tiribegea Maricel (E : 7185, 8—90, 3—7, 210, 3, 6, 7, 9—26, 31, 2, 5, 6, 81), *L. 6* cl. VIII Grimberg A. (E : 2381—4, 7—90, 2, 4—7, 400—6), Spiridom Veronica (E : 2381—4, 99, 400—2, 4). *Student Andrei*

Viorel (Inst. politehnic) (7137, 69, 76—8, 85, 8—90, 1, 2, 4, 6, 204, 10, 1, 3, 4, 6—28, 34—6, 9—41, 6, 7, 51, 8), *Şc. muzică* cl. VIII. Calapod Fănică (E : 2395, 7, 400, 1, 4, 11—4, 7, 9).

GĂIEŞTI — ARGEŞ. L. 1 cl. XI. Prodan Ion (7188, 96, 204, 11, 9—23, 35, 51, 61), Prundeanu Valentin (7179, 211, 26, 7, 35, 61, 82. 3, 6, 6, 7, 91, 300, 1).

GATAIA — BANAT. *Ş. g. 6* Buta Augustin (E : 2395, 6, 8, 9, 402, 4, 11—3).

GHERLA — CLUJ . *L. 1* cl. V. Buzdugan Mircea (E : 2381—5, 95, 401, 4), cl. VII. Benţa Tiberuu (E : 2395—8, 40, 2, 4). cl. Sipoş Iohn (7216, 7, 22, 3, 86, 7, 91—3, 6, 8——301).

GHIZDARU — BUCUREŞTI. *Ş. g.* cl. VIII. Sotrocan Constanţa (E : 2381—5, 7, 8, 90, 2, 3).

GIURGIU. *Ş. g. 6* cl. VI — Prisăcaru Eugenia (E : 2381—3, 95, 6, 410, 1, 3), Păcuraru Eugenia (E : 2395, 8—401, 11, 5, 8), Ş. g. Remus cl. VII Vişan Emilia (E : 2381—3, 5, 9, 90, 5, 7, 8, 401, 4), *L. 1* cl. XI. Liţoiu Petrişor (7216—9, 23—7, 36, 9, 47, 86, 7, 30 1), *L. 2* cl. IX. Tena Marcel (E : 2391—3, 24, 5, 7, 8; 7185, 7, 84, 5, 7, 8).

GOHAR — GALAŢI. *Ş. g. 1* cl. V. Chirvăsuţă Neculai (E : 2395—7, 401—4), cl. VIII Cgirvăsuţă Emilia (E : 2395—402, 4, 6, 10—4, 7, 8, 21, 3), Mocanu Jana (E : 2395, 9m 400, 2, 4, 6, 10—5, 21, 3), Onica Costică (E : 2394, 404, 6, 10—4, 8, 21, 3), Panaite Natalia (E : 2395, 9, 400, 2, 4, 6, 10—4, 8, 21, 3), Todoraşcu Polixenia (E : 2395, 9, 400, 2, 4, 6, 10—4, 8, 21, 3).

GOLEŞTI — ARGEŞ. *Ş. g.* cl. VIII Stoican Viorel (E : 2381—5, 8, 90, 2—4, 7, 8, 400—2, 4, 6, 9; 7720, 2, 3).

GORHAU — ARGEŞ. *S. g.* cl. VII. Tănase Vasile (E : 2410—7).

HATEG. *L. 1.* cl. X. Maftei Nicolae (7185, 8, 94, 216, 7, 9, 23, 4, 6, 39, 40, 7).

HALEŞ — BUZAU. *S. g.* cl. VII. Dogaru Anghel (E : 2395, 400, 2, 4, 11 3, 5, 7, 24), Janeta Elena (E : 2395, 401, 4, 11—3, 7), Marinescu Elena (E : 2381, 2, 4, 95, 8—402, 4, 4, 7, 8, 24, 8), Matara To, a (E : 2381—5, 94—7, 9—402, 4, 6, 11, 3, 7), Pinţoi Dumitru (E : 2395, 401, 4, 12, 3, 7, 8, 24), Strezea Valeria (E : 2395, 9, 400, 4, 11—3, 7, 8), Vişan Ştefan (E : 24 02, 4, 11—3, 5, 7, 24, 8), l. VIII. Bratoşin Angela (E : 2381—5, 95, 9, 400, 2), Dogaru Vasilica (E : 2397, 9, 401, 2, 4, 9, 11, 3, 4, 7), Radu Valeria (E : 2395, 8, 500, 4—6, 9, 24), Voicilă Ioana (E : 2381—5, 95, 6, 8—400, 2, 4, 9, 11—4, 7, 24).

HOREZU. *L. 1.* cl. VI. Robeci Octavian (E : 2394—401, 3, 4), cl. X. Costescu Ştefan (7219, 20, 2—5, 45, 72, 84—9. 91—3, 300), Gambera Ilie (7222, 4, 45, 76, 83—8, 41, 2), lc. XI. Buşe Marcu (7239, 42, 3, 6, 63, 6, 72, 82—8, 91—3), 95—7, 9—302, 4, 8, 9),.

HUNEDOARA. *S. g. 4*. Pitea Mihai (E : 2401, 4, 10, 3, 24, 5, 8), L. 1. cl. VII. Cîns Aurelia (E : 2382, 4, 7, 9, 90, 4, 5, 400, 4), cl. VIII. Jula Angela (E : 2381—5, 7, 95, 8—401, 3), cl. X. Ciotescu Ion (7185, 8, 92, 3, 216, 7, 22, 35, 47), cl. XI. Reteganu Aurel (7185, 8, 93, 4, 216, 7, 9, 22—6, 47, 66, 78, 82, 3, 5, 7, 9—302, 17, 25, 6, 8), Suruceanu Alem. (7185, 6, 8, 90, 4, 5, 216, 7, 9, 20, 2—7, 35, 42, 7).

HUŞI.—IAŞI. cl. XI. Diaconu Aurel (7217, 9—24, 6, 7, 35, 44, 66—8, 82, 3).

IAŞI. *S.g. 7* cl. πII. Astafei Iolanda (2381—3, 5, 95, 7, 8, 404, 12, 13), Bălan Carmen (2381—3, 5, 94, 5, 7, 8, 400, 1, 4, 5, 10—3), Babiuc Georgeta (2381—4, 95, 7, 504, 11, 98, 12, 3), Bercovici Zelda (2381—3, 5, 95â400, 2, 4), Chelaru Elena (2394, 5, 8, 400, 1, 10—3, 28), Gheorghiţă Dan (2394—6, 8, 401, 3, 4, 1. 3, 8). Goldstein Margit (2387—9, 95—402, 4), Harovitz Sergia (2385, 7, 8, 93—7, 9, 400, 1, 4, 12, 3), Ifteni Călin (2382, 4—9, 401, 3, 4, 11, 3, 8), Lascăr Elisabeta (2395, 410—8), Leizer Lili (2396—400, 2, 4, 11—3, 24). Magda Socar (2410—8), Moscovici Sorin (2394—402, 12—3), Roibu Ionel (2394—6, 8, 9—401, 3, 4, 11, 3, 8), Zarif Iulia (2381—3, 85, 94—400), cl. VII Scatrinei Ovidiu (2395, 8, 401—4, 11, 3, 8), Alena Tania (2395, 6, 9, 402—4, 6, 11, 3), Barbu Gelu (2382—401, 3, 4, 11, 3), Bratu Lucian (2381—3, 5, 94—8, 400—2, 4), Barză Adriana (2395, 7, 8, 401, 4, 10—3, 7, 8), Călugăreanu Lidia (2315, 7, 8, 400, 1, 4, 10—4, 28), Ciobanu Dorel (2395—8, 400—4, 11—3, 8), Constantin Costache (2385, 5, 94—400—2, 4, 13), Dumitru Alexandru (2394—401, 3, 4, 12, 3), Fetea Paul (2381—3, 5, 94, 6—8, 99—404, 12, 3), Hagianu Dora (2381—3, 94—8, 400, 2, 13), Iancu Rizel (2382—85, 7, 9, 94, 6, 9, 400—2), Melinte Suzana (2381, 95, 9, 401, 3, 4, 18, 9, 21), Nunteanu Adrian (2394—6, 8, 400, 2, 4, 11, 3, 8), Smochină Mihai (2381, 94, 6, 8, 0—402, 4, 11, 3, 8), Tănăsachi Dragoş (2394—401, 3, 4, 12, 3), Tănase Gheorghe (2395—406), Timofte Radu (2394—6, 8, 9, 400, 1,, 3, 4, 11, 3, 8), Tintara Dan (2395—402, 4, 11,8), cl. VIII. Acatrinei Ion (2395—9, 401, 4, 11—3, 8, 81—5), Agavriloaie Leon (2381—5, 9, 90, 5—9, 400, 1, 4, 8, 11, 3, 7, 24, 5, 8), Bişanca Radu (2381—5, 7—90, 4—6), Bîrleanu Dorel (2381—5, 8—90, -, 3), Bucitea Ion (2395—98, 400, 4, 8, 11—3, 8, 9, 23, 5), Davidovici Rodica (2398, 400, 13, 7—9, 21, 3), Ionciu Mircea (2381, 3, 5, 7, 92, 4, 9, 402, 4), Horer Silvia (2381—4, 7, 9, 90, 2, 4, 5—400), Schvom Hermina (2381—5, 7, 90, 2, 4, 5, 7, 400, 5). *S. g. 12* cl. VI. Dina Margareta (2395—8, 40, 10—3,

7, 8). Fulfa Doina (2395, 7, 8, 400, 1, 11, 3, 28), Gheroiam Mihaela (2395, 4, 10—3, 16, 28), Haralam Dorel(2394, 5, 7, 8, 404, 5, 11—3, 8), Iliescu Sergiu (2400—8), Veispeld Zigmuna (2410—6, 8, 28). cl. VII. Aronovici Sonia (2400, 1, 11—3, 7m 8, 28), Ciornei Marcel (2383, 946, 8, 400—2, 4), cl. VIII Angelina Cornelia (2411—3, 7, 9, 21, 3, 94, 5, 904), Rosetti Mariana (2395, 9, 400, 7, 18, 9, 26, 8), Ionescu Carmen (2395, 402, 4, 11—3, 17,—9, 21, 3, 6, 8), Leonte Alina (2395, 9, 404, 11, 3, 7, 8, 9, 21, 3, 6, 8), Pascaru Carmen (2411—3, 7, 9, 21, 3, 6, 8), Zugravu Aurelia (2381—3, 94,—6, 8, 401), *S. g. 13* cl. VII. Chițana Doina (2394, 7, 410—4, 6, 9, 21, 4, 8), Leligam Mihai (2389, 90, 402—6, 19, 28). *S. g. 14. cl.* VII Petrea Paul (2381, 3, 5, 95, 7, 400, 1, 2, 4), Poronciu Gabriela (2386, 7, 9, 90, 4 — 48, 00,4), cl. VIII Stancu Viorel (2388, 9, 92, 6, 8, 400, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 12, 9, 28). *S.g. 21* cl. VII Marcovici Aurel (2381—3,1 8, 9, 94—6, 400, 1, 4), *L. 1.* cl. V. Deleanu Dan (2395, 7, 8, 500, 10, 1, 2, 3). cl. VII Rusu Emi (2381, 3, 4, 7—9, 90, 2), cl. VIII Ionescu Cristina (2382, 95, 400, 2, 4, 11, 3), Mirzenca Magda (2382—4, 7, 9, 90, 6—9), Nistor Silvia (2381—5, 7, 9, 90—2). Pancu Costel (2381, 2, 4, 5, 9, 400, 2, 4), *L. 2.* cl. VII. Brașoveanu Georgeta (2381—4, 94, 5, 7, 8, 404), Buimistuc Călin (2381—4, 6, 8, 95, 7, 400, 2), Martin Simona (2381—4, 94, 5, 7, 8, 400, 4), Ouatu.Ada (2382—4, 94, 5, 8, 81, 404), Pandefunda Liviu (2394—401, 3—5), Spinei Claca (2381—4, 94, 5, 7, 8, 404), Tănase Iulian (2381—3, 95—8, 400), *L. 3.* cl. VI. Dioaconescu Victor (2381, 7, 8, 89, 9, 400, 3, 4), Lupescu Silviu (2381—5, 90—6, 8, 9, 400, 1, 3, 4), Rugină Florin (2381—5, 400, 2, 3), cl. VII. Burlacu Călin (2382—5, 95, 9—401, 4), Constantinescu Tinel (2381—3, 6, 8, 99, 401, 4), Constantinescu Paul (2395—402, 4, 405), Lupu Ioan (2381, 4, 94—6, 9, 401, 3, 4), Poicu Nicoleta (2381, 2, 5, 93, 6, 8, 400, 4), Popescu Anton (2381, 2, 95, 8, 99—402, 4), cl. VIII Cleja Ioan (2388—90, 5—8, 404, 5), Dumitrescu Lucius (2381—3, 89, 93, 5, 500, 4), Teodorescu Horia (2399, 410, 3, 11—3, 416—9, 21, 8), Vescan Robert (2395, 7, 9, 400—2, 4, 9), cl. X. *Popa Eugen* (7216, 7, 22—7, 34, 5, 41—3, 7, 51, 7, 60, 3, 72, 6, 82, 3, 7, 9—92, 4—8, 900—2), *L. 4.* cl. V. Benchea Marta (2381—4, 94—7), Wechsler Nadia (2381—4, 94—8), cl. VIII. Russu Dorina (2381—4, 94—405), Potec Maria (2381, 2, 95, 8, 400, 2, 4, 13), Wechsler Paula (2381—4, 94—402, 4), Waisman Julien (2394, 6—404), cl. VII. Iftimie Aurica (2394—404), *L. 6.* cl. XI Barbu Petrică (7119—21, 4, 34, 5, 6, 44, 6, 212, 22, 4). *L. 7.* cl. VII Anoniecu Carmen (2381, 4, 7, 9, 93, 4, 8, 400, 4), Dumitrsecu Laurențiu (2394—405), Cehan Mihaela (2381—84, 95, 9, 400, 4), Luşbă Tudor (2381—84, 9, 94, 5, 7—9), Sireteanu Georgel (2381—3, 9, 95, 6, 8, 9, 401, 2), cl. VIII Creangă Silvie (2395, 8—402, 4, 9, 11—3, 8, 28), *L. 8* cl. VII Mocanu Gabriela (2377, 402, 4, 6, 15, 24, 5, 8), cl. XI Baraboi Adrian (7169, 85, 88, 94, 7, 210), 20, 7, 22, 3, 4, 36, 45). L. Anonim cl. VII (2394—6, 8, 400, 1, 4, 12), Borcov Nina (2381—4, 7—9, 94, 5, 404).

ILIA — HUNEDOARA. *L.* „*Filimon Sîrbu*" cl. VIII. (2381—4, 8, 94, 8—401, 4).

LUGOJ. *S. g. 4 cl.* VI. Dunceascu Sorin (2381—3, 5, 94, 5, 7, 402, 11, 3), cl. VIII. Cristea Rodica (2410—4, 7, 8, 25, 6, 8), *S. g. 5* cl. VII. Iliescu Dan (2381—5, 8, 9, 92), *L. 1* cl. X—*Orbulov Petru* (7216, 7, 9—23, 7, 9, 40, 2, 3, 72, 6, 83—92, 5, 6, 8—301, 8, 9, 18, 23, 8), Neu Tiberiu (7216, 22—4, 6, 31, 9, 42, 3, 86, 7, 90—2, 5, 9).

MACIN (DOBROGEA). *L.* cl. XI Cicoreanu Vasile (7185, 8, 93, 4, 6, 204, 13, 5 7, 20—6, 47), Sali Suliman (7185, 8, 93, 4, 6, 7, 204, 13, 7, 20—3, 5, 6, 47), Simion Andrei (7173, 4, 8, 85, 9, 92, 2—9, 204, 10, 1, 3, 5, 16—28, 324—40, 2—5, 7, 51).

MANEŞTI (PLOIEŞTI. *S. g.* cl. VII. Davițoiu Georgeta (2394, 5, 7, 404, 6, 12, 3, 23, 4) cl. VIII Brezeanu Ion (2410—3, 8, 9, 21, 3—5, 7, 8), Davițoiu Ecaterina (2397, 404, 12, 3, 9, 21, 3, 4, 7), Lascăr Elena (2412, 3, 8, 21, 3, 4, 7, 8), Leca Dumitru (2410—3, 8, 9, 21, 3, 4, 7, 8), Roman Gheorghe (2410—3, 8, 21, 3, 4, 7, 8), Vlad Mariana (2410—3, 8, 9, 21, 3, 4, 7, 8).

MARGINA (BANAT). *S. g.* cl. V Cipu Mihai (2381—5, 95—8, 400).

MEDIAŞ, *L. 1* cl. X Marian Liviu (7275, 6, 83—7, 92, 6, 9, 300, 1, 9).

MIERCUREA CIUC. *L.* cl. IX Galoczi Peter (2400, 9, 25, 7, 8, 20—4, 34—7)., cl. XI Fülop Hajnama (7216—8, 22—4, 6, 7, 34, 6, 7, 34, 6, 7, 47, 82).

MIERLEŞTI (ARGEŞ). *S. g.* cl. V. Gugiu Sergiu (2381, 3, 5, 94, 5, 6, 7, 8), cl. VIII Alexandru Gheorghe (2381—3, 5, 8, 94—7, 8, 9, 400, 4. 5), Ciobanu Marin (2381—3, 6, 7, 9, 90, 6, 8, 404).

MIZIL. *S. g.* cl. VI. Aprodu Cornelia (2382, 95, 7—9, 400—4), Stan Elena (2382, 95, 7, 9, 410—4), Trifina C7rnelia (2383, 95, 7—9, 410—4), cl. VIII. Bădic Costin (2381—4, 95, 6, 8—400, 2, 4), Bogdan Paul (2410—4, 6, 7, 9, 20—5, 8), Bozianu Mirela (2395, 8, 9, 410—4), Drosu Sonia (2395, 8, 9, 410—3, 8, 9, 21, 3, 8), Dumitrescu Ileana (2395, 8—14, 9, 21, 3). Jurcam Cornelia (2381—5, 96, 8—400), Mateescu Marin (2381—5, 92, 6, 8—400, 2, 4), Marinescu Aneta (2395, 8, 410—4, 9, 27, 8), Mosor Maria (2395, 8, 410—4, 9, 23, 8), Pislaru Elena (2395, 8, 402, 10—4, 9, 21, 3), Stănescu Doru (2327, 95, 8, 9, 410—4, 9, 22, 3), Vasilescu Stelian (2395, 8, 402, 10—4, 9, 21, 3), Vlădăreanu Doina (2394—405).

MIRŞANI (OLTENIA). *S. g.* cl. VII. Diaconu Ion (2381—3, 95, 6, 8, 401, 2), Petrescu Aurelia (2394—403).

MOGOŞANI — ARGEŞ. *S. g.* cl. VIII. Badea Gheorghe (2377, 81, 5, 8—10, 4, 5).

MOINEŞTI — BACAU, cl. IX Vrînceanu Gabriela (2409, 24—9, 84, 5â8).

MORENI — PLOIEŞTI. *L.* cl. VI Buzila Cristina (2381—3, 94—9), Ilie Daniela (2381—4, 94—6, 8, 9).

MOZACENI — DEAL (ARGEŞ). cl. VIII. Curea Ion (2381—4, 7, 92, 4, 9, 400), L. cl. X Marinescu Ioana (7185, 8, 94, 216, 7, 9, 20—6) Vochin Alexandra (7185, 9, 94, 216, 7, 9, 20—6). Mureşan Florin (7216, 7, 9, 20, 2—4, 34, 5, 7, 72, 5, 6, 86, 7, 90, 2, 300).

NASAUD. *L.* cl. X. Scurtu Vasile (716, 7, 9, 29, 2—4, 33, 4, 45, 72, 6, 84, 6,7, 9, 91, 2, 300).

NEGRENI (ARGEŞ). Cioantă Marin (2381, 2, 95—8, 400, 1, 3, 4).

MELINEŞTI — OLTENIA. *L.* cl. IX. Popa Dumitru (7284—8, 325, 6, 8, 425, 7, 8, 44—7, 9).

NEGREŞTI — OAŞ. *S. g.* cl. VII. Andron Angela (2411, 29, 32, 4, 7, 41, 2).

NICOREŞTI — GALATI. *S. g.* cl. VII Oprea Dorin (2395, 6, 8—402, 4, 5,).

NOVACI — OLTENIA, cl. V. Ciocoiu Viorica (2394—8, 403, 10—4). Ciorogaru Elena (2394, 5, 7, 8, 400, 10, 2—4), Ciorogaru Ionică (2394—8, 403, 11, 3, 4), Ciucă Ion (2394—8, 403, 10, 1, 3, 4), Cuteanu Gheorghiţă (2394—8, 403, 12, 3), Dafinescu Ion (2394—8, 403, 10, 1, 2, 3), Negucioiu Constantin (2394—8, 403, 11—4), Popescu Sabin (2394—9, 411—3), Porumbel Gheorghe (2394—8, 403, 10—3), cl. VI Bădescu Elena (2381—90, 4—403), Caragel Dochia (2394—403), Cuteanu Maria (2381—8), Giurca Maria (2381—8), Ioan Ionel (2381—8,) Jianu Maria (2395, 6, 8â402 11—3), Griţescu Maria (2395, 6, 8—402, 11—3), Paraschivescu Elena (2381—90), Petroşescu Viorica (2381—8), Tomescu Elena (2381—8), cl. VII. Caragel Dochia (2381—5, 8—90, 3). Coconeţu Valeria (2381—5, 7—9, 93), Cosar Elena (2381—5, 8—90, 3), Cosar Ofelia (2381—5, 8—90,), Giugiulescu Gheorghe (2381—5, 8—90, 3), Stela I. Olga (2394—405), Truşcă Mihai (2381—5, 8, 9, 93), cl. VIII Berbecel Dan (2381—5, 7—90), Berbecel Dumitru (2394—80, 401—6), Ciorogaru Nicolae (2381—5, 7—90, 3), Comănescu Valentin (2381—5, 7—90, 3), Teodor Ion (2381—5, 7—90, 3).

OLTENITA. cl. X- Ulmeanu Vasile (7110, 36, 83, 5, 95, 6, 9, 210, 6, 7, 22, 4, 5, 34), Vasilian Mihai (7216—25, 34, 7, 8, 9, 40), Vlăsceanu Stan (7134, 6, 40, 78, 9, 85, 8, 90, 2, 5, 9, 210, 1, 3, 6, 8, 22, 5, 34, 43, 6, 7, 51, 2).

OPRIŞAN — CLUJ. *S. g.* Nicoară Adela (2381—5, 95, 9, 402).

ORADEA. *L. 2.* cl. X. Urdă Ion (7185, 8, 90—4, 9, 215—7, 9, 26). lc. XI. Mănucu Dumitru (7185, 8, 93, 216, 7, 9, 22, 4, 39, 47, 86, 7, 93, 301), *L. 4.* cl. X. Brădău Florian (7217, 21, 35, 67, 9, 83, 6, 7, 9, 91, 2, 3), Meer Petru (7169, 85, 8, 90, 6, 7, 9, 202, 3, 10, 1, 3).

ORAŞTIE — HUNEDOARA. cl. VII. Istrate Luminiţa (2381—5, 9, 95, 6, 9), Olaru Anca (2381—5, 95, 6, 404), Pădurariu Ileana (2381—3, 5—7, 401, 4).

ORAŞUL GH. GHEORGHIU-DEJ *L. 2* cl. XI. Merilă Angelica (7185, 216, 7, 9, 20—7, 35, 9, 47).

ORAVITA — BANAT. *L.* cl. X Novăceanu Constantin (7239, 40, 2, 3, 72, 6, 82, 3, 6, 7, 9, 300).

ORLEŞTI — ARGEŞ. *S. g.* cl. VII Preoteasa Valentin (2410—3, 7—9, 21, 48).

ORŞOVA. *L.* cl. VIII Ciupuligă Polina (2381—5, 99—402, 4, 11, 3, 21, 4), cl. X. Erimescu Ioan (7185, 8, 216, 7, 9, 20—5, 86).

PANCIU. *L.* cl. VI. Iordania Rodica (2381, 93, 5, 9, 402, 6, 12, 20), cl. XI. Ion Cj. Fătu (7185, 93, 7, 211, 7, 9, 22—6, 43).

PADURENII — PLOIEŞTI. *S. g.* cl. V. Bîrnea Georgeta (2381—3, 95, 6, 8, 403, 4). cl. VIII. Panait Aurelia (2395, 9, 400, 2, 4, 9, 13, 24).

PADUROIU — ARGEŞ° *S. g.* cl VII. Popa Blarian (2394—401, 3—5, 19, 23, 7).

PATÎRLAGELE — PLOIEŞTI. *S. g.* cl. VII. Popescu Cornel (2367—72, 5—7, 9, 81—5, 8, 94, 5, 9, 400, 2, 4), L. cl .X. Porea Dumitru (7216, 9, 22—7, 36, 45, 86—8, 300), Porea Traian (7188, 9, 2, 5, 216, 20, 2, 3, 36, 43, 5, 72, 6, 86, 300), Toma Veronel (7185, 8, 90, 2, 5—7, 216, 7, 24, 5, 36, 40), cl. XI. Bonacu Luigi (7216, 7, 9, 20—3, 4—6, 35, 6, 8, 42, 3, 6, 7, 87, 91, 2, 6), Birjoveanu Constantin (7216—9, 22 m 4—7, 34, 9, 47), Diaconu Alexandru (7216, 7, 9—26, 36, 7, 42, 7), Hirescu Vasile (7216, 7, 9—25, 36, 89, 93, 6), Poşoiu Constantin (7216, 7, 9—25, 35—7, 42, 6, 7).

PATULE — OLTENIA. *S. g.* cl. VII. Gagica Constantin (2381, 95, 8, 9, 402, 9, 5,28).

PAUNEŞTI (Adjud). cl. VI. Anghel Zarafina (2394, 6, 8, 9, 410—3, 7), Bîrlă Magdalena (2381—5, 9, 401, 3, 4), Fişan Georgeta (2381, 3—4, 7, 94, 5, 8), Nica Maricica (2382, 3, 9, 94, 5, 8, 402, 17), Novac Verginica (2387, 9, 94, 401, 3, 5, 11, 3, 7), Răuţă Anica (2381, 95, 6, 400, 2, 10, 7289), Roşu Elena (2363, 80—2, 4, 5, 92, 5, 402, 3), Vîrlan Lenuţa (2382—4, 94, 5, 8, 402, 12, 3), cl. VII. Bratu Victoria (2394, 5, 8, 410—3, 6, 8), Conduraru Maria (2385,

94, 8, 410—3, 7, 8), Gheorghiu Mihai (2382—4, 94, 5, 8, 402, 12, 3), Margoci Lenuţa (2370, 81, 5, 95, 8, 410, 1, 3, 6), Nica Lucia (2364, 5, 80, 1, 2—5, 95, 6, 8, 9), Novac Maria (2382, 3, 4, 5, 17, 1, 9, 6, 8, 401). cl. VIII. Anitoiu Vasile (2381—4, 9, 95, 400, 2), Berbece Maria (2394—8, 400—2, 5, 6), Duman Ion (2410—3, 7—21, 3, 4), Gheorghiu Gabriela (2396—8, 403, 10, 2, 19, 2,4 8), Ignat Viorica (2394, 8, 9, 11—3, 7, 8, 24, 419) Novac Maria (2394, 6, 7—404), Novac Maria (2394, 6, 7—404), Novac Stefanache (2381, 98, 402, 5, 10—3, 9), Răuţă Gicu (2394, 8, 9, 401, 10, 1, 3, 17, 8, 24), Rizuc Rodica (2394, 6—8, 410—3, 7, 8), Ungureanu Mihalea (2394, 5, 8, 500, 10, 2, 36, 8, 24), Ursei Paraschiva (2381, 2, 94, 5, 8, 402, 5, 10—12).

PERIETI — ARGEŞ. *S. g.* cl. VII. Lincă Gh. Lidia (2381—4, 8, 95, 7—400).

PETROŞENI. *S. g. 1* cl. V. Siclovan Codruşa (2410—9, 21, 4, 8), cl. VIII Marcu Dorina (2394—402, 4—6, 9), Suţa Stela (2394—402, 4—6, 9). S. g. cl. VII. Duda Iordan (2393—5, 9, 90, 2, 5, 9, 400, 2, 4), S. g. cl. V. Lupoiac Zeno (2381—4, 94—7), *L.* cl. X. Oprişui Oltea (7119, 21, 30, 1, 3, 6, 85, 9, 216, 7, 9, 20, 2—4, 47, 83, 4, 5, 8, 90), Stan Mihai (7185, 8, 90, 2—4, 204, 1, 9, 20, 2—7, 34, 5, 40, 3, 5).

PITEŞTI. *S. g.* cl. VIII Haret Viorel (2410—3, 7, 9, 21, 3, 5, 7, 8), *S. g. 10* cl. VII Matei Vania (2394—7, 402, 4, 5, 9,), Minduţeanu Dan (2377, 81—5, 94—6, 7, 405), Stanciu Marilena (2388, 95, 9, 401, 2, 4, 12, 3), Tomescu Cassiana (2388, 5, 8, 9, 401, 2, 12, 3), cl. VIII Chiriţă Florian (2381—3, 7, 411—3, 23), *L.* „*Nicolae Bălcescu*" cl. IX Cătălina Aurel (2409, 24, 5, 7, 8, 46, 7222, 4, 84—8, 325, 6, 8), Branişte Marceluş Î72k7—9, 20—4, 33, 84, 5, 8, 300), Rubinstein Magda (7119, 20, 2 ,7, 30, 1, 4, 5, 85, 219, 20, 2—4), cl. XI. Costin Francisc (7191, 200, 16, 7, 9, 22, 3—5, 32, 4, 6, 42), Ioana Mariana (7224, 45, 50, 66, 78, 81—3, 6, 7), Ionescu Alexandru (7116, 7, 9, 20, 1—4, 6, 78, 83—5, 8), Pietraru Cristian (7185, 217, 9, 20, 2, 3, 31, 4, 5, 84—8), Popa Marin (7216, 7, 9, 20, 2—4, 51, 61, 82—8, 92, 9, 300, 1, 3, 4), *L. 2.* cl. VII Zaharescu Agata (2381, 2, 95, 8, 9, 400, 2, 10, 11, 3), cl. XI Branişte Dumitru (7168, 217—27, 47, 91, 300, 1 8), Gheorghe Ion (7216—20, 2—5, 32, 4, 7, 9, 40, 51).

PÎNCOTA — BANAT — *S. g.* cl. VIII Cosma Alexandru (2381, 95, 9, 401, 12, 3, 9, 23, 8), Lamoş Constantin (2395, 6, 8, 400, 1, 4, 13, 23, 8).

PLOIEŞTI. *S. g. 12* cl. VII. Dinu Ileana (2381, 2, 7, 95, 6, 9, 401, 2, 4), Tiprigon Carmen (2383—5, 8, 95—9, 400—2, 45, 13, 78), *S. g.* cl. VI. Drăgan Elena (2381, 96, 8, 400, 1, 4), Frăsineanu Constantin (2395, 8, 402, 4, 9, 11, 3), Gheorghiu Simona (2376—81—3, 94—6, 8), Opriş Mihaela (2381, 5—8, 400, 1), Sandu Lidia (2395, 410—6), cl. VII. Anghelescu Petre (2383, 95, 6, 8, 400, 2, 5, 11), Czako Laurenţiu (2383, 95, 6, 8, 400, 2, 11, 13), Munteanu Monica (2410, 1, 7, 8, 24, 8, 32, 4, 9), Tuodse Mihai (2311, 8, 23, 39, 41, 2), Ziclinski Roxana (2394, 5, 7—401, 3, 5, 10), cl. VIII Avramescu Mircea (2410—5, 7—9, 21, 4, 5, 8), Mocanicu Dumitru (2410, 2, 3, 5, 7, 21, 3, 4), Popa Norica (2310—3, 7, 8, 23, 8), Stoicescu Marian (2382, 97, 8, 402—4, 12, 3), Stoicescu Toma (2382, 95—8, 402—4), Turţudău Florin (2410—4, 7—20, 3—6), *S. g.* 23 cl. VII Antonescu Luiza (2395—40, 6, 9) Răduţă Viorel (2411, 3, 7—21, 8), Stoica Valentin (2394—504, 9), cl. VIII Bărbulescu Felicia (2397, 400, 1, 4, 1, 11, 3, 4, 7, 9, 21, 3), Nicolae Daniela (2382, 4, 9, 90, 2, 5, 9, 400, 4, 13, 9), Răduţă Valentina (2411, 7—21, 8), Rednic Cristina (2381—3, 94—8), *L. 1.* „I. L. Caragiale" lc. VI. Bucheru Raluca (2381—4, 8, 95, 8, 401, 2), Dragomir Sabina (2374, 6, 7, 81—8, 95—402), cl. VII Florescu Radu (2395—404), Gheorghiu Mihai (2385, 5, 95, 6, 8, 9, 401, 4), Munteanu Dinu (2398, 9, 401—4, 19, 20, 5, 8), cl. VIII Ion Mihail (2381—5, 8, 92, 4, 7, 401, 2, 6), Olteanu Gheorghe (2381—5, 9, 902, 3), Preda Oltea (2392, 4—6, 8, 400—2), cl. IX Popescu Mariana (7119, 20, 9—31, 6, 40, 63, 85, 8, 235, 92), *cl. X Roman Dan* (7120, 1, 7, 79, 85, 8, 204, 14, 6, 8, 9, 22—5, 34, 5, 9, 40—4, 6, 72, 6, 84, 5, 7—9, 91, 2, 5, 300, 1, 8), cl. XI Alboteanu Radu (7119, 22, 4, 8, 216, 8, 24, 43, 7, 66, 84—9, 300), Stoian Liviu (7216, 7, 19, 22—4, 26, 42, 84, 5, 6, 8, 9, 317, 20, 5, 69), Ştefănescu Elena (7216, 17, 20, 2—4, 43, 75, 83—9, 317, 20, 5, 6, 9), *L. 2* cl. VI Alecu Voica (2381, 3 7, 8, 95, 9—402), *R*lexe Florica (2394—400, 2), Armegigiu Carmen (2381, 7, 8, 95, 9, 400—2), Ciucu Radu (2385, 7, 95, 8, 9, 400—2), Crăciunescu Marina (2381—4, 95—400), Grigore Dan (2376, 95—401, 4), Mazăre Valentin (2382, 4, 7, 9, 98, 400, 1, 3), Petrescu Dragoş (2404, 10—4, 6, 7, 24, 8), Plăpană Dan (2376, 85, 6, 8—401, 4), Sollomon Silvia (2394—402), cl. VII Florescu Gabriela (2394, 6, 8, 410, 7, 8, 20, 3, 5). Lupulenco Livia (2314—8, 400, 1, 4, 5, 6), Marinoaia Veronica (2398, 9, 401, 11—3, 18, 28), Mignea Dănuţa (2410, 1, 7, 9, 25, 37, 9, 41), Miron Alexandru (2381—4, 8—90, 4, 5, 40, 3, 4—6), Popescu Teodor (2392—7, 87, 9, 90), cl. VIII Climonici Mihaela) 2381, 2, 92, 6, 8, 402, 4, 9), Dumitrescu Mihai (2410—3. 5, 7, 21, 8), Ioniţă Iulian (2381,3, 4—8, 404), Marinescu Tudor (2410—3, 5, 21, 8), Nicolescu Ileana (2381, 95, 402, 4, 12, 3, 23, 9), Teodorescu Paul (2395—402), Ungureanu Gabriela (2395, 6, 8, 9, 40, 1, 4, 11, 3, 5, 8), cl. X. Cela Constantin (7216, 7, 9—24, 6, 44, 5, 76, 84, 91, 2, 6, 9), Cojocaru Eugen (7185, 8, 90, 217, 9, 22—5, 31, 5), Georgescu Alina (7185, 8, 94, 216—9, 22—5), 35,84, 6, 7, 300), Neagoe Paulina (7185, 8, 94, 210, 6—9, 23—5, 35, 85—7, 92, 300), Seremet Rodica (7185. 8, 90, 219, 20, 2—5, 35, 6), *L. 3* lc. VII Alexandru Marcel (2395, 7, 9, 400, 1, 4, 12, 3, 5), Roman Daciana (2394, 6, 7, 403, 11—3, 18), Neagu Victoria (2395, 6, 8, 400, 2, 4, 11—3),

MŰSZAKI KÖNYVTÁRES DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883 ORSZÁGOS

cl. VIII Necula Maria (2394—6, 8, 9, 401, 10—3), Teodorescu Mihaela (2395, 8, 410—3, 7, 8, 21, 8), *L. 4.* cl. VIII Dumitrache Ion (2381—5, 88—91), cl. X Dumitrescu Rodica (7185, 8, 90, 4, 216, 7, 22—5, 39, 40, 7), Pomîrlă Ioana (7185, 8, 94, 204, 6, 7, 22—5, 39, 40, 7), cl. XI Dan Cristel (7216, 9, 21—4, 66, 83, 4, 8, 314, 7, 8, 20, 25, 7, 8, 31), *L. 5.* cl. X *Nicolae Florea* (7216, 7, 9, 20—6, 31, 4, 7, 9, 40, 3, 4, 7, 9, 76, 82—7, 90—3, 5, 6, 9, 300, 1, 13, 4, 7, 8, 25, 6, 33, 7), *L. 6.* cl. VII Stoica Valentin (2381—6, 8—90, 3), cl. IX Stan Constantin (2391—401, 3—6, 9—11, 14, 6, 7—21, 3—7, 22, 3, 96, 87, 9),

PODUL TURCULUI (ADJUD). *L.* „*Al. Sahia*" cl. VIII Grigoraș Helga (2394—6. 404, 81, 400, 1, 9, 13, 17).

POIANA MARE (OLTENIA). *L.* cl. IX Caragea Aurel (2425, 6, 7, 8, 7216, 22—4, 84, 5, 7, 88).

POIANA SIBIULUI (HUNEDOARA) *S. g.* cl. VIII Bon Inocențiu (2385, 92—402), 4, 9).

POTCOAVA (ARGEȘ). *L.* cl. IX Ciucu Ion (2400, 1, 4, 11, 3, 4, 7, 9, 23—5, 7, 8, 72, 85, 325, 6, 8, 32).

PRUNDUL BÎRGAULUI (CLUJ). *L.* cl. V. Iambor Gheorghe (2381, 35, 94, 5, 6, 404, 12, 3), Ioan Liviu (2381, 3, 5, 94, 6, 6, 404, 42, 3).

PRISACANI (IAȘI). Goldore Elena (2381—5, 7—9, 90—3).

PUCHENII MOȘNENI (PLOIEȘTI) *S. g.* cl. VI Chiriță Georgeta (2394, 5, 7—9, 401, 10, 3, 32, 8), Ion Mihai (2395, 7—400, 28, 41—3), Ioniță Maria (2395, 8, 9, 400, 13, 32, 9, 41, 2), Paraschiv Elena (2381, 93, 5, 7—401, 32, 8, 9, 41, 2), Tudor Vasilica (2394, 7—9, 400â2, 10, 1—3), cl. VII Petre Maria (2382, 4, 7—90, 3, 8, 9—402, 4, 5) Vasilescu Veronica (2395, 6, 8, 400, 2, 10, ,1, 6, 7, 8).

PUCIOASA. *S. g.* cl. VI Căprănuș Simona (2394—405, Vlad Eugenia (2411—3, 7—9, 23, 5), cl. X Cimpoca Gheorghe (7178, 92, 7, 219, 20, 44, 5, 84—7, 9, 92, 7, 9, 300, 8), Comănescu Maria (2392, 3, 409, 28, 185, 8, 93, 7, 216, 9, 22, 4, 35, 85—8), Tabacu Ion (7178, 84, 5, 8, 97, 204, 17, 9—24, 34, 45), lc. XI Mac Nicolae (7119, 20—2, 4, 7, 30, 1, 6, 85, 90, 216, 7, 22—4, 76, 82—7, 9, 95, 6, 320, 5, 6), Mărculescu Corneliu (7119, 20, 2—4, 6, 8, 30—5, 44—9, 8, 50, 5, 7, 84, 5, 8, 11, 2, 6, 7—20, 2—7, 35—9). Vasilescu Nicolae Î7181, 3, 93, 4, 201, 2, 10, 6, 7, 20, 2—7, 35—7, 42, 4—7, 50, 84—9, 91—3, 5, 6, 9, 300, 1, 3).

RĂDĂUȚI. *L. 1.* cl. X. Gușetu Dorin (7169, 85, 8—91, 3, 4, 7, 9, 204, 10, 4), *L. 2* cl.VII Worand Ana (2383, 95—9, 304), cl. XI Luhan Dragoș (7225, 8,8 96, 8, 9, 302, 25, 35, 42, 25, 401).

RECAȘ (BANAT). L. cl. XI Coată Petru (7224, 36, 40, 58, 82, 3, 5—8, 300, 1).

REGHIN. *L. 2* cl. VII Kovacs Ibolya (2381—5, 7—90).

REȘITA. *L. 1* cl. XI Ioiart Ioan (7216, 7, 22, 4—7, 34, 9, 44, 7, 63, 6, 78, 82—8, 95, 300—4).

RÎMNICU SARAT. L. cl. VII. Grogorescu Tiberius (2411—3, 7—9, 21, 4—6, 8), cl. X Ghiță Mircea (7169, 81, 8, 99, 204, 4, 10, 2, 89, 92, 8, 216, 7, 8, 24, 6, 32, 4, 5, 9, 47, 51).

Teșilă Vasile (7179, 85, 8, 90, 2, 5, 9, 210, 241, 43, 72, 6, 84, 8), cl. XI Crintea Mișu (7216, 7, 20, 2—4m 47, 83, 91, 2, 300, 1, 7, 8, 30, 2, 36, 33, 42, 3).

RÎMNICU VÎLCEA. *S. g. 4.* cl. VII Ivan Nicolae (2394—8, 400, 1, 4). cl. VII Isbășescu Georgel (2381, 82—5, 9, 92, 5, 9, 400—2, 6, 7). cl. VIII Florescu Ion (2381—5, 9, 94—401), L. „Nicolae Bălcescu" cl. IX Lăzărescu Traian (2409, 27, 8, 44—6, 7235, 84—8, 326, 8), Maiorescu Gheorghe (2424—8, 7285—8, 300, 444, 5, 325, 6, 8), Petre Laurențiu (2391, 7185, 223, 6, 94—8, 92, 425, 7, 8), cl. XI. Marinescu Alexandru (7216—8, 20—4, 47, 83, 4—8, 300, 4), Negoiță Nicolae (7221, 2, 216—8, 23, 4, 83—7, 300, 4), Stoica Viorel (7188, 16, 7, 21—5, 7, 77, 85, 8, 303), Tufiș Ion (7216,—8, 21—4, 47, 83—8, 300), Voinescu Dumitru (7188, 204, 16, 7, 22—5, 7, 84—8, 98).

RÎUL ALB (PLOIEȘTI). *S. g.* cl. VIII Chițu Grigore (2395, 6, 8, 404, 11, 3, 25, 8), Milea Mihai (2395, 401, 4, 12, 3, 7, 21, 6), Mindroiu Gheorghe (2395, 6, 400, 2, 4, 11—3, 21, 8), Neagoe Eugenia (2394—6, 404, 12, 3, 7, 21, 6, 8), Necelcu Vasilica (2394—6, 400, 4, 10—4, 7, 21), Radu Constantin (2404, 11—3, 7, 21, 6, 8), Savu Ion (2394, 5, 402, 10—3, 21, 8), Sava Iulian (2325, 94, 401, 2, 4, 10, 2, 3, 7, 21).

ROMAN (SUCEAVA) *S. g.* cl. VIII Andrei Niculina (2397, 402, 10—3, 7, 21, 4). Florescu Lucica (2394—6,, 8, 9, 401, 3, 4), Chițanu Elena (2381—3, 5, 95, 6, 8, 400, 4, 10—3, 78, 23), Chițianu Lucica (2381—3, 5, 95, 5, 8, 404, 10—3, 8), Ciobănașu Maria (2381, 5, 92, 4—6m 8, 404), Iacob Adela (2381—3, 5, 9, 95, 6, 8, 404, 10—3, 7, 23).

ROMAN. *S. g.* cl-VII Segal Bruno (2381, 3, 5, 95, 8, 404, 10—2, 18, 24). S. prod. ucenici I.M. cl. I. Apăvăloaie Vasile (2367—72, 80, 1, 3, 4, 9, 91), Apostol Gheorghe (2367—72, 4—6, 80—4, 91), Bontea Mircea (2367—71, 4—6, 82, 4, 9), Bidris Vasighelis (2367—72, 4—6, 81—4), Ferenț Jan (2367—74, 4—6, 82), Galu Vasile (2367, 9, 70, 1, 5, 7, 83, 5, 400, 1, 4, 10), Ghenade Florinel (2367—72, 4, 5, 81, 1, 3, 4, 9, 91, 428), Ghidarcea Corneliu (2367—72, 4—6, 80, 3, 410). Giosanu Vasile (2367, 9, 70, 5—7, 83, 5, 400, 4), Hrișcă Vasile (2367—72, 4—6, 83), Iacob Constantin (2347, 82, 4—6, 428), Marinache Gheorghe (2367, 9—72, 5, 4, 80, 428), Segneanu Vasile 67—71, 6, 7, 80, 9, 404, 10), Tabarcea Vasile (2367—72, 7, 80, 3, 4, 400, 1, 28). (va urma)

CĂTRE REZOLVITORII DE PROBLEME

— *Rezolvînd probleme pregătiți și Olimpiada Matematică 1966.*

Corespondenții care ne trimit probleme rezolvate trebuie să redacteze fiecare problemă separat, însoțind-o de toate calculele necesare și de figuri desenate cu îngrijire.

Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceeași foaie.

Evidențiații trebuie să aibă cel puțin 35—40 soluții bune.

Problemele care se propun de către colaboratorii revistei să fie clar alcătuite și însoțite de soluții, să fie personale, iar nu luate din cărți sau reviste. Elevii sînt sfătuiți să înceapă a propune probleme numai după ce au rezolvat un număr destul de mare de exerciții și probleme. Problemele propuse, dar necorespunzătoare, nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse au fost publicate în cărți sau reviste, este rugat să arate precis volumul și pagina unde a mai apărut enunțul sau soluția problemei respective.

Solicităm probleme interesante legate de practică.

— *Problemele propuse urmînd a fi publicate ținînd seama de predarea la clasă a materiei respective, autorii lor sînt rugați să trimită problemele din vreme însoțite de una sau mai multe soluții îngrijit scrise precum și observări, discuții sau uneori generalizări, arătînd și modul cum au fost stabilite.*

— *Problemele propuse* (P), *note matematice* (N), *articole* (A), *materiale privind cercurile de elevi* (C), *se vor trimite redacției* G.M.-B. *de preferat într-un plic separat de problemele rezolvate.*

Corespondentul nostru care a citit și a înțeles deplin multe din soluțiile publicate, a rezolvat multe din problemele propuse poate și este îndemnat să încerce să schițeze cîte o notă rezultată dintr-o observație făcută cu ocazia rezolvării unei chestiuni mai grele. Aceste note să fie *revăzute de mai multe ori înainte de a fi trimise*, pentru ca redactarea lor să fie *cît mai clară și concisă*. Figurile să fie făcute separat. În redactare se vor evita prescurtările.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

La publicarea problemelor rezolvate se vor menționa rezolvitorii care au dat o bună redactare și o soluție interesantă sau mai multe metode de rezolvare.

Elevii claselor a IX-a pot trimite soluții și la problemele propuse pentru clasa VIII-a. Problemele rezolvate trebuie să fie din ultimile trei numere apărute în G.M.B. *Problemele rezolvate*, vor fi expediate în cursul unei luni și vor fi însoțite de un borderou cu numărul problemelor, scrise în ordinea crescîndă. Pe plic se va scrie școala, clasa și localitatea rezolvitorului. Problemele propuse vor fi separate, corect rezolvate și citeț semnate. Desenele să fie făcute îngrijit pe foi separate.

Elevii claselor V—VIII vor fi anunțați în rubrica rezolvitorilor de probleme dacă trimit odată cel puțin 8 probleme bine rezolvate, iar elevii claselor IX—XI, pentru cel puțin 12 probleme bine rezolvate.

Autorii sînt rugați să semneze clar la sfîrșitul lucrării personale pe care o trimit pentru publicat și să dea adresa lor exactă.

★

În vederea stimulării elevilor clasei XI premiați la olimpiadele internaționale de matematică sau olimpiadele interne (etapa finală), care devin studenți ai facultății de matematică-mecanică sau fizică de la Universități, conducerea Ministerului Învățămîntului a hotărît să li se acorde următoarele forme de sprijin material:

a) bursă în primul an de studii, indiferent de situația lor materială. În următorii ani de studii bursa să fie menținută în aceleași condiții dacă obțin media generală cel puțin 9,00.

b) la începutul primului an de studii să li se acorde cărți și manuale de specialitate în valoare de 500 lei.

c) în vacanțele anului I de studii să fie trimiși cu prioritate la odihnă în taberele studențești (iarna sau vara la alegerea studentului) dacă rezultatele școlare sînt foarte bune.

★

Tirajul fiind limitat, gazetele se trimit mai întîi abonaților și de aceea rugăm colaboratorii noștri să se aboneze de îndată. Prețul este de 2 lei exemplarul. *Abonamentele se pot face prin oficiile poștale locale.*

I. P. „Informația" — C. 3262

INDEX 41601

1966 JUN - 9.

Lei 2

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

E 1426

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE
DIN REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA

GAZETA MATEMATICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XVII — iunie 1966

6

GAZETA MATEMATICĂ
SERIA B
Anul XVII, nr. 6 — iunie 1966

SUMARUL

		Pag.
1.	Unele aplicaţii ale calculului grafic în geometrie şi fizică de Maria Vidraşcu, Braşov	241
2.	Relaţii metrice într-un triunghi dreptunghic de N.O. Zaharia şi M. Popescu	245
3.	Note matematice de M. Grünbaum şi C.Ionescu — Ţiu	248
4.	Probleme rezolvate (7095, 7132, 7134, 3135, 7136, 7137, 7138, 7143, 7145, 7146, 7147, E: 2341, 2345, 2346, 2349)	249
5.	Chestiuni de examen (7580 — 7607)	259
6.	Probleme propuse (7608 — 7625)	264
7.	Exerciţii şi probleme propuse pentru clasele V — VIII (E: 2512 — 2527)	269
8.	Cărţi noi	271
9.	Rubrica rezolvitorilor de probleme	272
10.	Evidenţiaţi la concursul de matematică 1966, etapa finală	287

ANUL XVII 6 IUNIE

COMITETUL DE REDACŢIE

Dincă N., profesor; *Grosu A.*, profesoară; *Ionescu-Bujor C.*, prof. univ. emerit; *Ionescu-Ţiu C.*, profesor, redactor şef adjunct; *Kiss E.*, conf. univ. (Cluj); *Kovacs K.*, conf. univ. (Cluj); *Muşat I.*, profesor; *Ottescu C.*, profesor; *Plăviţu M.*, profesor; *Sacter O.*, conf. univ., redactor şef; *Simionescu Gh.*, conf. univ.; *Ţene L.*, profesoară şi *Voinea R.*, prof. univ.

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 14.46.53 — Bucureşti

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică a şcolilor, precum şi orice material informativ se vor trimite pe adresa de mai sus.

OSZ. MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

GAZETA MATEMATICĂ
SERIA B
PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET
Anul XVII nr. 6 iunie 1966

UNELE APLICAȚII ALE CALCULULUI GRAFIC IN GEOMETRIE ȘI FIZICĂ

MARIA VIDRAȘCU
Institutul Politehnic Brașov

Adeseori se cere ca după ce s-a găsit soluția algebrică a unei probleme să se exprime și grafic rezultatul obținut. De asemenea se pune problema ca pentru anumite formule să se efectueze anumite construcții grafice cu ajutorul cărora să citim rezultatul pentru valori date elementelor componente ale formulei. Vom considera mai întîi construirea grafică a unor expresii algebrice.

Pe lîngă construcțiile pur geometrice, construcțiile expresiilor x date de $x = \frac{ab}{c}$, $x^2 = ab$; $x^2 = a^2 + b^2$ nu sînt decît construcțiile cunoscute din geometrie și anume, construirea celei de a patra proporțională între trei segmente date; a mediei proporționale între două segmente date; ipotenuza unui triunghi dreptunghic, etc.

În afară de aceste expresii simplu de construit, se pot întîlni în diferite aplicații și altele mai complicate, a căror construire se reduce prin eliminări succesive tot la formulele simple de mai sus, sau la altele asemănătoare cu ele. Vom da cîteva exemple :

Exemplul 1. Să se construiască expresia $x = a\sqrt{\frac{b}{c}}$ (1)

Construcția lui x se reduce la $\frac{x^2}{a^2} = \frac{b}{c}$ sau la $x^2 = a \cdot \frac{ab}{c}$

Se va construi mai întîi expresia $y = a.b : c$, adică a patra proporțională între trei lungimi date a, b, c și apoi se va construi x din relația $x^2 = a.\ y$, adică media proporțională între două lungimi date a și y (fig. 1) și apoi $FH = x = a\sqrt{\frac{b}{c}}$

Exemplul 2. Să se construiască expresia :

$$x = \sqrt{a^2 \pm \sqrt{b^4 - c^4}} \tag{2}$$

Se observă mai întîi că : $b^4 - c^4 = (b^2 + c^2)(b^2 - c^2)$
Se vor construi mai întîi y și z din $b^2 + c^2 = y^2$ și $b^2 - c^2 = z^2$

Fie $AB = b$, iar $BC = c$, perpendiculară pe AB. De pe figura 2 se vede că $AC = y$ şi $AD = z$.

Se ia apoi $AE = z$ în prelungirea lui AC şi, în cercul descris pe EC ca diamentru, perpendiculara AF pe AC. Se vede că $AF = u = \sqrt{y.z}$.

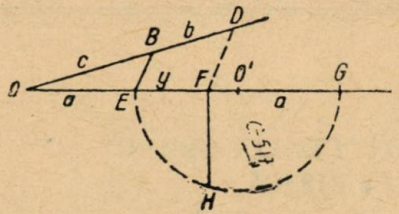


Fig. 1

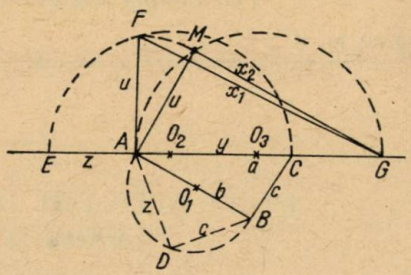


Fig. 2

Urmează apoi să construim formule $x = \sqrt{a^2 + u^2}$. Pentru aceasta se va lua pe AC un segment $AG = a$ şi lungimea segmentului FG va fi x_1 în cazul $x_1 = \sqrt{a^2 + \sqrt{b^4 - c^4}}$ iar lungimea segmentului GM va fi $x_2 = \sqrt{a^2 - \sqrt{b^4 - c^4}}$.

Exemplul 3. Să se construiască expresia:

$$x = \sqrt{a^2 + \sqrt{b^4 + c^4}}. \tag{3}$$

Se observă că $b^4 + c^4 = c^2\left(\frac{b^4}{c^2} + c^2\right)$.

Notăm $y = \frac{b^2}{c}$ şi avem:

$$b^2 + c^2 = c^2 (y^2 + c^2)$$

Se va construi mai întîi expresia $y = \frac{b^2}{c}$, construind a patra proporţională între b şi c şi se constată că $AB = y$.

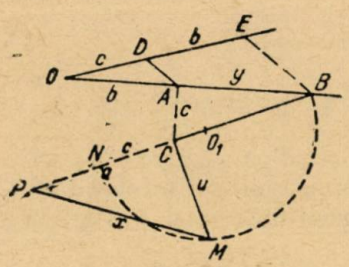


Fig. 3

Apoi se va construi z din formula $z^2 = y^2 + c^2$, construind triunghiul dreptunghic ABC cu catetele egale respectiv cu y şi c şi se constată că $BC = z$ (fig. 3).

Se obţine în acest fel $b^4 + c^4 = c^2 \cdot z^2$.

Se construieşte apoi u din $u^2 = c.z$, se obţine CM a cărui lungime este egală cu $\sqrt{c.z}$.

În fine se construieşte x din $x^2 = a^2 + u^2$, construindu-se triunghiul dreptunghic CMP în care $CP = a$ şi astfel mărimea segmentului MP este egală cu $x = \sqrt{a^2 + \sqrt{b^4 + c^4}}$.

S-a pus problema construirii unor grafice aşa ca pentru o formulă dată să se construiască un singur grafic care să poată fi folosit pentru diferite valori date literelor. Începînd cu secolul al XX-lea calculul grafic

a luat o dezvoltare foarte mare cerută de geometrie, fizică şi tehnică, o aceeaşi formulă fiind folosită de repetate ori pentru diferite valori date literelor. În acest fel a apărut nomografia*). La început s-au construit nomograme carteziene sub formă de reţea. Preocuparea în legătură cu aceste nomograme cu reţea a fost ca să se construiască nomograme cu reţea dar curbele să fie înlocuite cu drepte. Această problemă a fost începutul unei probleme importante în nomografie şi, anume problema anamorfozei.

Vom ilustra această problemă prin cîteva exemple.

Exemplul 4. Fie formula :

$$\alpha\beta = \gamma \tag{4}$$

La o valoare dată lui γ, se obţine $\alpha\beta = ct.$ Reprezentată grafic, formula $\alpha\beta = ct.$ dă o hiperbolă echilaterală (fig. 4), axele de coordonate fiind asimptote.

Pentru diferite valori date lui γ se va obţine o familie de hiperbole ; pe fiecare din ele scriem valoarea corespunzătoare a lui γ. La un α şi β daţi, paralelele la axele Ox şi Oy se vor intersecta pe o curbă din familie pe care citim valoarea pentru α. Întrucît citirile se fac cu o oarecare greutate, mai ales cînd paralele la axele Ox şi Oy pentru un α şi β daţi se inter-

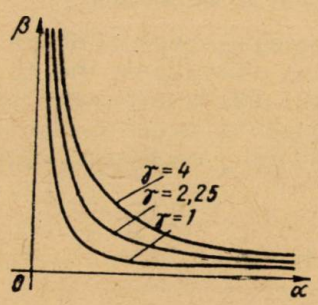


Fig. 4

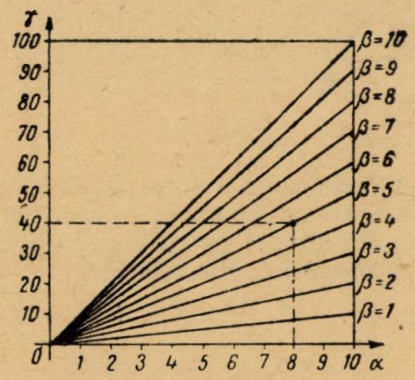


Fig. 5

sectează între două curbe γ, s-a pus problema anamorfozei acestui grafic, adică transformarea lui într-un grafic în care curbele să se transforme în linii drepte.

Pentru formula (4) s-ar putea construi o nomogramă cu linii drepte dacă relaţia este de gradul întîi în raport cu două din variabilele pe care le reprezentăm pe axele Ox şi Oy fie prin scări metri ce, fie prin scări funcţionale convenabil alese.

---

*) Vezi „Gazeta matematică seria B" nr. 1/1964 şi nr. 8/1964. „Transformări geometrice" de *C. Ionescu-Bujor* Partea I, II, III.

Astfel, formula (4) să o considerăm de gradul întîi în α şi β. Deci dacă pe axa Ox reprezentăm pe α prin ecuaţia $x=1$ cm şi pe axa Oy pe γ, prin ecuaţia $y = 0{,}1$ cm, ecuaţia (4) devine

$$y = \frac{\beta}{10} \cdot x \tag{5}$$

o familie de drepte ce trec prin originea axelor.

Urmează apoi să dăm lui β diferite valori şi să obţinem un fascicul de drepte, marcînd în dreptul fiecărei drepte valoarea lui β corespunzătoare (fig. 5). Pentru un α dat se ridică o perpendiculară pe axa Ox pînă la întretăierea cu paralela la Ox corespunzătoare lui γ dat.

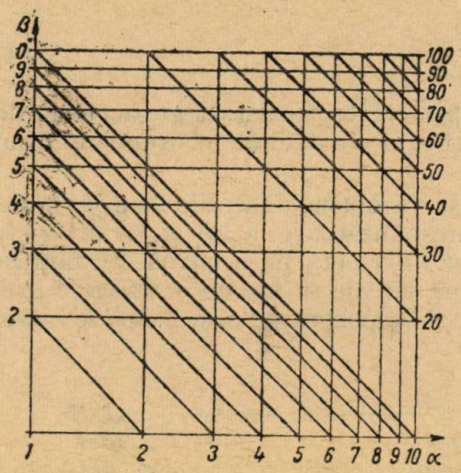


Fig. 6

Punctul obţinut se va afla pe o dreaptă din fascicul pe care citim β corespunzător.

Fie aceeaşi relaţie $\gamma = \alpha\beta$. Să-i dăm, o altă anamorfoză.

Aplicînd logaritmii, relaţia devine :

$$\log\alpha + \log\beta = \log\gamma \tag{6}$$

Luînd $x = 12{,}5$ cm $\log\alpha$ şi $y = 12{,}5$ cm $\log\beta$, relaţia (7) devine :

$$x + y = 12{,}5 \log\gamma \tag{7}$$

care reprezintă, pentru diferite valori date lui γ, o familie de drepte paralele cu bisectoarea a doua (fig. 6). Pentru α şi β daţi la intersecţia perpendicularelor duse pe axele de coordonate, obţinem un punct care se va afla pe una din drepte pe care citim apoi valoarea lui γ corespunzătoare.

Exemplul 5. Fie relaţia

$$\frac{\alpha^2}{25} + \frac{\beta^2}{9} - 1 = 0 \tag{8}$$

Dacă reprezentăm pe α şi β prin scări metrice pe axele Ox şi Oy, relaţia (8) se reprezintă printr-o elipsă (fig. 7). La un α dat ridicăm o perpendiculară pînă la intersecţia cu elipsa şi apoi citim, pe axa Oy, β corespunzător. În mod analog avem α, dacă se cere pentru un β dat. Această ecuaţie poate fi anamorfozată în felul următor. Să construim pe Ox şi Oy scările $x = m.\alpha^2$ şi $y = m.\beta^2$; relaţia (8) devine :

$$\frac{x}{25} + \frac{y}{9} = m \tag{9}$$

care reprezintă o dreaptă, mult mai uşor de construit (fig. 8). Citirea se face ca mai sus, cu singura deosebire că perpendiculara dusă pe axa Ox, de exemplu, va intersecta o dreaptă în cazul de faţă şi nu elipsa.

De asemenea sînt numeroase exemplele de anamorfoză a graficelor folosite în nomografie, anamorfoza fiind o problemă de bază în nomografie, întrucît orice nomogramă este în fond rezultatul unei anamorfoze aplicate unei relaţii cu trei sau mai multe variabile.

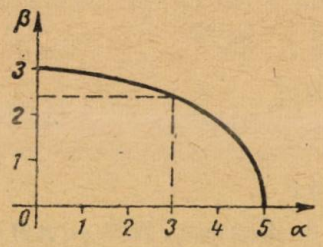


Fig. 7

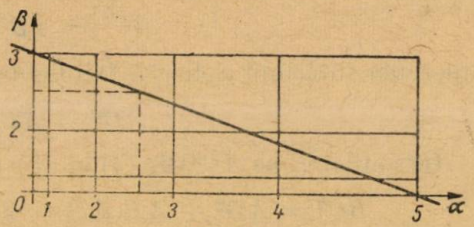


Fig. 8

Formule de forma (1), (2), (3), (4), (5), (9) precum şi altele asemănătoare, îşi găsesc aplicaţii în geometrie, fizică, mecanică şi tehnică.

PENTRU CERCURILE DE ELEVI DE CLASA VII

Relaţii metrice într-un triunghi dreptunghic

Într-un triunghi dreptunghic ABC, ($\sphericalangle A = 90°$), în care AD este înălţimea coborîtă din vîrful unghiului drept sînt cunoscute teoremele clasice :

a) Teorema catetei, exprimată prin una din relaţiile :
$AB^2 = BC.BD$ sau : $AC^2 = BC.DC$;

b) Teorema înălţimii : $AD^2 = BD.DC$;

c) Teorema lui Pitagora : $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Teorema lui Pitagora se demonstrează de obicei, după cum se ştie, folosind de două ori teorema catetei. Anume, din :
$AB^2 = BC.BD$ şi $AC^2 = BC.DC$ se deduce :

$$AB^2 + AC^2 = BC.BD + BC.DC = BC(BD + DC) = BC.BC = BC^2$$

Această demonstraţie pune direct în corespondenţă teorema catetei cu teorema lui *Pitagora*.

Există un număr mare de demonstraţii diferite, date teoremei lui Pitagora. În cele ce urmează vom pune în evidenţă anumite corespondenţe între cele trei teoreme indicate.

1. Teorema lui Pitagora poate fi demonstrată folosind o dată teorema catetei şi odată teorema înălţimii.

Fie ABC un triunghi dreptunghic ($\sphericalangle A = 90°$). Se construieşte triunghiul dreptunghic BCD, cu CD perpendiculară pe BC şi AD în prelungirea laturii BA. Cateta CA din triunghiul dat ABC este înălţime în triunghiul BCD. În acest din urmă triunghi teorema catetei ne dă :

$$BC^2 = BD.AB \qquad (1)$$

iar teorema înălţimii :

$$AC^2 = AB.AD \qquad (2)$$

Scăzînd membru cu membru relaţiile (1) şi (2) obţinem :

$$BC^2 - AC^2 = AB \cdot BD - AB \cdot AD = AB\,(BD - AD) = AB \cdot AB = AB^2$$

adică teorema lui Pitagora, relativă la triunghiul dat ABC.

2. Teorema catetei poate fi demonstrată folosind cîte odată teorema lui Pitagora şi teorema înălţimii.

Considerăm de data aceasta, ca triunghi dat, triunghiul dreptunghic BCD în care CA este înălţime. Teorema lui Pitagora aplicată triunghiului ABC ne dă :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \tag{3}$$

iar teorema înălţimii aplicată triunghiului BCD :

$$AC^2 = AB \cdot AD. \tag{4}$$

Introducînd pe AC^2 din (4) în (3) obţinem :

$$BC^2 = AB^2 + AB.AD = AB(AB + AD) \text{ sau : } BC^2 = AB.BD$$

care exprimă teorema catetei în triunghiul dat BCD.

3. Deasemenea, teorema înălţimii poate fi dedusă folosind cîte odată teorema lui Pitagora şi teorema catetei.

Considerăm şi aici ca triunghi dat pe BCD. În triunghiul ABC, teorema lui Pitagora ne dă :

$$AC^2 = BC^2 - AB^2, \tag{5}$$

iar teorema catetei în trunghiul BCD :

$$BC^2 = BD.AB.$$

Introducînd pe BC^2 din (6) în (5) avem :

$$AC^2 = BD.AB - AB^2 = AB(BD - AB) \text{ sau : } AC^2 = AB.AD \tag{6'}$$

care este expresia teoremei înălţimii în triunghiul dat BCD.

N. O. Zaharia, Bucureşti

4. *O demonstraţie a teoremei lui Pitagora*

Fie ABC un triunghi dreptunghic. Ridicăm în B o perpendiculară pe BC care întîlneşte prelungirea laturii AC în D. Notăm pentru prescurtare : $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $AD = x$.

În triunghiul dreptunghic DBC, teorema catetei, aplicată catetei $BC = a$, dă : $a^2 = (b + x).b$, sau $a^2 = b^2 + xb$.

Teorema înălţimii, aplicată în acelaşi triunghi, dă $c^2 = x.b$.

Înlocuind în relaţia de mai sus, obţinem : $a^2 = b^2 + c^2$.

M. Popescu, Slatina

NOTE MATEMATICE

20. In legătură cu problema 7182

Problema 7182 dată la *O. I. M.*, Berlin 1965 are enunţul :

Se dă un triunghi OAB, al cărui unghi O are măsura $\alpha < 90°$. Dintr-un punct oarecare M (diferit de O) din planul triunghiului OAB, se duc perpen-

dicularele MP pe OA și MQ pe OB. Se notează cu H ortocentrul triunghiului OPQ. Care este locul geometric al punctului H dacă M parcurge : a) latura AB ; b) interiorul triunghiului OAB.

Dacă ducem $BB' \perp OA$ și $AA' \perp OB$, atunci $A'B'$ este antiparalelă cu AB, patrulaterul $BA'B'A$ fiind inscriptibil, deci $\sphericalangle OB'A' = \sphericalangle OBA$. Rezultă asemănarea triunghiurilor $OB'A'$ și OBA.

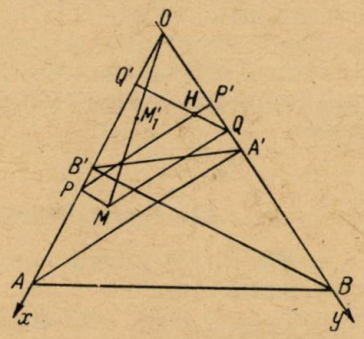
Fie P' proiecția lui P pe OA' și Q' proiecția lui Q pe OB'. Avem :

$$\frac{OP}{PA} = \frac{OP'}{P'A'}$$

deci P și P' sînt puncte omoloage pe laturile OAB și OA', fiind puncte care împart în același raport laturile omoloage OA și OA'.

Analog, $\frac{OQ}{QB} = \frac{OQ'}{Q'B'}$ căci $QQ' \| BB'$.

Deci M și H sînt puncte omoloage în triunghiurile asemenea OAB și $OA'B'$, fiind obținute prin construcții analoage, prin intersecția perpendicularelor în P și Q pe OA și OB (punctul M) și intersecția perpendicularelor în P' și Q' pe OA' și OB'. Deci, cînd M descrie o curbă oarecare în planul triunghiului OAB, H fiind omologul lui M din triunghiul OAB în triunghiul $OA'B'$, asemenea cu el, descrie o curbă asemenea, raportul de asemănare fiind raportul de asemănare al triunghiurilor OAB și $OA'B'$.



Deci, cînd M descrie latura AB, omologul H descrie dreapta $A'B'$, care este omoloagă dreptei AB din triunghiul AOB în triunghiul $OA'B'$ asemenea cu el. La fel, cînd M descrie cercul OAB, H descrie cercul $OA'B'$. Cînd M descrie o elipsă, hiperbolă sau parabolă etc., în planul triunghiului OAB, H omologul lui M din triunghiul OAB în triunghiul asemenea $OA'B'$, descrie o curbă asemenea.

Reciproc, cînd H e un punct oarecare și $HP' \perp OB$ taie pe OA în P și $HQ' \perp OA$ taie pe OB în Q. Perpendicularele în Q pe OB și P pe OA se taie în M omologul punctului H, considerat în triunghiul $OA'B'$ în raport cu triunghiul OAB asemenea cu el, deci, cînd H descrie o curbă oarecare, omologul său M, din triunghiul $OA'B'$ în raport cu triunghiul OAB, descrie o curbă asemenea. Și deoarece cînd M descrie o curbă oarecare, mijlocul M_1 al lui OM este centrul cercului OPQ. Deci, cînd ortocentrul H al unui triunghi OPQ care are laturile OP și OQ fixe, descrie o curbă oarecare, centrul M_1' al cercului circumscris tringhiului OPQ descrie o curbă asemenea.

Deci, ceea ce este extrem de interesant, deși inițial proprietățile le deducem din asemănarea triunghiului OAB cu triunghiul $OA'B'$ (A',B' fiind picioarele înălțimilor) nu interesează pozițiile punctelor A și B pe laturile unghiului fix xoy, deci putem enunța în general :

Fiind dat un unghi oarecare cu laturile Ox și Oy fixe, M fiind un punct

oarecare din plan ce descrie o curbă oarecare, P și Q fiind proiecțiile punctului M pe Ox și Oy, ortocentrul H al triunghiului OPQ descrie o curbă asemenea cu cea descrisă de punctul M.

Reciproc cînd H, ortocentrul unui triunghi POQ cu laturile unghiului O fixe, descrie o curbă oarecare, centrul M_1' al cercului circumscris acestui triunghi descrie o curbă asemenea.

Analog, cînd M descrie cercul ce trece prin centrul cercului OAB și prin punctele A, B, punctul H descrie cercul *Euler* al triunghiului OAB (cercul ce trece prin A' și B' și prin centrul cercului $OA'B'$).

De asemenea, observînd că două puncte omoloage M și H din cele două triunghiuri asemenea OAB și $OA'B'$ unite cu vîrful O sînt două izogonale în unghiul O, rezultă că simedianele, care sînt izogonalele medianelor, trec deci prin mijloacele laturilor triunghiului ortic.

— N fiind mijlocul laturii AB, se observă ușor că N este polul laturii $A'B'$ în raport cu cercul $OA'B'$. Rezultă că simedianele trec prin polurile laturilor opuse.

— O_1, O_2, O_3 fiind centrele cercurilor ce trec prin centrul cercului circumscris triunghiului OAB și două din vîrfuri, O, fiind centrul cercului Euler al triunghiului ABC, atunci O_1 și O sînt puncte omoloage din triunghiurile OAB și $OA'B'$, deci OO_1 și OO sînt drepte izogonale. Rezultă problema cunoscută, că dreptele care unesc vîrfurile unui triunghi oarecare cu centrul cercului ce trece prin celelalte două vîrfuri și prin centrul cercului circumscris triunghiului, sînt concurente în izogonalul centrului cercului *Euler*.

M. Grünbaum, I. S. P. F., București

21. Generalizarea problemelor 4881, 5001 și 6925

Fie $f(x)$ o funcție convexă pe intervalul $[a_1, a_n]$. În acest interval, considerăm punctele $a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$. În punctele M_i avînd coordonatele $x_i = a_i$; $y_i = f(a_i)$, considerăm masele pozitive m_i. Centrul de greutate G are coordonatele :

$$X = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i a_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i};$$

$$Y = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i f(a_i)}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Funcția fiind convexă pe intervalul $[a_1, a_n]$, avem $f(X) \leqslant Y$, de unde rezultă :

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i a_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} m_i f(a_i) \qquad (1)$$

Avem semnul egal dacă a_i = constant sau dacă funcția $f(x)$ este de gradul I.

În cazul particular cînd $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, $(A > 0)$, deoarece $f''(x) = 2A > 0$, funcția este convexă pe orice interval.

Pentru $n = 3$, se obțin problemele 5001 și 4881 pe care le-am propus în *G.M.B.*

De asemenea problema 6925 se obține ca un caz particular a inegalității (1).

În cazul cînd funcția $f(x)$ este concavă semnul inegalității se schimbă.

C. Ionescu-Țiu

PROBLEME REZOLVATE

Problema 7095

La o adunare au participat 225 oameni. Fiecare își salută numai cunoscuții printr-o strîngere de mînă. Demonstrați că cel puțin unul dintre cei prezenți a strîns mîna unui număr par de cunoscuți.

C.d.p. Uspenski V. A., URSS

I. *Soluție* dată de *N. Manolache*, lic. 5 București. — Vom demonstra problema prin reducere la absurd. Presupunem că fiecare a strîns mîna unui număr impar de oameni : primul a strîns mîna a $(2k_1 + 1)$ oameni, al doilea a $(2k_2 + 1)$ oameni, ..., al 225-lea a strîns mîna a $(2k_{225} + 1)$ oameni. Numărul total al strîngerilor de mînă este :

$$\frac{\sum_{i=1}^{225} (2k_i + 1)}{2}$$

căci, făcînd suma numărăm fiecare strîngere de mînă de două ori. Dar, acest număr $\frac{\sum_{i=1}^{225} (2k_i + 1)}{2}$ nu este întreg, ceea ce contrazice presupunerea făcută. Rămîne că cel puțin unul dintre participanții la adunare a strîns mîna unui număr par de cunoscuți.

Generalizare. — Problema admite o generalizare imediată. O formă de prezentare a acestei generalizări este următoarea :

Se dau în plan sau în spațiu, un număr impar de puncte în așa fel încît să fie trei puncte coloniare. Unind punctele arbitrar între ele, în așa fel încît prin fiecare punct să treacă cel puțin o dreaptă, se va găsi cel puțin un punct din care pornește un număr par de drepte.

Demonstrația acestei chestiuni este aceeași cu demonstrația cazului particular demonstat.

II. *Soluție și generalizare* date de *Dan Voiculescu*, elev București.

Dacă nu avem strîngeri de mînă, atunci fiecare are 0 strîngeri de mînă (un număr par). Numărul de oameni cu număr impar de strîngeri de mînă este atunci 0, adică un număr par.

După n strîngeri de mînă, să presupunem că numărul oamenilor cu număr impar de strîngeri de mînă este par. (Ceea ce este valabil în orice caz, pentru $n = 0$).

a) Acum, dacă un om cu un număr impar de strîngeri de mînă, salută tot pe unul cu număr impar de strîngeri de mînă, atunci amîndoi trec în categoria celor cu număr par de strîngeri de mînă. Numărul celor cu număr impar de strîngeri de mînă se micşorează cu 2, deci număr par.

b) La fel, dacă se salută doi oameni cu număr par de strîngeri de mînă atunci numărul celor cu număr impar de strîngeri de mînă, creşte cu 2 şi rămîne par.

c) În sfîrşit, dacă un om cu număr impar de strîngeri de mînă, saluta pe unul cu număr par de strîngeri de mînă, atunci numărul de oameni din fiecare categorie rămîne neschimbat, fiindcă cei doi care s-au salutat au trecut acum dintr-o categorie în cealaltă.

Aceste trei cazuri epuizează toate posibilităţile şi după cum am văzut, numărul de oameni cu număr impar de strîngeri de mînă, rămîne par.

Fie numărul n al oamenilor adunaţi impar.

Printre ei sînt m cu număr impar de strîngeri de mînă. Am dovedit însă tocmai că m este par. Rezultă că numărul $n - m$ al oamenilor cu număr par de strîngeri de mînă este impar şi prin urmare mai mare sau egal cu unu.

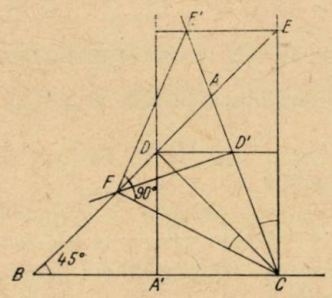
Problema 7132

În triunghiul ABC în care $\measuredangle B = 45°$ perpendicularele ridicate în A' (mijlocul lui BC) şi în C pe latura BC intersectează latura AB respectiv în D şi E. Paralelele duse prin D şi E la BC intersectează latura AC în D' şi E' iar perpendiculara ridicată în D' pe AC intersectează pe AB în F. Să se arate că unghiul $E'FC$ este drept. (În legătură cu problema 6571).

Theodor Gh. Cocea, Bucureşti

Soluţia autorului. Unghiul BDC este de 90° căci triunghiul BDC este isoscel şi unghiul $B = 45°$.

Rezultă că patrulaterul $DFCD'$ este inscriptibil căci $\measuredangle FDC = \measuredangle FD'C = 90°$.



De asemenea $\measuredangle DCE = 45°$ căci $\measuredangle DCB = 45°$.

Rezultă că $\measuredangle DCF = \measuredangle DD'F$ dar şi $\measuredangle ECE' = \measuredangle DD'F$ căci au laturile perpendiculare EC pe DD' şi $E'C$ pe $D'F$.

Rezultă $\measuredangle DCF = \measuredangle ECE'$ şi deci $\measuredangle FCD' = 45°$ căci $\measuredangle DCE = 45°$.

Triunghiul $E'FC$ este însă isoscel deoarece D' este la mijlocul lui CE' aşa cum rezultă din construcţie. (Triunghiul dreptunghic BCE este şi el isoscel avînd unghiul $B = 45°$. D este la mijlocul lui BE, A' fiind mijlocul lui BC. DD' şi EE' sînt paralele la BC şi deci D' este mijlocul lui $E'C$).

Rezultă că şi $\measuredangle F'EC = 45°$ şi deci $\measuredangle E'F'C = 90°$

Notă. Problema a fost dedusă din studiul figurii problemei 6571. Se vede mai bine legătura între cele două probleme dacă se ia în triunghiul ABC unghiul $B = 45°$ şi unghiul $A > 90°$.

Problema 7134

Fără a utiliza valorile numerice ale funcțiilor trigonometrice să se demonstreze inegalitatea $\cos 36^\circ > \operatorname{tg} 36^\circ$.

T. Gh. Oțel, (Odesa, U.R.S.S.)

Soluție dată de *Virgil Stanciu*, elev Tîrgoviște.

Fie în triunghiul ABC cu $AB = BC = 1$, $\sphericalangle ABC = 36^\circ$, $AL \perp BC$, T — punctul de intersecție al bisectoarelor, $BE \perp BT$, $E \equiv (BE, AT)$.

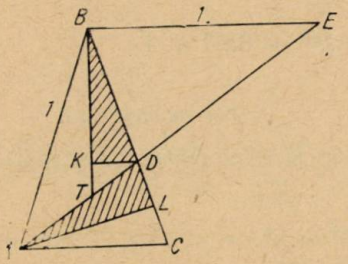
Atunci $\sphericalangle BAD = \frac{1}{2} \sphericalangle BAC = \frac{1}{2} \cdot 72^\circ = 36^\circ$, $\sphericalangle ABE = 18^\circ + 90^\circ = 108^\circ$, $\sphericalangle BEA = 180^\circ - (108^\circ + 36^\circ) = 36^\circ$ și deci $BE = AB = 1$

Din triunghiurile ALB și TBE avem :

$$BL = \cos 36^\circ, \quad BT = \operatorname{tg} 36^\circ.$$

Să arătăm că $BL > BT$.

Ducînd $DK \perp BT$, avem $\Delta BKD = \Delta ALD$ ($AD = BD$, $\sphericalangle DBK = \sphericalangle DAL = 18^\circ$), deci $DL = DK$ și



$$\cos 36^\circ = BL = BD + DL = BD + DK$$

$$\operatorname{tg} 36^\circ = BT = BK + KT.$$

În triunghiul TKD, $\sphericalangle KDT = 36^\circ$ și $\sphericalangle KTD = 54^\circ$, deci

$$KD > KT. \tag{1}$$

În triunghiul BKD, BD este ipotenuză, deci

$$BD > BK \tag{2}$$

Adunînd inegalitățile (1) și (2), obținem :

$$BD + DK > BK + KT, \text{ adică}$$

$$BL > BT, \quad \cos 36^\circ < \operatorname{tg} 36^\circ.$$

Problema 7135

Să se demonstreze identitatea :

$$\frac{C_m^k \cdot C_n^{s+1} \cdot C_{p+1}^{r+1} + C_n^s \cdot C_p^{r+1} \cdot C_{m+1}^{k+1} + C_p^r \cdot C_m^{k+1} \cdot C_{n+1}^{s+1}}{C_m^{k+1} \cdot C_n^s \cdot C_{p+1}^{r+1} + C_n^{s+1} \cdot C_p^r \cdot C_{m+1}^{k+1} + C_p^{r+1} \cdot C_m^k \cdot C_{n+1}^{s+1}} = 1$$

Parascan Ilie, Moinești

Soluție dată de *Lucia Popa*, elevă Petroșeni.

Considerăm următorul determinant :

$$D = \begin{vmatrix} C_m^k & C_n^s & C_p^r \\ C_m^{k+1} & C_n^{s+1} & C_p^{r+1} \\ C_{m+1}^{k+1} & C_{n+1}^{s+1} & C_{p+1}^{r+1} \end{vmatrix}$$

Acest determinant este nul deoarece linia a III-a este o combinație liniară a celorlalte două linii :

$$C_m^k + C_m^{k+1} = C_{m+1}^{k+1} \text{ etc.}$$

Dezvoltînd acest determinant după elementele primei linii obținem

$$C_m^k (C_n^{s+1} \cdot C_{p+1}^{r+1} - C_{n+1}^{s+1} \cdot C_p^{r+1}) - C_n^s (C_m^{k+1} \cdot C_{p+1}^{r+1} - C_{m+1}^{k+1} \cdot C_p^{r+1}) +$$
$$+ C_p^r (C_{n+1}^{s+1} + C_m^{k+1} - C_n^{s+1} \cdot C_{m+1}^{k+1}) = 0$$

Trecînd termenii negativi în membrul drept avem :

$$C_m^k \cdot C_n^{s+1} \cdot C_{p+1}^{r+1} + C_n^s \cdot C_p^{r+1} \cdot C_{m+1}^{k+1} + C_p^r \cdot C_m^{k+1} \cdot C_{n+1}^{s+1} =$$
$$= C_m^{k+1} \cdot C_n^s \cdot C_{p+1}^{r+1} + C_n^{s+1} \cdot C_p^r \cdot C_{m+1}^{k+1} + C_p^{r+1} \cdot C_m^k \cdot C_{n+1}^{s+1}$$

Împărțind egalitatea cu expresia din membrul drept obținem identitatea cerută.

Problema 7136

Să se arate că polinomul

$$x^{120} - 6x^{100} + 15x^{80} - 20x^{60} + 15x^{40} - 6x^{20} + 1$$

se divide cu $(x-1)^6$

Bal Iuliana, Cluj

Soluție dată de *Botez Dan*, elev București și *Iliescu Dinu*, București. Notăm $x^{20} = u$. Obținem polinomul

$$u^6 - 6u^5 + 15u^4 - 20u^3 + 15u^2 - 6u + 1 = (u^6 - u^5) + (-5u^5 + 5u^4) +$$
$$+ (10u^4 - 10u^3) + (-10u^3 + 10u^2) + (5u^2 - 5u) + (-u + 1) =$$
$$= u^5(u-1) - 5u^4(u-1) + 10u^3(u-1) - 10u^2(u-1) + 5u(u-1) - (u-1) = (u-1)(u^5 - 5u^4 + 10u^3 - 10u^2 + 5u - 1) =$$
$$= (u-1)(u^5 - u^4) + (-4u^4 + 4u^3) + (6u^3 - 6u^2) +$$
$$+ (-4u^2 + 4u) + (u-1) = (u-1)u^4(u-1) - 4u^3(u-1) +$$
$$+ 6u^2(u-1) - 4u(u-1) + (u-1) = (u-1)(u-1)(u^4 - 4u^3 +$$
$$+ 6u^2 - 4u + 1) = (u-1)(u-1)u^3(u-1) - 3u^2(u-1) +$$
$$+ 3u(u-1) - (u-1) = (u-1)(u-1)(u-1)(u^3 - 3u^2 +$$
$$+ 3u - 1) = (u-1)(u-1)(u-1)(u-1)^3 = (u-1)^6,$$

dar $u - 1 = x^{20} - 1$, care este divizibil prin $(x-1)$.

Problema 7137

Să se demonstreze că relația

$$x + y + z = xyz$$

implică dubla inegalitate :

$$9 \leqslant yz + zx + xy \leqslant \frac{9 + x^2y^2z^2}{4}$$

unde x, y, z *sînt numere strict pozitive.*

Chițescu Ion, elev București

Soluția autorului. 1. Considerăm cunoscuta inegalitate :

$$(x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geqslant 9$$

care aici se scrie :

$$xyz\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geqslant 9, \text{ sau}$$

$$yz + zx + xy \geqslant 9$$

adică prima parte a dublei inegalității din enunț.

2. Se cunoaște inegalitatea :

$$(y + z - x)(z + x - y)(x + y - z) \leqslant xyz \qquad (1)$$

Dacă notăm $x + y + z = xyz = p$, (1) devine :

$(p - 2x)(p - 2y)(p - 2z) \leqslant p$, sau

$p^3 - 2(x + y + z)p^2 + 4(yz + zx + xy)p - 8p \leqslant p$ sau

$p^3 - 2p^3 + 4(yz + zx + xy)\, p \leqslant 9p$ sau

$4(yz + zx + xy) \leqslant 9 + p^2$ sau, în definitiv,

$$yz + zx + xy \leqslant \frac{9 + x^2y^2z^2}{4}$$

adică a doua parte a dublei inegalității din enunț.

Inegalitățile folosite pentru demonstrație sînt valabile pentru numere pozitive. Avem egalitate pentru $x = y = z = \sqrt{3}$.

Problema 7138

Se dă polinomul :

$$P(x, y, z) = (x^2 + y^2 + axz)^2 - y^2(x - y)^2 + (x + y + az)^2$$

și se cere să se determine a astfel încît $P(x, y, z)$ *să se dividă prin* $x^2 + y^2 - xz - yz$. *Să se determine cîtul.*

Miron Oprea, Ploiești

Soluție dată de *Dinu Iliescu*, București.

Făcînd calculele, polinomul se mai poate scrie :

$P(x, y, z) = (x - y)\ [(x + y)(x^2 + y^2 + a^2z^2) + 2az(x^2 + y^2 + xy)]$ în care dacă înlocuim $z = \frac{x^2 + y^2}{x + y}$, avem

$$(x^2 + y^2)(1 + a)^2 + 2xy\,(1 + a) = 0$$

de unde $a = -1$ sau $a = -\frac{(x + y)^2}{x^2 + y^2}$.

În cazul $a = -1$, avem:

$P(x, y, z) = (x - y)\,[(x + y)(x^2 + y^2 + z^2) - 2z(x^2 + y^2 + xy)] = (x - y)(x + y - z)(x^2 + y^2 - zx - zy)$. Deci:

$$Q(x, y, z) = (x - y)(x + y - z).$$

În cazul $a = -\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$, avem:

$$P(x, y, z) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\,[(x^2 + y^2)^3 + z^2(x + y)^2 - 2z(x + y)(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + xy)],$$

deci $P(x, y, z)$ nu mai este un polinom.

Dacă împărțim al doilea factor la: $-(x + y)z + x^2 + y^2$, obținem: $(x^2 + y^2)^2 - (x + y)^3 z$. Deci în acest caz cîtul este: $Q(x, y, z) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\,[(x^2 + y^2)^2 - (x + y)^3 z]$, deci o fracție.

Observare. Pentru cazul $a = -1$, problema se află în *Culegerea de probleme de algebră* de *C. Coșniță* și *F. Turtoiu*, sub nr. 19, pag. 207.

Problema 7143

Fie șirul $a_n = \left[\frac{(a + n)!}{n!\, n^a}\right]^n$, *unde* a *este un număr natural.*

1. *Să se calculeze limita șirului* a_n.

2. *Dacă notăm* $f(a) = \lim_{n\to\infty} a_n$, *să se demonstreze:*

$$f(1).f(2)\ldots f(a) = \sqrt[3]{f(a)^{a+2}}$$

Iulius Ambrosius, Sighișoara

Soluție dată de *Eleodor Popescu*, elev Turnu Severin.
Avem consecutiv

$$a_n = \left[\frac{(a + n)\cdot(a + n - 1)\ldots(n + 1)\cdot n\ldots 1}{n!\, n^a}\right]^n =$$

$$= \left[\frac{a+n}{n}\cdot\frac{a+n-1}{n}\ldots\frac{n+1}{n}\right]^n = \left(1+\frac{a}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{a-1}{n}\right)^n\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot$$

Șirul a_n s-a descompus astfel într-un produs de a șiruri convergente

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a-1}{n}\right)^n\ldots\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= e^a\cdot e^{a-1}\cdot e^{a-2}\ldots e^1 = e^{\frac{(1+a)a}{2}}$$

2. Avem $f(1).f(2) \ldots f(a) = e^{\frac{1+1^2}{2}} \cdot e^{\frac{2+2^2}{2}} \ldots e^{\frac{a+a^2}{2}} =$

$$= e^{\frac{(1+2+\ldots+a)+(1^2+2^2+\ldots+a^2)}{2}} = e^{\frac{a(a+1)(a+2)}{6}} = \left[e^{\frac{a(a+1)}{2}}\right]^{\frac{a+2}{3}} = \sqrt[3]{f(a)^{a+2}}.$$

Problema 7145

Să se arate că polinomul:

$$f(x) = (x^{p-1} + ax^{p-2} + \ldots + a^{p-1})\, x^{(p+1)n+1} + a^{(p+1)n+p}$$

este divizibil cu polinomul

$$g(x) = x^p + ax^{p-1} + \ldots + a^{p-1}x + a^p$$

unde a este număr întreg iar p și n numere naturale.

Liviu Pîrșan, student București

Soluție dată de *Dorin Rădulescu*, elev liceul 11 București.

Polinomul $f(x)$ se mai poate scrie

$$f(x) = (x^p + ax^{p-1} + \ldots + a^{p-1}x)x^{(p+1)n} + a^p x^{(p+1)n} - a^p x^{(p+1)n} + a^{(p+1)n+p},$$

sau:

$$f(x) = (x^p + ax^{p-1} + \ldots + a^{p-1}x + a^p)x^{(p+1)n} - a^p(x^{(p+1)n} - a^{(p+1)n}),$$

deci:

$$f(x) = x^{(p+1)n}\, g(x) - a^p\,[(x^{p+1})^n - (a^{p+1})^n],$$

$$f(x) = x^{(p+1)n} \cdot g(x) - a^p(x^{p+1} - a^{p+1})\,[(x^{p+1})^{n-1} + (x^{p+1})^{n-2}(a^{p+1}) + \ldots$$

$$\ldots + (a^{p+1})^{n-1}],$$

deci

$$f(x) = x^{(p+1)n} \cdot g(x) - a^p(x-a) \cdot g(x)\,[(x^{p+1})^{n-1} + \ldots + (a^{p+1})^{n-1}].$$

Avem:

$$f(x) = g(x)\,\{x^{(p+1)n} - a^p\,(x-a)\,[(x^{p+1})^{n-1} + \ldots + (a^{p+1})^{n-1}]\}$$

deci $f(x)$ este divizibil cu $g(x)$.

Observare. În cazul particular $a = 2$; $p = 2$ obținem polinomul $f(x) = (x+2)x^{3n+1} + 2^{3n+2}$ care este divizibil cu $g(x) = x^2 + 2x + 4$, adică enunțul problemei 6736 din G.M. (B) nr. 2 anul 1965.

Problema 7146

Fie un număr natural N. Se notează cu n numărul divizorilor și P produsul divizorilor numărului N. Să se arate că $P^2 = N^n$.

Eugen Popa, elev Iași

Soluție dată de *Andrei Rugină*, elev Roman.

Se știe că fiecărui divizor al unui număr îi corespunde un alt divizor al numărului, astfel ca produsul acestor divizori să fie egal cu numărul considerat. Dacă numărul de la care plecăm este un patrat perfect, atunci există un divizor care nu are pereche (rădăcina patrată a numărului). Vom considera separat aceste două cazuri.

Dacă N nu este patrat perfect, deci n este par, putem forma $\frac{n}{2}$ perechi de divizori al căror produs este N. Deci produsul P al divizorilor este : $P = \underbrace{N \cdot N \ldots N}_{\text{de } \frac{n}{2} \text{ ori}} = N^{\frac{n}{2}}$, iar relația $P^2 = N^n$ este dovedită.

Dacă N este patrat perfect, deci n este impar, putem forma $\frac{n-1}{2}$ perechi de divizori ; al căror produs este N, divizorul $\sqrt{N}$ rămînînd fără pereche. Produsul P va fi în acest caz : $P = \underbrace{N.N \ldots N}_{\text{de } \frac{n-1}{2} \text{ ori}} . N^{\frac{1}{2}} = N^{\frac{n}{2}}$, deci pentru orice N natural avem relația : $P^2 = N^n$.

Problema 7147

Considerăm fețele S_a și S_b ale unui tetraedru. Să se arate că locul geometric al punctului M, aflat pe S_a, cu proprietatea că există un punct N pe S_b astfel încît între A și N să se poată duce pe suprafața tetraedrului trei drumuri distincte de lungimi minime și egale, dintre acelea care traversează cel mult două muchii ale tetraedrului, este aria unui patrulater convex.

Tudor Zamfirescu, București

Soluția autorului. Notăm cu B, C, D vîrfurile feței S_a și cu A, C, D cele ale feței S_b. Desfășurăm tetraedrul pe planul feței S_a. Vîrful A ia pozițiile A', A'', A''', respectiv mai apropiate de BC, CD, DB.

Fie $A'CD'$ poziția feței S_b, considerînd-o alături de fața $A'BC$, iar $A'''C'D$ poziția lui S_b, considerată alături de $A'''BD$.

Considerăm punctele M pe S_a și N pe S_b. După desfășurare, N ocupă pozițiile N' în $A'CD'$, N'' în $A''CD$ și N''' în $A'''C'D$. Drumul cel mai scurt între M și N trecînd prin fața ABC devine, după desfășurare, segmentul MN'. Drumul cel mai scurt între M și N ce taie muchea CD devine segmentul MN''. Drumul cel mai scurt între M și N trecînd prin fața ABD devine segmentul MN'''.

Avem $CN' = CN''$ iar unghiurile $A'CA''$ și $N'CN''$ sînt egale. Pentru ca $MN' = MN''$, trebuie ca și unghiurile CMN' și CMN'' să fie egale, deci ca M să se afle pe bisectoarea unghiului $N'CN''$. Analog, pentru ca $MN'' = MN'''$, trebuie ca M să se afle pe bisectoarea unghiului $N''DN'''$.

Se deduc imediat atît construcţia lui M dat fiind N cît şi cea a lui N, considerîndu-se cunoscut M. Pentru ca aceste construcţii să fie posibile trebuie ca M şi B să se afle de aceeaşi parte a bisectoarei unghiului $A'CA''$ şi de aceeaşi parte a bisectoarei unghiului $A''DA'''$. Întrucît

$$\begin{aligned}
&\sphericalangle A'CB < \sphericalangle BCD + \sphericalangle A''CD,\\
&\sphericalangle A''CD < \sphericalangle BCD + \sphericalangle A''CB,\\
&\sphericalangle A'''DB < \sphericalangle CDB + \sphericalangle A''DC,\\
&\sphericalangle A''DC < \sphericalangle CDB + \sphericalangle A'''DB,
\end{aligned}$$

cele două bisectoare trec prin interiorul triunghiului S_a şi taie respectiv pe BD în E şi pe BC în F. Notînd cu J intersecţia acestor bisectoare, condiţia necesară şi suficientă pentru constructibilitatea lui N este ca M să se afle în interiorul patrulaterului convex $BEJF$.

Problema E : 2341

Două camioane pleacă la aceeaşi oră din două localităţi A şi B unul spre celălalt, întîlnindu-se la $6\frac{2}{5}$ km. de localitatea B. Dacă primul ar fi plecat cu $\frac{1}{12}$ ore mai tîrziu şi al doilea cu $\frac{1}{8}$ ore mai devreme, s-ar fi întîlnit la $6\frac{2}{5}$ km. de localitatea A. Care sînt vitezele celor două camioane precum şi distanţa dintre cele două localităţi ?

Nicola Valeria, profesoară, Prisăcani-Iaşi,

Soluţia autoarei.

Folosim metoda grafică. Plecînd la aceeaşi oră unul spre celălalt cele două camioane se întîlnesc în A'. Primul plecînd mai tîrziu cu $\frac{1}{12}$ ore, înseamnă că distanţa $B'A'$ o parcurge în $\frac{1}{12}$ ore, iar al doilea în $\frac{1}{8}$ ore, ceea ce înseamnă că viteza primului camion este $\frac{12}{8}$ din viteza celui de al doilea camion.

În timpul cît al doilea camion parcurge $6\frac{2}{5}$ km, primul va parcurge $6\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{12}{8}$ km, deci distanţa dintre A şi B va fi de :

$$6\frac{2}{5}\left(1+\frac{12}{8}\right)=6\frac{2}{5}\cdot\frac{20}{8}=\frac{32}{5}\cdot\frac{20}{8}=16 \text{ km.}$$

Distanţa $A'B'$ este de : $6\frac{2}{5}\cdot\frac{12}{8}-6\frac{2}{5}=6\frac{2}{5}\left(\frac{12}{8}-1\right)=3\frac{1}{5}$ km

Viteza primului camion va fi de :

$$3\frac{1}{5}:\frac{1}{12}=3\frac{1}{5}\cdot 12=38\frac{2}{5} \text{ km/oră.}$$

Viteza celui de al doilea camion va fi de :

$$3\frac{1}{5}:\frac{1}{8}=3\frac{1}{5}\cdot 8=25\frac{3}{5}\text{ km/oră.}$$

Problema E : 2345

O cadă este alimentată de două robinete : prin unul curge apă la 15°C, prin celălalt la 60°C. Dacă robinetele sînt deschise amîndouă odată apa din cadă este la temperatura de 30°C. Primul robinet umple singur cada într-o oră. In cît timp se umple cada dacă robinetele sînt ambele deschise.

Dan Brînzei, Iaşi

Soluţie. Aşa cum se ştie, la aceste probleme se raţionează astfel : la robinetul cu apă rece „se cîştigă" 15°C, iar la robinetul cu apă caldă, „se pierd" 30°C. Deci primul robinet are un debit dublu, pentru ca pierderile şi cîştigurile să se compenseze. Deci dacă primul robinet umple cada într-o oră, cel de al doilea o va umple în două ore.

Într-un minut, prin ambele robinete curge o cantitate de apă egală cu $\frac{1}{60}+\frac{1}{120}=\frac{1}{40}$ din capacitatea băii.

Deci robinetele trebuie să curgă împreună 40 minute.

Problema E : 2346

Intr-un triunghi dreptunghic ABC ($\sphericalangle A = 90°$) înălţimea din M a triunghiului AMC unde M este piciorul înălţimii din A a triunghiului ABC, trece prin mijlocul medianei AN a aceluiaşi triunghi ABC. Ce puteţi spune despre unghiurile triunghiului ABC?

* * *

Soluţie : Notăm cu P, Q respectiv punctele de intersecţie ale înălţimii din M a triunghiului cu AN şi AC. Se observă că

$$AN = BN = NC \qquad (1)$$

(întrucît AN este mediana dusă din vîrful unghiului drept al triunghiului ABC).

Pe de altă parte din enunţul problemei se ştie că $AP = PN$ şi întrucît MP urmează că este mediana dusă din vîrful unghiului drept al triunghiului AMN rezultă că :

$$MP = AP = PN = \frac{AN}{2} \qquad (2)$$

Însă MP este linie mijlocie în triunghiul ANB ($AP = PN$ şi $MQ \parallel AB$) şi atunci $MP = \frac{AB}{2}$ (3)

Din (2) şi (3) urmează $AB = AN$. Comparînd cu (1) se vede că $AB = AN = BN$ ceea ce arată că triunghiul ANB este echilateral.

Rezultă atunci că unghiurile ascuţite ale triunghiului dreptunghic ABC sînt 60° şi 30°.

Problema E : 2349

Să se determine un număr de două cifre în baza 10 astfel încît jumătatea lui să fie cu o unitate mai mare decît răsturnatul lui.

Corneliu N. Popescu, Bucureşti

Soluţie.
Fie numărul căutat $10x + y$; din enunţ rezultă :

$$\frac{10x + y}{2} = 10y + x + 1 ; \quad 10x + y = 20y + 2x + 2,$$

de unde : $8x = 19y = +2.$

$$x = \frac{19y + 2}{8} = \frac{16y + 8}{8} + \frac{3y - 6}{8} = 2y + 1 + 3 \cdot \frac{y - 2}{8}$$

y este o cifră ; rezultă că $y - 2 = 0 ; y = 2$ şi $x = 5 ; \frac{52}{2} = 25 + 1.$

CHESTIUNI DE EXAMEN

7580. Să se afle dacă 401 este un număr prim. Să se rezolve în numere întregi ecuaţia : $x^2 - y^2 = 401.$

Bacalaureat, Maroc, iunie 1965

7581. Se consideră funcţia $y = x.\sin x.$
a) Pentru care valori ale lui x această funcţie este definită?
b) Să se calculeze derivata acestei funcţii.
c) Să se studieze variaţia sa pentru x variind între 0 şi $\frac{\pi}{2}$ şi să se traseze cu grijă arcul de curbă corespunzător (Γ) într-un reper ortonormal.
d) Să se calculeze derivata funcţiei $y = \sin x - x \cos x$. Să se deducă aria suprafeţei limitate de (Γ) şi prima bisectoare.
e) Presupunînd pe x oarecare, să se arate că curba de ecuaţie $y = x \sin x$ este tangentă într-o infinitate de puncte la prima bisectoare şi într-o infinitate de puncte la a doua bisectoare. Să se determine aceste puncte.

Bacalaureat, Caen, 1965

7582. Se dă triunghiul ABC, al cărui centru de grentate este G. Fie M un punct din plan.
a) Să se exprime $f(M) = \overline{MB} \cdot \overline{MC} + \overline{MC} \cdot \overline{MA} + \overline{MA} \cdot \overline{MB}$ numai prin lungimile MG, BC, CA, AB.
b) Care este mulţimea E a punctelor M aşa ca $f(M) = 0$? Care puncte din E aparţin cercului de diametru BC?

Bacalaureat elementar, Franţa, 1965

7583. Să se pună expresia $\sqrt{3}\sin x - \cos x$ sub forma $a\cos(x - \varphi)$. Să se studieze variația funcției f definită prin

$$f(x) = \sqrt{\sqrt{3}\sin x - \cos x + 2}$$

în intervalul $[-\pi, +\pi]$. Să se construiască graficul său precizîndu-i-se aspectul în vecinătatea punctului de intersecție cu axa absciselor.

Bacalaureat, Strasbourg, 1965

7584. 1° Se notează prin α și β două numere naturale și cu d un divizor comun al numerelor $\alpha + \beta$ și $\alpha\beta$. Să se demonstreze că d divide în mod necesar numerele α^2 și β^2.

2° Să se deducă din 1° dacă α și β sînt două numere prime între ele; de asemenea, numerele $\alpha + \beta$ și $\alpha\beta$.

3° Fie a și b două numere naturale, Δ cel mai mare divizor comun al lor, m cel mai mic multiplu comun. Să se demonstreze că cele două numere $(a + b) : \Delta$ și $m : \Delta$ sînt prime între ele. Ce se poate conchide cu privire la cel mai mare divizor comun al numerelor $a + b$ și m?

4° Să se găsească două numere întregi naturale, a și b, știind că suma lor este 2704 și cel mai mic multiplu comun 106 848.

Journal de mathématiques élémentaires, 1965

7585. Un punct M este animat de o mișcare vibratorie simplă pe o axă $x'Ox$, centrul mișcării fiind în origină. Perioada mișcării este 1/10 secundă și la momentul inițial, mobilul este la 5 cm de centru și are o viteză de 5 cm/s. Să se scrie ecuația mișcării acestui mobil.

Bacalaureat, Dakar, 1964

7586. Se dă un trapez $ABCD$ dreptunghic în A și B, în care $AB = 2a$, $AD = b$, $BC = c$, O fiind mijlocul lui AB.

a) Să se demonstreze că $OD + OC = AD + BC$.

b) Să se calculeze produsul scalar al celor doi vectori $\overline{OD}$ și $\overline{OC}$. Care sînt relațiile care trebuie să unească pe a, b, c pentru ca unghiul celor doi vectori $\overline{OC}$ și $\overline{OD}$ să fie ascuțit, drept sau obtuz?

Bacalaureat, Tahiti, 1964

7587. Se urmărește lansarea unui satelit care să efectueze un înconjur complet al unei orbite circulare în jurul Pămîntului, în 24 de ore. Se reamintește legea care dă valoarea gravitației $g(z)$ la altitudinea z în funcție de cea la Pămînt $g_0 = 9{,}80$ m/s^2 : $g(z) = g_0 \frac{R^2}{(R + z)^2}$ unde R este raza Pămîntului ($R = 6\,400$ km). Să se determine altitudinea z la care satelitul va trebui să se mențină. Să se deducă valoarea g la această altitudine, apoi viteza v a satelitului pe traiectoria sa.

Bacalaureat matematici elementare, Rennes, 1965

7588. Un tren electric se compune dintr-un vagon motor cîntărind 30 de tone și o remorcă de 24 tone. Motorul funcționează sub un voltaj

de 500 volți și primește un curent de 250 amperi. El furnizează trenului energia primită cu o pierdere de 20%. Trenul urcă o pantă de 4,5% cu o viteză constantă de 4 m/s.

a) Să se calculeze valoarea forței motrice și aceea a rezistenței pe care o învinge trenul.

b) În urma unui accident curentul electric este întrerupt brusc. Ce mișcare va avea trenul? Se pun în funcțiune frînele, care nu lucrează decît două secunde după oprirea curentului. La ce distanță de locul accidentului se găsește atunci trenul? Se admite că rezistențele pasive sînt independente de viteza trenului.

Analele bacalaureatului, Paris 1964

7589. a) Să se studieze variația funcției

$$y = \frac{2x^2 + x + 1}{2x - 1}.$$

Să se arate că y poate fi pus sub forma $y = ax + b + \frac{c}{2x-1}$, a, b, c fiind coeficienți care se vor determina. Să se reprezinte grafic funcția. Asimptote.

b) Să se folosească curba obținută pentru a studia, după valorile parametrului m, existența rădăcinilor ecuației

$$2x^2 - (2m - 1)\,x + m + 1 = 0.$$

c) Să se aplice metoda precedentă la aflarea după valorile parametrului m, a numărului de soluții ale ecuației în α:

$$2\cos^2\alpha - (2m - 1)\cos\alpha + m + 1 = 0,$$

α fiind măsura în grade, a unui unghi al unui triunghi.

Bacalaureat, Lyon, 1965

Din problemele prezentate la O.I.M. 1965 de către țările participante.

(urmare)

Probleme trimise de R. S. F. Jugoslavia

7590. Se dau n obiecte diferite.

a) În cîte feluri se pot împărți aceste obiecte în trei categorii A_1, A_2, A_3 astfel încît în fiecare categorie A_i să intre un număr anumit n_i de obiecte ($i = 1, 2, 3$; $n_1 + n_2 + n_3 = n$)?

b) Aceeași întrebare pentru numărul de categorii egal cu k.

c) Dovediți identitatea:

$$\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\ldots n_k!} = \frac{(n-1)!}{(n_1-1)!\,n_2!\ldots n_k!} + \cdots + \frac{(n-1)!}{n_1!\,n_2!\ldots(n_k-1)!};$$

$$(n_1 + n_2 + \ldots n_k = n)$$

7591. Să se arate că

a) $f(a, b, c) = \left| \frac{|b-a|}{|ab|} + \frac{b+a}{ab} - \frac{2}{c} \right| + \frac{|b-a|}{|ab|} + \frac{b+a}{ab} + \frac{2}{c} =$

$$= 4 \max \left\{ \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \right\};$$

b) $f(a, b, c) = f(b, c, a) = f(c, a, b) = f(a, c, b) = f(c, b, a)$.

7592. Demonstrați egalitatea :

$$\sum_{r, s=0}^{n-1} a_{r-s} = \sum_{k=-n}^{n} (n - |k|) a_k$$

7593. Într-un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile $(10 \times \times 10 \times 1)$ se află bile cu raza 1/2. Care este numărul maxim de bile ?

Probleme trimise de R. P. Mongolă

7594. Într-un tetraedru regulat cu latura a sînt înscrise 4 sfere egale dintre care fiecare este tangentă la celelalte 3 și la 3 fețe ale tetraedrului. Care este raza acestor sfere ?

7595. Arătați că există două drepte perpendiculare care împart un triunghi dat în 4 părți echivalente.

7596. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ o progresie aritmetică de numere reale pozitive. Să se arate că :

$$\sum_{k=1}^{2m-1} \left(\sum_{i=k+1}^{2m} \sqrt[i-k+1]{\prod_{j=k}^{i} a_j} \right) \leqslant \frac{m}{2} (2m-1)(a_1 + a_{2m}).$$

Caz particular :

$$\sum_{k=0}^{2m-1} \left(\sum_{i=k+1}^{2m} \sqrt[i-k+1]{\frac{i!}{(k-1)!}} \right) \leqslant \frac{m}{2} (4m^2 - 1).$$

Probleme trimise de R. P. Polonă

7597. Demonstrați propoziția : dacă a, b, c, d, coeficienții polinomului $ax^3 + bx^2 + cx + d$ sînt numere întregi, astfel încît ad să fie impar și bc par, atunci rădăcinile polinomului nu pot fi toate raționale.

7598. Dovediți că perpendicularele coborîte din mijloacele laturilor unui patrulater inscriptibil pe laturile opuse sînt concurente.

Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil. Să se arate că centrele de greutate ale triunghiurilor ABC, BCD, CDA, DAB formează un patrulater inscriptibil.

Probleme trimise de U.R.S.S.

7599. Pentru care numere reale p, ecuația $x^2 + px + 3p = 0$ are rădăcini întregi ?

7600. Două oglinzi sînt astfel așezate una lîngă cealaltă încît formează un unghi α. Între oglinzi se află o lumînare și un observator. Cîte imagini ale luminării va vedea observatorul? (Caz particular : $\alpha = 60°$).

7601. Se dă o figură patrulateră cu aria S și laturile a, b, c, d. Să se arate că : $S \leqslant \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$.

7602. Decupăm din hîrtie o figură de arie 1. Împărțim prin linii una din fețele figurii de hîrtie în 10 părți, pe care le colorăm cu 10 culori diferite. Întoarcem apoi figura de hîrtie pe cealaltă față, pe care o împărțim (în mod arbitrar) tot în 10 părți. Dovediți că putem colora aceste zece părți cu cele zece culori de mai înainte, astfel încît suma ariilor porțiunilor colorate pe ambele părți cu aceeași culoare să fie mai mare sau cel puțin egală cu 0,1.

Probleme trimise de Republica Socialistă România

7603. Într-un triunghi dat, să se ducă un segment de dreaptă, care se sprijină cu extremitățile pe laturile unuia din unghiurile lui, împarte aria triunghiului în două părți echivalente și îndeplinește condițiile : segmentul are o lungime minimă și se găsește în întregime în interiorul triunghiului dat.

Să se determine unghiul în care trebuie făcută construcția, mărimea segmentului în funcție de laturi și construcția grafică a soluției.

I. Teodorescu, Galați

7604. Se dă un cerc de rază R și centru O și două puncte A și B în planul cercului.

a) Să se ducă o coardă CD paralelă cu AB astfel încît AC și BD să se întîlnească într-un punct P pe cercul dat.

b) Să se arate că în general există două puncte P (P_1 și P_2) care corespund problemei și să se indice cum se poate calcula distanța P_1P_2 notînd $OA = a$, $OB = b$, $AB = d$. Se pot nota prescurtat și alte rezultate intermediare, după ce au fost exprimate în funcție de datele problemei.

C. Ionescu-Țiu

7605. Din șirul numerelor întregi se extrag n numere luate din p în p, a căror sumă este s. Care sînt aceste numere dacă se cunosc p și s?

Aplicații : 1° $p = 1$, $s = 15$; 2° $p = 2$; $s = 30$; 3° $p = 3$, $s = 20$. (În cazul general, se va preciza numărul soluțiilor ; la aplicații se vor scrie efectiv toate soluțiile).

T. Roman

7606. Se consideră un patrulater convex $ABCD$ în care unghiurile opuse A și C sînt drepte.

a) Fie M și N două puncte situate în interiorul patrulaterului sau pe una dintre laturile sale sau într-un vîrf. Să se demonstreze că distanța MN este maximă atunci cînd unul dintre punctele M și N coincide cu vîrful B, iar celălalt cu vîrful D.

b) Se dă un triunghi ascuțitunghic ABC. Să se determine punctul M situat în interiorul triunghiului sau pe una din laturile sale, care să aibă proprietatea următoare: aceea dintre distanțele MA, MB, MC care este cel mult egală cu una sau cu alta dintre celelalte două, să fie maximă.

c) Să se determine punctul N situat în interiorul triunghiului sau pe una dintre laturi, astfel ca aceea dintre distanțele NA, NB, NC care este cel puțin egală cu una sau cu alta dintre celelalte două să fie minimă.

d) Aceleași întrebări pentru cazul cînd triunghiul ABC este obtuzunghic. Se va considera și cazul cînd triunghiul ABC este dreptunghic.

e) Problema analoagă cu cele de la b) și c) cînd în locul triunghiului ABC se consideră un patrulater inscriptibil $ABCD$.

A. Hollinger

7607. Fiind date două cercuri concentrice de raze r, R se cere numărul maxim de cercuri tangente ambelor cercuri, fără ca acestea să se intersecteze. Să se arate că acest număr este cuprins între $\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{R}+\sqrt{r}}{\sqrt{R}-\sqrt{r}}$ și $\frac{63}{20}\cdot\frac{R+r}{R-r}$.

O. Sacter

PROBLEME PROPUSE*

Problemele date la concursul de matematică 1966, etapa regională — 3 aprilie.

Clasa a IX-a

7608. Fie $E_1 = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}}$ și $E_2 = \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$

a) Să se verifice identitățile

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = \sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-4(x-1)}}{2}} + \sqrt{\frac{x-\sqrt{x^2-4(x-1)}}{2}}$$

$$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-4(x-1)}}{2}} - \sqrt{\frac{x-\sqrt{x^2-4(x-1)}}{2}}$$

x fiind un număr real.

b) Să se determine mulțimea valorilor lui x pentru care expresiile E_1 și E_2 au sens.

* La problemele propuse în acest număr al G.M–B se primesc soluții pînă la 30 septembrie 1966.

c) Să se calculeze valoarea numerică a sumei $E_1 + E_2$ pentru $x = \frac{7}{3}$ și $x = \frac{5}{3}$.

Lucia Țene

7609. Într-un triunghi oarecare ascuțitunghic ABC ducem mediana AL și înălțimea AD și fie E și F mijloacele laturilor AB și AC.

Perpendicularele în L pe LE și LF taie laturile AC și AB respectiv în P și Q, iar perpendicularele în D pe DE și DF taie aceleași laturi respectiv în M și N.

a) Să se arate că patrulaterul $APLQ$ este inscriptibil.

b) De asemenea, că patrulaterul $AMDN$ este inscriptibil și ortodiagonal.

c) Să se precizeze care este coarda comună a cercurilor de la punctele *a*) și *b*) precum și linia centrelor.

L. Mănescu, R. Vîlcea

Clasa IX seral

7610. Se dă expresia

$$E(a) = \frac{(1+a)^{-3} + (1-a)^{-3}}{(1+\sqrt{1-a^2})^{-3} + (1-\sqrt{1-a^2})^{-3}},$$

unde

$$a \in (-1, +1).$$

a) Să se aducă la forma cea mai simplă.

b) Să se calculeze cu 2 zecimale exacte $E(\sqrt[4]{3})$

C. Ionescu-Țiu

7611. Se dă un paralelogram $ABCD$. Se numește paralelogram înscris orice paralelogram $MNPQ$ care are vîrfurile pe laturile lui $ABCD$ sau pe prelungirile lor și ale cărui oricare două vîrfuri nu sînt așezate pe suportul aceleiași laturi.

Fie M vîrful așezat pe dreapta AB și P vîrful opus lui M. Se consideră cele trei paralelograme $MNPQ$ astfel încît punctul P să aparțină uneia din dreptele CD, AD sau BC.

a) Să se construiască grafic cîte un paralelogram în fiecare din cele 3 cazuri.

b) Să se demonstreze că în ultimele două cazuri paralelogramul $MNPQ$ are 2 laturi paralele cu una din diagonalele paralelogramului $ABCD$.

Clasa a X-a reală

7612. Să se arate că:

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + i\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^{24} + 2^{24} = 0.$$

C. Ionescu-Țiu

7613. Se consideră prisma dreaptă cu baza patrată $ABCD$. Se intersectează această prismă prin planul (P), care intersectează planul $ABCD$ prin dreapta MN, M și N fiind mijloacele laturi AB, respectiv BC. Planul (P) formează cu planul $ABCD$ un unghi α și taie muchiile laterale AA', DD' și CC' în punctele Q, S, T.

a) Să se determine prin construcție vîrfurile acestui poligon de intersecție $MQSTN$.

b) Să se calculeze perimetrul și aria acestei figuri plane $MQSN$ și limitele între care variază aceste valori, considerînd înălțimea prismei egală cu $\frac{3\sqrt{2}}{4}$, AB și α variabil. Punctul S este situat pe muchia DD'.

c) Să se calculeze volumul corpului mărginit de planul (P), planul bazei $ABCD$ și fețele laterale ale prismei.

Margareta Boer, Cluj

7614. Să se demonstreze egalitatea:

$$\frac{2\sin a}{\cos a - \cos 3a} + \frac{2\sin a}{\cos a - \cos 5a} \frac{2\sin a}{\cos a - \cos 7a} + \ldots + \\ + \frac{2\sin a}{\cos a - \cos (2n+1)a} = \frac{\sin na}{\sin [(n+1)a] \sin a},$$

n fiind număr natural.

Al. Lalescu, Cîmpina

Clasa a XI-a reală

7615. Pe axele perpendiculare xoy, se iau punctele A pe Ox, B pe Oy și fie (D) o dreaptă oarecare din planul axelor. Vîrfurile triunghiului AOB se proiectează pe (D) în punctele A', O', B', iar din aceste proiecții se duc perpendiculare pe laturile opuse OB, AB, OA ale triunghiului.

a) Să se arate că perpendicularele duse din A', O', B' sînt concurente într-un punct K.

b) Dacă dreapta (D) se mișcă paralel cu o direcție fixă, să se găsească locul punctului K.

c) Dacă punctele A, B se mișcă pe axele Ox, Oy, dar segmentul AB rămîne constant ca lungime, să se arate că locul lui K este un cerc, căruia să i se afle raza (dreapta (D) este fixă).

I. Teodorescu, Galați

7616. Se consideră funcția $f(x) = \frac{|x|-1}{|x|+1} \cdot \ln \frac{x^2+1}{|x|+1}$.

a) Să se arate că f este continuă.

b) Să se scrie derivata funcției pentru $x \neq 0$ și să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f'$ și $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f'$

A. Halanay și *Al. Lalescu*

Școli pedagogice anul II

7617. Se dă ecuația:

$$2m\,x^3 + (2 - 3m)x^2 - (2 - 3m)\,x - 2m = 0$$

(m parametru real).

a) Să se rezolve.

b) Rădăcinile fiind x_1, x_2, x_3 (x_2 fiind rădăcina care nu conține pe m) să se arate că oricare ar fi m, rădăcinile sînt în progresie geometrică.

c) Să se afle m astfel ca x_1, $3x_2$, x_3 să fie în progresie aritmetică.

d) Să se determine m ca să existe relația:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = \frac{6+5m}{8m}$$

Elena Flondor, București

7618. Se dau 2 cercuri concentrice astfel ca $R = 2r$.

Fie EF un diametru, al cercului mare și S, T punctele unde el intersectează cercul mic (T între O și F). Pe tangenta în T se iau segmentele $TA = TB$ și $BC = AD = 2\,AT$. (A și B fiind intersecțiile acestei tangente cu cercul mare).

a) Să se arate că triunghiul EDC este isoscel, ABE echilateral și că CO trece prin I mijlocul lui DE.

b) Dacă M este mijlocul lui OC, să se arate că

$$TM = OI = \frac{OD}{2}.$$

c) Să se arate că $\sphericalangle BEC = \frac{\sphericalangle CDE}{4}$.

d) Prelungind EA și EB pînă intersectează tangenta în F la cercul mare în punctele G și H, să se arate că trapezele $ABHG$ și $CDGH$ sînt isoscele.

Ana Gereanu, București

Școli pedagogice — anul III

7619. O cooperativă agricolă de producție are 570 ha teren arabil, iar alta 760 ha. Pentru aratul de toamnă, la fiecare c.a.p. vine cîte o brigadă de tractoriști, care se angajează să are cîte 20 ha pe zi; după cîte zile a doua c.a.p. mai are de arat dublu cît prima? În primăvară, ambele c.a.p. fac însămînțări astfel încît la prima aceste însămînțări reprezintă 62% din suprafața însămînțată a celeilalte. Restul de teren al fiecărei c.a.p. este arat de cîte o brigadă de tractoriști, în același timp, arînd cîte 26 ha zilnic.

Ce suprafață a fost însămînțată de fiecare c.a.p.? În cîte zile a fost arat de către fiecare brigadă terenul neînsămînțat?

Vasile Bobancu, București

7620. Două cercuri (O_1) și (O_2) de raze R_1 și R_2 ($R_1 > R_2$) sînt tangente exterior.

a) Să se arate că tangenta lor comună exterioară (mărginită la punctele de tangenţă A, B) este medie proporţională între diametrii celor două cercuri.

b) Tangenta comună exterioară de mai sus taie linia centrelor în punctul T. Să se afle lungimile segmentelor TB şi TO_2.

c) Din centrul cercului (O_1) se duce o tangentă la primul cerc. Fie N punctul de tangenţă. Să se calculeze segmentul MN.

Dalvina Bergheanu, Bucureşti

Anul I şcoli tehnice de maiştri

7621. Se dă ecuaţia

$$mx^2 - 2(m-2)x - m + 3 = 0 \qquad (1)$$

Se cere:

a) Să se afle valorile lui m pentru care ecuaţia are rădăcini reale.

b) Să se determine valoarea lui m astfel ca

$$\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} = -4,$$

în care x_1 şi x_2 sînt rădăcinile ecuaţiei date.

c) Făcînd în membrul I al egalităţii (1) pe $m = 3$ şi egalînd acest membru cu y, să se reprezinte grafic funcţia obţinută.

E. Reinhammer, Bucureşti

★

7622. Pe un semicerc cu centrul în O şi diametrul AOA' se consideră două puncte M şi N astfel ca arcul MN să fie de 90°, iar arcul $AM = \alpha$. Simetricul lui N faţă de AA' este punctul N'. Piciorul perpendicularei duse din M pe AA' este I. Dreptele NN' şi MN' taie respectiv pe AA' în K şi P. Se cere:

a) Să se arate că dreapta NP este perpendiculară pe MP.

b) Să se afle lungimea segmentului OP.

c) Care este lungimea liniei frînte MPN.

d) Ce valoare are unghiul α cînd OP este zero şi care este atunci lungimea liniei frînte MPN.

e) Să se afle suma ariilor triunghiurilor NKP şi MIP.

* * *

7623. Doi oameni, Petre şi Paul, împreună cu fiii lor George şi Ion, cumpără cărţi. Fiecare carte cumpărată de oricare dintre ei costă atîţia lei cîte cărţi a cumpărat.

Fiecare familie — tată şi fiu — cheltuieşte 65 lei. Petre a cumpărat o carte mai mult decît George, iar Ion o singură carte. Cum îl cheamă pe tatăl lui Ion?

c.d.p.

7624. Un mobil M porneşte dintr-un punct P de pe pămînt şi parcurge o milă spre sud şi schimbă apoi direcţia şi parcurge o milă spre Est. După aceea o ia din nou spre stînga şi parcurge o milă spre Nord, ajungînd în punctul P de unde plecase. Cîte poziţii poate avea P?

c.d.p.

7625. Sherlok Holmes în vizită la prietenul său Dr. Watson, întreabă :

— Watson, toți copiii aceia care se joacă în curte sînt ai tăi?

— Nu, răspunde, Watson, O parte din ei sînt ai mei, o parte ai sorei mele, o parte ai fratelui meu și o parte ai unchiului meu. Eu am mai mulți copii decît sora mea, sora mea mai mulți decît fratele meu și acesta are mai mulți decît unchiul meu. Toți acești copii se ceartă acum, pentru că împreună nu pot forma două echipe avînd fiecare cîte nouă inși. Dacă înmulțim numerele care exprimă cîți copii avem fiecare, produsul efectuat coincide cu numărul de la casa mea, pe care-l știi. După puțină chibzuință Sherlok Holmes spune :

— Watson, datele acestea nu-mi sînt suficiente. Spune-mi, unchiul tău are un singur copil, sau doi?

Watson i-a răspuns și vizitatorul a dedus apoi cîți copii are fiecare. Care este numărul casei Dr. Watson și cîți copii avea fiecare familie?

c.d.p.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE PENTRU CLASELE V — VIII*

E : 2512. Doi muncitori fac o lucrare împreună în 15 ore. După 12 ore de lucru împreună, primul muncitor pleacă la altă lucrare, iar al doilea trebuie să lucreze 5 ore pentru a termina lucrarea.

În cît timp face lucrarea fiecare muncitor?

Octavian Sulă, Vaslui

E : 2513. Pentru 25 cămăși bărbătești s-a plătit cu 1280 lei mai scump decît pentru 15 cămăși de damă, iar 25 cămăși bărbătești sînt mai ieftine cu 1170 lei decît 40 de cămăși de damă.

Cît costă o cămașă bărbătească și cît o cămașă de damă?

B. Baeră, Păunești

E : 2514. O echipă de muncitori putea să termine o lucrare în 16 ore, iar altă echipă putea să termine aceeași lucrare în 24 ore. După ce au lucrat împreună cele două echipe timp de 4 ore a fost adusă o a treia echipă. Aceasta putea să termine singură lucrarea întreagă în 8 ore.

În cît timp au terminat partea rămasă din lucrare cele trei echipe, lucrînd împreună?

I. Rotaru, profesor Tr. Severin

E : 2515. Un televizor care costă 4200 lei a fost plătit cu 87 monede : de 100 și de 25 lei. Cîte monede au fost de 25 lei și cîte de 100 lei?

Nelu I. Dobre, Merei Buzău

E : 2516. Un autobuz face două curse pe zi. În prima cursă a consumat 60% din combustibilul ce avea. În a doua cursă, a consumat 80% din restul de benzină, după care mai avea în rezervor 1 litru de benzină. Să

---

* V (E : 2512—2515); VI (E : 2516—2519); VII (2520—2523); VIII (E : 2524—2527). Soluțiile se primesc pînă la 30 septembrie 1966.

se afle cu ce cantitate de combustibil s-a făcut aprovizionarea acestui autobuz pentru ziua respectivă.

D. Mîrzan, R. Vîlcea

E : 2517. Să se calculeze :

$$\frac{\left(2\frac{1}{2}-1\right)\frac{2}{5}+2\left(1,08-\frac{2}{25}\right):\frac{2}{3}}{\left(5\frac{1}{3}-3\frac{3}{4}\right):1\frac{7}{12}+2}\cdot\left(2-0,8:2\frac{2}{5}\right)\cdot\sqrt{156,25}$$

La admitere în cl. IX, Suceava 1965

E : 2518. Conform planului, 2 uzine producătoare de mașini agricole trebuie să producă 360 mașini pe lună. Prima uzină a îndeplinit planul cu 112% ; uzina a doua cu 110%, iar ambele uzine au realizat 400 mașini pe lună. Cu cît a depășit planul fiecare uzină în parte?

La admitere în cl. IX, Suceava 1965

E : 2519. Să se calculeze

$$\frac{\left(15\frac{3}{4}-6,125:1\frac{3}{4}\right):\left(1\frac{2}{5}\cdot 1\frac{3}{7}+4,25\right)}{\left(\sqrt{146,41}:1\frac{5}{6}-\frac{2\cdot 5^3}{2^3\cdot 5^5}\cdot 611\right):\frac{1}{4}}$$

La admitere în cl. IX, Suceava 1965

E : 2520. Într-un dreptunghi diagonalele se intersectează în așa fel încît un unghi este $\frac{2}{7}$ din suplimentul său. Să se afle unghiurile făcute de diagonale și apoi unghiurile făcute de o diagonală cu laturile dreptunghiului.

Eliza Vasiliu, profesoară Bacău

E : 2521. La cubul $ABCDA_1B_1C_1D_1$, notăm cu E și F mijloacele segmentelor BC și BC_1. Știind că volumul trunchiului de piramidă cu bazele ADD_1 și BFE este de 35 m^3, să se afle volumul cubului.

Corneliu Georgescu, Craiova

E : 2522. Să se arate că :

$$(a-4)^2+(a+1)^2+(a+2)^2+(a+3)^2=$$
$$=(a-2)^2+(a-1)^2+a^2+(a+5)^2.$$

C. Ionescu-Țiu

E : 2523. Fie un triunghi dreptunghic. Perpendiculara în C pe ipotenuza BC întîlnește pe AB în C_1, iar bisectoarea unghiului C taie latura AB în C_2. Să se arate că segmentele CC_1 și C_1C_2 sînt egale.

C. Ionescu-Țiu

E : 2524. Să se arate că fracțiile

$$\frac{401}{499}, \quad \frac{401401}{499499}, \quad \frac{4010401}{4990499} \ldots$$

sînt egale.

C. Ionescu-Țiu

E : 2525. Doi vînători, situați la o distanță de 500 m unul de celălalt, încep să se apropie cu viteze uniforme, egale. În acest timp, cîinele lor face naveta între ei, alergînd cu o viteză dublă. Ce distanță parcurge cîinele, știind că aceștia merg în linie dreaptă?

c.d.p.

E : 2526. Două vapoare părăsesc simultan portul Constanța pentru Bombay, unde rămîn 5 zile înainte de reîntoarcere.

Primul face 45 km/oră la dus și 55 km/oră la întoarcere, iar al doilea merge uniform cu viteza de 50 km/oră. Care va sosi cel dintîi la Constanța.

c.d.p.

E : 2527. Unui vînător, care trebuie să se deplaseze cu trenul, nu i se permite accesul cu pușca în vagon. Ce soluție poate adopta vînătorul, știind că la vagonul de bagaje nu se primesc colete paralelipipedice cu dimensiuni mai mari de 1 m, iar pușca acestuia are lungimea de 1,65 m ?

c.d.p.

CĂRȚI NOI

W. Sierpinski. Ce știm și ce nu știm despre numerele prime (200 pagini). Editura științifică, 1966. Cartea cuprinde următoarele:

1. Despre hotarele geometriei și ale aritmeticii. 2 Ce știm și ce nu știm despre numerele prime ? 3. Despre rezolvarea ecuațiilor în numere întregi. 4 O sută de probleme elementare, dar dificile, de aritmetică.

C. Coșniță și *F. Turtoiu. Culegere de probleme de matematici* pentru examenele de maturitate și admitere în învățămîntul superior. Editura Tehnică. 1966. Cartea conține peste 900 de probleme cu indicații și răspunsuri. Materialul a fost luat din reviste, sau dat la examene și concursuri, fiind introduse și o serie de probleme originale. Culegerea cuprinde următoarele capitole: Algebră, Geometrie, Trigonometrie, Analiză și Geometrie analitică.

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME *

Soluții bune primite pînă la 1 martie 1966 (urmare)

ROMÎNEȘTI (PLOIEȘTI). *S. g.* cl. VI Petre Gheorghe (2395, 8—401, 10—3, 7). cl. VIII Herea Ion (2394—8, 9—406, 10—9, 21, 3, ,5, 8), Mihai Ștefania (2399, 401, 4, 9, 21, 3), Mirică Gheorghe (2395—402, 4, 12, 3, 5, 7, 8, 21, 3, 8).

ROȘIORI. *L. 2.* cl. X Popescu Dan (7185, 8, 93, 20, 6, 20—6, 34, 45), lc. XI Sandu Marin (7185, 7, 8, 93, 6, 9, 203, 4, 10, 3, 4, 6, 7, 20, 2—7, 33—6, 8, 50, 72, 6, 83—5, 8, 9, 96, 300).

RUDINA (OLTENIA). *S. g.* cl. VIII Mocanu Erina (2410—3, 7—9, 21, 3—5).

SABOANI (ROMAN). *L.* cl. V Agache Elena (2381—4, 9, 95, 6, 8, 400), Cobzaru Gheorghe (2381—4, 95, 6, 8, 400), cl. VIII Călugăreanu Francisc (2394—405),

SARMAȘ (MUREȘ A. M.). *L.* cl. XI Cubleștean Ioan (7217, 24, 43, 7, 66, 8, 72, 6, 82—5, 8, 91, 5), Moldovan Vasile (7188, 90, 2, 8, 204, 16, 22, 6, 78, 8, 3, 4, 95, 9).

SATU MARE. *S. g.* cl. VI Sacal Ștefan (2395—402, 4, 10—5, 17, 8, 24), Tatar Agneta (2381—4, 96, 8—400, 4), cl. VIII Bujorică Dan (2395—400, 4, 12), Görle Mihai (2381—5, 95, 8—400, 1, 4—6), cl. IX Iordan Andrei (2378—0, 1—3, 409, 71, 29, 30, 1, 6, 85, 222), cl. X Sichet Margareta (7210, 6, 7, 9, 20, 2—4, 5, 83, 6, 7).

SAVENI (SUCEAVA). *L.* cl. XI Sănduc Opan (7186—8, 95, 9, 205, 16, 8—24).

SEBEȘ (HUNEDOARA). *S. g.* cl. VII Marcu Dan (2381—3, 95, 6, 8, 402, 10—3), Rapcea Rodica (2381, 95—9, 411, 2), cl. IX Bătrîna Lenuța (2390, 2, 409, 25, 6, 8, 8, 7232, 6, 64—8), Dronca Mircea (2391, 2, 409, 23, 5—8, 7188, 222, 3, 6, 88), Zapota Nicolae (2391—3, 425—8, 7236, 84, 5, 86—8).

SIBIU. *S. g.* cl. VII Stîngaru Petre (2381—4, 9, 94—402), cl. VIII Purece Marilena (2381—5,8, 92, 5, 300—2), S. g. cl. VII Popescu Viorel (2381—5, 7—9, 90), cl. VIII Perechesto Mircea (2394. 6—8, 402—5, 9), S. g. cl. V- Vasilescu Maria (2394—5, 7, 8, 404, 10—3), cl. VI Borcea Ciprian (2381, 3, 94—6, 8, 402, 11—3), cl. VIII Coleșan Ileana (394—7, 9, 401, 5), Eivendt (2395—402, 4), Ersei Petru (2381—3, 5, 94, 57, 404), Popp Adelaida (2395—402, 4), Lungu Daniel (2381—3, 5, 404), Popescu Marcel (2381—4, 95, 400, 1, 4), Răulea Sofrand (2381, 3, 5, 95, 7, 9, 402, 4), Schuster Gerhard (2395—402, 4), Vasilescu Gheorghe (2381—4, 94, 5, 7—401, 3—5), *S. g. 9* cl. VII Bădescu Gabriela (2395, 6, 8, 9, 402, 5, 11—3), Sederiaș Florin (2394—6, 400, 4, 6, 10, 1, 3, 7—9), S. g. 13 cl. VIII Bărbuței Gabriela (2395, 7, 8, 400, 2, 5, 9, 13, 5, 21 *S. g. 15* cl. VI Popa Adrian (2381, 3, 8, 9, 95, 6, 8, 400, 18), *L. 1* cl. X Babeș Carmen (7185, 8, 93, 4, 20, 210, 6, 7, 22—4, 6, 35, 6), cl. IX Stancu Ana (2409, 25—8, 45, 6, 7, 7232, 5, 6, 84, 6—8, 326, 8), *L. 3* cl. X Bratu Ecaterina (7185, 6, 8, 9, 91, 3, 4, 9, 200, 1, 10, 20, 2), Chitic Elena (7186, 8, 9, 91, 3, 4, 9, 200, 1), Nicula Vasile (7185, 8, 9, 94, 9, 201, 10, 6, 9, 20, 2—4, 86, 7, 300), Sederiaș Florica (7183, 4, 6, 8, 9, 91, 3, 9, 201, 6, 17, 24).

SIMERIA (HUNEDOARA). *L.* cl. VIII Ghilea Mihai (2398—406).

SINAIA. *L.* cl. X Bucur Vasilica (7216, 7, 22, 3, 83, 9, 300, 7, 8, 23, ,5 6, 8), Stănescu Nicoleta (7216, 7, 22, 3, 83, 9, 99, 300, 17, 8) 22, 3, 5, 6, 8).

SINEȘTI (ARGEȘ). *S. g.* cl. VI Rădoi M. Costel (294, 5, 8, 411—3, 18, 9, 23, 4).

SINTARU (CRIȘANA) *S. g.* cl. VI Stan Cristian (2394—402, 10, 1—6, 24).

SIRET. *L.* cl. VIII Breabăn Vasile (2381—4, 7, 95, 6, 8), Budișteanu Nicolai (2381, 95, 9, 400—2, 4, 5), Tumac Gheorghe (2381—6, 8, 9), cl. X Buzdugă Nicolae (7178, 81, 5, 8, 9, 92, 4, 216, 9, 24, 32, 5, 6), Tiniuc Vasile (7216, 9, 22, 4, 94—8, 300, 25, 6, 8), cl. XI Olariu Mihai (7216—8, 20, 2—6, 36, 47, 86, 7, 93, 300, 11, 20, 3)

SIRIA (PLOIEȘTI). Șerban Nicolae (2381, 3, 94, 5, 7, 8, 402, 4).

SLATINA. *L. 2* cl. V Mateescu Octavian (2381, 3, 7, 90, 4—6, 8), cl. VI Dragomirescu Ștefania (2398, 9, 400, 1, 15—8), Dumitrescu Mihaela (2398—401, 1—8), Voicu N. Șerban (239ș, 8, 9, 400, 1—3, 5, 7, 8), Păduraru Ion (2398—401, 15—8), Săraru Rodica (2398, 400, 1, 10, 1, 3, 5, 8), cl. VII Preoteasa Marinela (2381—4, 7, 1, 90, 3), cl. IX Davidescu Cristian (2392, 425—8, 7181, 4, 5, 8, 94, 215, 90, 6), Prună Marin (7119—2, 4, 5, 7, 30, 4—6, 51, 5, 65), Voinea Vasile (7285—7, 317, 23, 5, 6, 8, 407, î, 24, 5, 44, 5—7), cl. XI Gheorghe M. Ion (7185, 8, 94, 202, 13, 4, 6, 7, 218, 20—2, 4, 5, 7).

STOENEȘTI (BUCUREȘTI) *S. g.* cl. VII Bănica Petrea (2381—4, 94—8, 400, 1, 4, 4), Chineață Constanța (2381, 2, 4, 94—6, 8, 400, 1, 4, ș), cl. VIII Ceaușu Niculina (2381, 4, 94, 8, 400, 1, 4, 5,) 3Crongea Petre (2381, 4, 94, 8, 400, 1, 4, 5), Enache Nicolae (2381, 4, 94, 8, 400, 1, 4, 5), Olteia Vasilica (2381, 4, 94, 8, 400, 1, 4, ș), Prodan Maria (2381—4, 94—8, 404, 5), Chineață Lucreția (2381, 4, 94, 8, 400, 1, 4, 5).

SUCEAVA *S. g.* cl. VI Simion Sebasitan (2295, 7, 8, 400, 11, 2, 4), cl. VIII Martiniac Daniel (2395, 9, 418, 3, 8, 23, 6, 8), L. cl. X Lăpușneanu Lucian (7185, 93, 4, 7, 8, 204, 10, 7,

* Evidențiații ca rezolvitori de probleme sînt scriși cu litere cursive.

24, 33, 9, 42, 6). Zarera Ion (7178, 85, 8, 93—5, 7—9, 204, 10, 6, 7, 23—5, 32, 3, 7, 9, 42, 5—7, 76, 83—6, 9, 93, 300, 1).

SIMLEUL SILVANIEI. S.g.cl.VIII Abraham Iosif (2381-3. 5, 9, 947, 8, 400).

SIVIȚA. *Ș. g.* cl. VIII, Oprea Zenovie (2381—5, 8, 92, 4—401).

ȘOMCUȚA MARE. *Ș. g.* cl. VI. Munteanu Doina (2394—401), cl. XI, Hotea Gheorghe 7216, 7, 19, 10, 2—6, 39, 47, 78, 83, 6, 300).

ȘOTRILE (PLOIEȘTI) *Ș. g.* cl. VIII Nițulescu Valeria (2392, 4, 5, 402, 6, 13,21, 3, 4, 6, 8).

ȘTEFĂNEȘTI (ARGEȘ). *Ș. g.* cl. V Coman Nicolae (2381—3, 9, 5, 6, 9, 410—3),Cojocaru Laurențiu (2369, 70, 4, 6, 81—3, 95, 7, 8, 400, 4), Petriche Cornel (2382, 4,7, 94, 5, 7, 400, 4), cl. VI Ducios Antonis (2395, 8, 404, 11—3, 8, 25), Savu Nicolae (2381, 3, 5. 94—8, 404, 12, 3), Vonderdei Ileana (2381—3, 95, 7, 8, 400, 4), cl. VIII Buricel Victoria (2394—6, 98—406), Gorrgoi Stelian (2381, 2, 4, 5, 95, 6,9 9, 500).

SUSANII DE SUS (ARGEȘ), *Ș. g.* cl. VIII Scorțar Nela (2394, 5, 7, 9, 300, 1, 2, 4, 9).

TEACA (CLUJ). *Liceu* cl. VI Preda Valeriu (2395, 6, 99—404).

TECUCI, *L. 2* cl. VIII Hîncu Cecilia (2381—2, 5, 6, 8, 9, 400, 1), Veliciu Dumitru (2369, 75—7, 81, 3, 5, 95, 8), cl. VIII Cotigă Cornelia (2381, 3, 92, 5, 6, 8, 402), Popescu Mirel (2383, 95, 7, 401, 4, 10—3), Radu Diomonda (2399, 401, 410—4, 9, 21, 3).

TELEGA (PLOIEȘTI) *Ș. g.* cl. VII Gurbet Ecaterina (2395, 6, 8, 9, 400—4, 12, 3, 8, 28).

TIMIȘOARA, *Ș. g. 10* cl. VIII Amreșan Ioan (2381—5, 7, 91, 2), Ș. g. 12, cl. V Mioc Cornelia (2381, 4, 95, 6, 400, 11—3), Todosan Dorina (2381, 3, 4, 94, 6, 404, 10—2), cl. VI. Predescu Sanda (2381, 2, 94—401, 2, 94—401), 4), L. 1. cl. VII Doloja Marcela (2369, 70, 3, 4, 80—2, 5, 9, 80, 3), Fränkel Donca (2395, 7—400, 2, 4, 5, 11, 3), Marcu Felicia (2381—5, 9, 98, 9), Mîrza Eugen (2381—4, 410, 3, 7, 8), Munteanu Mioriță (2385, 6, 94, 400—2, 4), Stoian Catina (238. 2, 4—6, 94, 5, 402, 6), Sonnenfeld Gabriel (2394, 7, 9, 500—6) Negruțiu Mircea E : 2381—5, 8,—90). cl. VIII Teleagă Petru (7182, 5, 8, 94, 216, 20—4), L. 2. cl. V. Rațiu, Ion) (2381—4, 94—7), cl. VIII Costan Sergiu (2394—8, 400, 1—4), Petrescu Jenică (2381—3 5, 96, 8, 9, 404), L. 3 cl. X Liporan Monica (7184, 98, 9, 204, 16, 7, 23—6, 34, 41—3, 6), L. 10 cl. X Avram Jeni (7169, 85, 8, 90, 4—6, 8, 9, 210, 5, 24), cl. XI Rothenstein Ana (71217, 24, 6, 76, 82—8, 300).

TÎRGOVIȘTE. *L.* cl. VII Barbu Virgil (2394—9, 402, 13, 25), cl. VIII Popa Cornel (2394, 400, 7, 9, 2—4, 7), Stan Traian (2395, 6, 8, 9, 402, 11—3, 8, 9, 21, 8), cl. X Huiu Dan (u7185, 8, 90, 25, 216, 20, 2—4, 35, 43, 4). cl. XI. Bănică Aurel (7190, 2, 6, 214, 6, 7, 9, 20, 1, 5—7, 35, 42, 76, 82, 4, 6, 90, 8, 300). Enache Gheorghe (7142, 54, 65, 78, 84, 5, 8, 90, 2—4,, 6, 8, 9, 204, 10—3, 5—7, 9—26, 33—6, 9, 40, 2, 3, 51), Pîrvu Constantin (7185, 8, 94, 213, 6, 7 9, 20, 2—6, 79, 82, 3, 301), Ștefănescu Călin (7185, 8, 90, 4, 9, 217, 9, 20, 3—6).

TG. CĂRBUNEȘTI. *L.* cl. X Jianu Romel (7119, 20, 2, 30—2, 86, 8, 219, 20, 2—4).

TG. JIU. Ș. g. cl. V. Cîrstea Crișan (2377, 81, 3, 5, 95, 411—3), cl. VIII Udrică Mioara (2381, 2, 5, 92, 5, 9, 400, 2, 6), *L.* cl. IX Cîrstea Maria (2381—5, 7120, 4, 31, 88, 22, 4, 34, 5, 85), cl. X Ciocîrlie Valeriu (7188, 92, 217, 21, 40, 5, 84—8, 91, 9, 300), Drugă Florea (7217, 8, 9, 23, 34—6, 47, 7, 9, 51, 836—8, 300, 1, 17), Udrică Viorel (7119, 30, 1, 6, 85, 8, 94, 5, 216, 9, 24), cl. XI Bușe Florian (7142, 3, 88, 219, 20, 2—7, 31, 4, 45), *Curcanu George* (7070, 8, 80, 105, 10, 2, 5, 7, 9, 24, 31, 6—8, 42, 4, 6, 278, 85, 8, 94, 6, 201, 4, 10, 6, 7, 20—2, 4—7, 45, 7). Absolvent *Pestroiu Daniel* (721 8.23, 5, 7,—9, 31, 2, 43, 73, 5, 6, 72, 5, 6, 82—9, 91—3, 5, 6, 8, 300—3, Î, 8, 9, 35, P).

TG. MUREȘ. *L.* cl. VII Dragotă Adrian (2403—6, 10, 1, 3, 7—9, 24, 5, 8), Poliac Marius (2395, 7, 9, 400, 2, 4, 11, 2), Sonnenfeld Gabriel (2381, 4, 7, 8, 93, 5—7).

TG. NEAMȚ. L. cl. VIII, Călin Octavian (2369, 74, 5, 8, 80—4, 95, 6, 9, 400—2, 4).

TILECUS (CRIȘANA). Ardelean Aurel (7272, 6, 84—8, 91—4, 6, 97—301).

TIRLISNA. *Ș. g.* cl. VIII Man Elisebeta (2381—5, 94—402, 4—6).

TÎRNĂVENI. cl. X Gruia Călin (7216, 22—4, 43,5, 84, 7, 300, 22, 3, 5, 6).

TISĂU (BUZĂU). *Ș. g.* cl. V Petroiu Carmen (2381—3, 95, 6, 8, 3403, 4), Petrescu Constantin (2381, 3, 94—6, 8, 403, 4).

TOPLEȚ-ORȘOVA. L. cl. IX Vremescu Ion (2395—8, 400, 3, 4, 10—3).

TOPORĂȘTI (IAȘI), *Ș. g.* cl. VII Vizitiu Constantin (2381, 2, 4, 9, 95, 8, 9, 400).

TORMAC. *Ș. g.* cl. VIII Nagy Iuliana (2404, 5, 10—3, 7—9, 21, 5, 6, 8, 32, 9).

TRUȘEȘTI. *L.* cl. X. Corduneanu Dumitru (7168, 79, 91, 3, 7, 9, 213—7, 9—25, 31, 3—6, 8—40, 3, 6, 7, 9, 58, 83—8, 92, 5, 6), Livodaru Emil (7111, 27, 30, 1, 6, 63, 7194,5, 7, 10, 216, 20, 2—4).

TULCEA. *Ș. g.* cl. VIII Andreav Liudmila (2381, 3, 5, 95, 9—402, 4), Chiriac Florica (2381—4, 2400, 1, 3, 4, 9), Costache Maria (2398—404, 6, 9), Lonebel Michel (2381—5, 90, 3, 5, 9, 400, 1, 2, 4).

TURDA. *Ş. g.* cl. V Adam Violeta (2381—3, 5, 94, 6, 411, 3), cl. VI. Bomţeanu Marius (2395, 8, 400, 2, 3, 7, 8, 28), Nicoară Ana (2385, 7, 8, 9—402), cl. VII Mîrza Constanţa (2381—5, —5, 95, 9, 400), L. cl. XI. Muntean Dumitru (7173, 8, 82, 5, 8, 94, 6), 216, 7, 9, 20, 2—4,6), Roşeanu Adriana (7185, 8, 94, 216, 20, 2—4, 85, 5, 300).

TURNU SEVERIN. *Ş. g.* cl. VI Andreiaş Liliana (2370, 4, 82, 95—8, 400), Anghelescu Anca (2381, 2, 95, 9, 400, 11—3), Popescu Mihaela 2367—74, 82, 7), cl. VII. Burtea Dan (2381—3, 5, 95, 8, 404), Căplescu Julieta (2395, 9, 403, 4, 10—3, 8, 28), cl. VIII. Nicola Mihaela (2381—3, 94, 5, 8, 407, 12, 21), cl. IX Bivolaru Simion (2391, 2, 409, 24—8, 7184, 5, 8, 22, 2, 4, 6—8), *L. 1* cl. X. Gargălie Silvestru (6216, 7, 22—5, 7, 34, 5, 47, 82—7, 8, 41, 2, 300, 1), Zimţa Florentin (7169, 85, 8, 9, 90, 4, 5, 218, 9, 20, 2—7, 34, 45, 7), cl. XI Ionescu Mihai (7185, 8, 97, 202, 4, 10, 4, 16, 7, 9, 20, 2—4, 6, 7, 35, 45, 7, 76, 83—8, 300).

ULMI (PLOIEŞTI), *S. g.* cl. V Dobre Elena (2369—70, 81—4, 7, 94—8).

URLAŢI. *L.* cl. X. Vasile Ion (67220, 44, 72, 84—8, 91, 5—7, 300, 1, 8), Zotta Dan (7185, 6, 8,—91, 3—5, 6,7, 8, 210, 5, 9, 30, 2—5).

UŞUREI (ARGEŞ). *Ş. g.* cl. VIII Deaconu Sabina (2381—5, 9, 90, 402), ZgondeaEugenia (2394, 7, 401, 2, 9—13 , 24).

VADASTRIE (OLTENIA) absolventă Cismaru Opriţa (2381—5, 7, 87, 91—3).

VADU CRIŞULUI (CRIŞANA), L. cl. XI Ciplea Ştefan (7216—9, 22, 4, 7, 8, 3—5, 8, 95).

VALEA CU APĂ (OLTENIA), *Ş. g.* cl. VIII Tudorescu Constanţa (2367, 70, 1, 4, 5, 7, 80, 1, 5, 92, 5, 7).

VALEA LUI MIHAI (CRIŞANA), L. cl. X Pop Ioan (7219, 21—5, 43 6, 7, 84—8).

VALEA MARE Argeş *Ş. g.* cl. VI, Manole Gheorghiţă (2381—3, 95, 7, 8, ,404).

VALENI (IAŞI). *Ş. g.* cl. VII. Zalinescu Constantin (2381—5, 7—90, 4—405).

VĂLENII DE MUNTE (PLOIEŞTI). *L.* cl. IX (2381—5, 9, 90, 4—9).

VASISTRIŢA (OLTENIA) *Ş. g.* cl. VIII Radu Florica (2381—5, 7—8, 92).

VASLUI. *L.* cl. VIII Sofer Marta (2400—3, 6, 9, 21, 3, 8).

VATRA DORNEI *L.* cl. VIII Zozuleac Doru (2395, 402, 13, 8, 21, 8, 32, 8, 9), cl. X Fleischer Iacob (7185, 8, 216, 7, 20, 3—6, 36, 42, 5).

VICOV DE SUS (SUCEAVA). *L.*cl. IX. Procopov Narcis (2392, 3, 409, 24—8, 85, 8, 84, 8).

VÎNĂTORI (BACĂU) *Ş. g.* cl. VIII (2410, 2, 3, 6—9, 21, 8).

VINGA (ARAD). *Ş. g.* cl. VI Ciobotaru Achilina (2381, 2, 4, 5, 95, 6, 8, 402), Flore Mihai (2381—3, 5, 95, 8, 403, 5).

Soluţii bune primite pînă la 30 martie 1966

ADAMCLISI (Dobrogea). *Liceul 1.* cl. VIII Bolea Mariana (E: 2411, 9, 21, 32, 4, 9, 41—3 ; 7326, 8), Ion Ion (E : 2411, 3, 9, 21, 32), 4, 8, 9, 41, 2 ; 7326).

ADJUD (Bacău). *Ş. g. 1.* cl. IX Bocăneţ Paula (E : 2410—4, 7, 8, 20, 5, 8). *Liceul 1,* cl. IX, Miroslav Gh. (E : 2425, 6, 8, 44—7, 9 ; 7284—8, 325, 6).

AIUD (Cluj), *Ş. g.* cl. VII. Maftei Doina (E : 2398—400, 3—5, 10, 7), cl. VIII Luca Aurora (E : 2410, 3, 21, 4, 6, 9, 31, 41, 3), Sima Doina (E : 2410—3, 5, 9, 21, 4, 9, 31, 41, 2), *Liceul 1* cl. VIII Botnariu Rodica (E : 2411—3, 9, 21, 3, 30, 1, 4, 41, 4), cl. IX. Madjik Zoltan (E : 2424—8, 44—6 ; 7272, 85—7).

ALBA IULIA. *Liceul 1,* cl. XI Stanciu Vasile (7266, 84—8, 300, 1, 4, 14, 7, 8, 20, 6, 8, 31, 42, 5).

ALBENI. *Ş. g.* cl. VI Popescu Mugurel (E : 2395, 6, 9—402, 4, 13, 8, 28).

ALEŞD (Crişana). *Liceul 1.* cl. X. Fonai Florian (7222—4, 83, 6, 9, 91, 300, 17, 8, 20, 5, 6, 8), Secară Florian (7217, 22, 3, 76, 86, 7, 9, 91, 2, 300, 18, 25, 6, 8).

ANINA. *Ş. g. 1* cl. VII Bortaloş Eugen (E : 2394—7, 400, 4, 10—2), Matei Lucia (E : 2395, 6, 8, 404, 10—3, 8), *Liceul 1* cl. IX Kalitzky Cornelia (E : 2407, 9, 24—8 ; 7222, 3, 84—6, 8, 99—301), cl. Miloiu Livia (7216, 9, 22—4, 35, 84—8, 325, 6, 8). cl. XI. Aurel Dumitru (7216, 22, 4, 35, 88, 318, 20, 5, 6, 8, 36, 43).

ARAD. *Ş. g. 5* cl. V Penzeş Marta (E : 2450—4, 6, 8), *Ş. g.* (Budişan Ioan (E : 2394—7, 410, 1, 3, 4), *Ş. g. 14* cl. V Laţcov Monica (E : 2395—4, 410—3, 29—31), Tornea Litonia (E : 2395—7, 410—4), *Ş. g. 19* cl. VIII Rusu Mircea (E : 2394—401, 3—6), *Liceul 1* cl. VIII Decis Florin (E : 2394—7, 9—405), Luluşa Lucia (E : 2429—31, 4, 40, 4, 5, 7), cl. Başcaiu Voicu (E : 2409, 24—8 ; 7219, 22, 42,5, 6, 84, 6—9, 91), cl. IX, Drăgan Doru (E : 2426—8, 44—6, 9 ; 7284—8, 325, 6, 8), cl. X Balla Ioan (7216—27, 34, 5, 40, 41), Gligor Alexandru (7272, 6, 83—8, 91, 2, 300, 18, 25, 6, 8, 33), Lucuţa Petru (7216—27, 32—5, 9—41, 4, 6, 7, 67, 72, 4, 6, 8, 82—8, 91—3, 301) *Liceul 4* cl. IX Francz Adalbert (E : 2409, 24—7 ; 7234, 6, 7, 40, 85—7 90), Hirschl Ladislau (E : 2409, 25—8, 49 ; 7234, 75—8, 326, 8), cl. X Aciocîrlănoaie Florin (7276, 8, 84—8, 91, 2, 300, 1, 25).

BACĂU. *Ş. g. 5* cl. VIII. Munteanu Radu (E : 2410, 1, 3, 4, 8, 9, 21, 4, 8, 9, 31, 2, 5, 9, 41, 4—6), Şerban Camelia (E : 2431, 2, 4, 9—41, 5, 6), *Ş. g. 8* cl. VII Cîrlan Carmen

(E : 2347, 9, 41, 3, 4, 11, 2, 24), Cociorvei Victor (E : 2397, 401, 3, 4, 11—3, 24), Diconescu Ion (E : 2395, 6, 8—402, 4), cl. VIII Afloarei Eugenia (E : 2395, 6, 8—402, 4), Balaş Elena (E : 2395, 6, 8—404), Mandi Luminiţa (E : 2394—6, 8—404), *Liceul 1*, cl. VIII Tioc Alexandru (E : 2430—2, 4, 8, 40—2), cl. IX Grinţescu Ion (E : 2426—8, 44—6, 9 ; 7284—8, 324—7), Hostenic Mircea (E : 2425, 7, 8, 44—7, 9 ; 7284—8, 325), Sasu Dan (E : 2424—6, 8, 44,7, 9 ; 7284, 6, 8, 325), Savin Alexandru (E : 2224, 6—8, 44—6, 9 ; 7284—7, 325, 6), cl X. Catană Mioara (72,71 8, 5, 300, 17, 20, 2, 3, 5, 6, 8, 35), Rusu Constantin (7216, 9, 20, 2—4, 86, 7, 300, 17, 8, 22, 5), Sava Ion (7216, 20, 2, 3, 86, 7, 300, 17, 8, 22, 6, 8, 30), Ţarălungă Lucian (7217, 9, 21—3, 47, 82—8, 300), *Liceul 4* cl. IX Armeanu Pavel (E : 2425, 7, 8, 44—6, 9, 62 ; 7284, 5, 8, 325, 6, 8), Căşerin Gabriela (E : 2428, 44—6, 9 ; 7284—8, 325, 6, 8), Fulgeanu Sonia (E : 2425, 8, 44—6, 9 ; 7284, 5, 7, 325, 6, 8), Knoll Iulia (E : 2428, 44—6, 9 ; 7284—8, 326, 8), Olteanu Mirela (E : 2425—8, 45, 6, 9 ; 7284—8). Ouatu Ioan (E : 2425, 7, 8, 44—9 ; 7284, 6—8, 325, 6, 8, 30), Popa Elena (E : 2424, 5, 8, 44—6, 9 ; 7285, 325, 6, 8, 30), Tamaş Adriana (E : 2445—7, 9 ; 7284—8, 325, 6, 8), Teodor Victoria (E : 2428, 45—7, 9 ; 7284—7, 8, 325—7), Ţenescu Laura (E : 2428, 44—7, 9 ; 7284, 7, 8, 325, 6, 8).

BAIA MARE. *Ş. g. 3* cl. VIII. Buteanu Aurelia (E : 2410—3, 8, 9, 21, 3, 4, 8, 30, 2, 8, 9, 41—3, 9, 53, 62), *Ş. g.* 9 cl. VIII Senhr Elisabeta (E : 2394—6, 8, 400, 1, 4, 10—3, 7, 8, 24), Ş. g. 20 cl. VII Dragomir Gh. (E : 2394—6, 8, 400, 1, 4, 10—3, 6, 8, 24), Cîta Cornel (E : 2394—76, 8, 400, 1, 41, 10—3, 7, 8, 26). *Liceul 1* cl. V. Rajcsanyi Tiberiu (E : 2394, 6, 410—3, 30, 2), cl. IX. Gherman Adrian (E : 2424, 7, 8, 44—7, 7286, 7, 325, 6, 8), Klein Robert (E : 2424, 6—8, 45—7, 9 ; 7282, 4—7, 91, 325, 6), Srami Maria (E : 2409, 24—8, 7237, 84—9), *Liceul 3* cl. VII. Vese Dumitru (E : 2395, 7—401, 4, 5), cl. VIII Marincescu Dorin (E : 2410—3, 8, 21, 3, 8), Krauss Ivan (E : 2423, 4, 8, 44—7, 62 ; 7286, 7, 91, 325, 6).

BAIA SPRIE. *Liceul 1.* cl. X. Trif Ioan (7283, 4, 9, 91, 6, 7, 317, 21—3, 5, 6, 8, 30, 5, 6, 42, 8, 75, 88, 401—7).

BĂBENI (Argeş). *Liceul 1* cl. VI. Muja Gelu (E : 2429, 31, 2, 4, 8, 9, 41, 2, 4, 52), cl. X. Arnici Nicolae (7282—8, 30, 17, 8, 20, 6, 8).

BĂBICENI (Botoşani). *Ş. g.* cl. VII. Călin Constantin (E : 2413, 9, 23, 4, 31, 8, 9, 41, 4).

BĂICOI (PLOIEŞTI). *Ş. g. 1* cl. VIII. Ştefănescu Horia (E : 2419, 21, 3, 7, 49, 60, 1 ; 7326, 87), *Liceul 1* cl. X Ioan Ioan (7216, 24, 5, 7, 83, 4, 315, 7, 8, 20, 3, 5, 6, 8), Radu Gh. (7217, 24, 5, 7, 82, 3, 5, 300, 14, 7, 8, 20, 3, 5), Ruşină Atanase (7216, 7, 24, 5, 7, 83, 4, 8, 300, 17, 20, 3, 5, 6).

BĂNEASA (DOBROGEA). *Ş. g.* cl. VII Uzum Gheorghina (E : 2395, 7, 8, 400, 1, 3—6, 9).

BECHET (OLTENIA) *Liceul 1* cl. X Cojocarul Ion (7219, 22—4, 84, 5, 7, 8, 98, 300, 14, 7, 8, 20—2, 5, 6, 8, 30), Popa Ion (7219, 20, 2—5, 84, 5, 7, 8, 98, 300, 14, 7, 8, 21, 2, 5, 6, 8, 30).

BEIUŞ (CRIŞANA). *Liceul 1* cl. VI Toma Aurel (E : 2410—3, 30, 2, 4, 8, 9, 41), Imre Francisc (E : 2413, 7, 8, 28, 30—2, 8, 41, 2), cl. X. Toma Ioan (7267, 72, 6, 83—8, 91—3, 5—7, 9, 300, 9, 17, 8, 20—3, 5—8, 30, 5, 9).

BEREŞTI (GALAŢI) *Liceu* cl. VIII Constandache Dumitru, David Ion, Dică Ion, Enache Veronica, Filer Aurel, Munteanu Liliana (E : 2425—8 ; 7284—8, 325, 6, 8), cl. IX. Chiricuţă Elena, Enache Alexandrina, Rău Paraschiva, Sasu Constanţa, Trandafir Constantin (E : 2425—8 ; 325, 6, 8).

BISTRIŢA. *Ş. g. 2* cl. VIII. Fucă-Tomescu Mihai (E : 2406, 10, 1, 4, 7—9, 21, 3—32, 4, 8, 40, 1, 5—7, 9 ; 7284, 5, 8, 91). *Liceul 1* cl. IX Lucaci Pavel (E : 409, 25—8 ; 7219, 20, 2—4, 87, 8), Mureşan George (E : 2444—9 ; 7317, 8, 21, 5, 6, 8, 25), Timofte Corneliu (E : 2444—9, 60—3 ; 7267, 318, 25, 6, 82, 5, 99, 418), cl. X. Gagea Alexandru (E : 7283—7, 91, 2, 300, 13, 7, 25, 6, 8), cl. XI Fucă I. Sergiu (7219, 22, 3, 7, 47, 76, 84, 6—8, 91, 303), Mihăiluş Liana (7263, 82—8, 91—3, 5, 6, 9, 300, 2, 3).

BÎRCA (OLTENIA), *Liceul 1* cl. VIII. Proca Ştefan (E : 2412—4, 6, 7, 9, 21, 3, 5, 7, 8, 31, 4, 8—41, 4—7, 9, 50, 60, 2 ; 7272, 6, 84—8, 317, 21, 4—6), cl. IX Popa Ştefan (E : 2424——8 ; 7284—8, 91, 317, 8, 21, 402), cl. XI. Miţu Ion (7266, 72, 6, 82—5, 7, ,8, 91, 300, 2, 15, 20).

BÎRLAD. *Ş. g. 2* cl. 5 Codreanu Valeria (E : 2410—4, 30, 1, 4), *L. 2* cl. VII Kissling R. Eleonora (E : 2429—34, 40, 1), *L. 3.* cl. VI. Bichir Ionel (E : 2394—406, 10—9, 21, 3—5, 7, 8), Remer Doina (E : 2395, 411, 3, 6, 29, 31, 2, 4), cl. VIII Costandache Doina (E : 2394—8, 40, 4, 6), Müller Iulia (E : 2394, 5, 7—400, 2, 4, 8), Rusu Doina (E : 2395, 9, 400, 2, 4, 11—3, 8), cl. IX. Agafiţei Silvia (E : 2425—8, 46, 62 ; 2784—8 Cidor Mihaela (E : 2428, 45—9 ; 7284—8, 325, 6, 8), Cornescu Magdalena (E : 2425, 7, 8, 44—6 ; 7284—8, 326), Popa Maria (E : 2425, 7, 8, 45, 6 ; 7294—8, 325, 6). Liceul 3 cl. X. Cînepă Victor (7216, 7, 9, 20, 2—7, 76, 83—8, 91, 6, 8—01, 14, 7, 8, 20, 2, 3, 5, 6, 8, 35, 8, 72, 3, 6, 9, 82, 5, 403).

BLAJ (BRAŞOV). *Liceul 1* cl. IX. Bocea Gligore (E : 2426, 8, 45—7, 7284—8, 325, 7), Olaru Mihai (E : 2444—7, 9, 71—3 ; 7325—7, 97—9), Pădurean Nicolae (E : 2426, 8, 44, 6 ; 7284—8, 325, 6, 8).

BORŞA (Banat). *Liceul 1* cl. X Cionvică Dorel (7216, 7, 9, 20, 2—4, 30, 78, 83, 5—7, 91, 318, 21, 2, 5, 6, 8).

BOTOŞANI. *Ş. g. 2* cl. VIII. Epuraş Lidia (E : 2411, 32, 41, 2, 50, 3—5), Ş. g. 4 cl. VII. Tunichioiu Aurel (E : 2410—3, 7, 8, 35, 8, 30—2, 4, 8, 9, 41, 2, 4, 5, 50, 3), *Liceul 1* cl. VIII Chirică Cezar (E : 2410—3, 9, 31, 2, 41, 6), Nichita Dumitru (E : 2411—3, 9, 32, 4, 42, 3) Puiu Tania (E : 2395, 410—3, 23, 31, 2, 8, 41), cl. IX. Brate Ovidiu (E : 2425—8, 44—7, 9 ; 7284—7, 325, 6), Dale Ovidiu (E : 2426—8, 44—7, 9, 60, 2, 3 ; 7286—8, 325, 6, 8). *Liceul nr. 2.* cl. VIII Taşcu Ştefania (2 400, 10—4, 7, 8, 2, 3, 7, 8).

BOZAVICI (Banat),, *Ş. g.* cl. VIII Pîşlea Iulian (E : 2411, 3, 9—21, 3, 5, 6, 9, 31, 2, 4, 9, 41, 2, 7, 51, 4, 5, 62 ; 7326), Ignea Ana (E : 2416, 20, 4—32, 4, 8—43, 5, 50, 2—6, 60—2 ; 7326), *Liceul 1* cl. VIII. Craşovan Mariţa (E : 2410—28), Piescu Călin (E : 2429—34, 6, 8, 40, 1, 5—9 ; 7325, 6, 8).

BRAD (Hunedoara). *Ş. g. 1* cl. VIII Daicaru Georgeta (E : 2410, 9, 32, 8, 9, 41, 55, 62), Dolea Valer (E : 2413, 9, 21, 38, 9, 41, 2, 54, 5, 62), Munteanu Adriana (E : 2413, 9, 32, 8, 9, 41, 2, 54, 5, 62).

BRANIŞTEA (Giurgiu). *Ş. g.* cl. VI Giugiucă Mariana Neacşu Florica, Vişan Ion (E : 2429—2, 4, 8—41).

BRAŞOV. *Ş. g. 2* cl. VII. Vlase Sorin (E : 2394—401, 4, 5), *Ş. g. 7*, cl. VIII Bontaş Adrian (E : 2394—401, 4, 6, 10—4, 7, 9, 21, 3, 7, 8), *Ş. g. 12* cl. VIII Huţu Lucia (E : 2399, 405, 21, 8, 32, 41, 2, 5, 7 ; 7286, 7, 326), Liceul 1. cl. X. Bătătorescu Anton (7225, 31, 6, 7—9, 46, 89, 94, 9, 300, 35), cl. XI. Caminschi Corneliu (7216—9, 22—7, 34, 5, 9, 51, 84, 6, 8, 925, 9—301, 3, 4, 8, 17, 20, 3, 5, 6, 8, 35, 9, 42, 6, 7), *Liceul 3* cl. IX Sluşaru Ileana (E : 409, 24, 7, 8 ; 7231, 3, 6, 84—91), *Liceul 4* cl. VII. Diţescu Dan (E : 2396—8, 404, 6, 12, 29—32, 4, 9, 40, 5), Pascu Gh. (E : 2396—8, 404, 6, 12, 30—2, 9, 40, 5), Pavel Florin (E : 2397, 400, 1, 4, 6, 11, 2, 7, 8, 30, 4), cl. VIII Barbu Gabriela (E : 2410—3, 24, 5, 31, 2, 4, 8, 9, 41), Diaconu Cătălin (E : 2411—3, 7, 8, 28, 31, 4, 41), Olteanu Florentina (E : 2410, 4, 6, 27, 5, 7—32, 4, 8, 42), Patraulea Iulian (E : 2411, 2, 7, 9—32, 4, 427), Szabo Clara (E : 2410—3, 9, 28, 9, 31, 2, 4, 9, 41, 2), cl. X Bontaş Vasile (7217, 9—24, 6, 31, 3, 4, 6, 8, 40, 7, 50, 7, 76, 82—9, 93, 304, 17, 8, 20—2, 5—8, 30, 35), cl. XI. Cotora Gh. (7220, 2—6, 32, 4, 5, 7, 46, 5—1), *Liceul Unirea* cl. XI. Prună Simion (7216, 7, 2—1 6, 8 83, 6, 7, 9, 326).

BRĂILA. *Ş. g. 7* cl. V Nistor Valentin (E : 2429—32, 50—3), cl. VI. Şerbănescu M. Octavia (E : 2396, 7, 400—3, 10—5), *Ş. g. 14* cl. VIII Dragostin Angela (E : 2395, 6, 8, 400—3, 21), *Ş. g. 22* cl. VIII Dragomir Gh. (E : 2394—404), Enache Marin (E : 2410, 1, 3, 7—8, 21, 3, 4), *Liceul 2* cl. X. Todirică Alexandru (7216, 9, 22, 4, 92, 312, 7, 20, 2, 3, 31, 2, 7, 72, 3, 5, 79, 9, 87, 402, 4, 5).

BREAZA (Ploieşti). *Liceul Militar* cl. X Bojincă Dumitru (7283, 92, 9, 300, 17, 8, 22, 3, 8, 79, 418, 22), Tăleanu Constantin (7272, 8, 83—9, 91—3, 5—301, 9, 17, 8, 20—3,5—8, 30, 2, 3, 5, 7—9, 42, 8, 9, 52).

BUCUREŞTI. *Ş. g. 3* cl. VI Borcilă Sansu (E : 2417, 8, 21, 3, 5—8 ; 7291), cl. VII Georgescu Mariana (E : 2414, 7, 9, 29, 31, 40, 6, 50, 2, 3, 61), *Ş. g. 5* cl. VI. Lazăr Anca (E : 2394—6, 8—402, 4, 5), Streja Dan (E : 2395—402), *Ş. g. 10* cl. VIII Weintraub Andrei (E : 2400—2, 6 9—14, 6—9, 21, 3—5, 7, 8), *Ş. g. 21* cl. VIII Dumitriu Adrian (E : 2398, 41, 31, 2, 8, 41, 5, 6), *Ş. g. 26* cl. VIII Ştefănescu Dorin (E : 2410, 3, 21, 3, 6, 32, 7, 9, 41, 9), *Ş. g. 56* cl. VIII Voinescu Radu (E : 2402, 3, 11, 2, 7, 8, 28, 84, 325, 40 ; 7284, 325) VIII Manciu Adrian (E : 2394—401, 3—6, 10—12), *Ş. g. 73* cl. VI. Dumitrescu Dan (E : 2415—8, 34, 5, 8, 9, 54—6). *Ş. g. 75* cl. VII Hanea Luminiţa (E : 2395, 8, 9, 410—3, 7, 8), cl. VIII Zirimis Mihai (E : 2394—6, 8, 400—6, 11, 3, 7, 9, 21, 3—6, 8—32, 4, 9, 41, 2, 4—6, 9, 50, 2—5, 7, 60—3), *Ş. g. 76.* cl. VIII Anghel Dorel (E : 2410, 2, 4, 5, 8, 20, 1, 4, 8), *Ş. g. 103.* cl. VIII Marinescu Viorel (E : 2417—9, 21, 3—8), *Ş. g. 121.* cl. VIII Dănescu Florin (E : 2432, 9—42, 4—7, 9), *Ş. g. 122* cl. VII. Brătescu Anca (E : 2396, 7, 401, 5, 10, 1, 3, 4, 24), *Ş. g. 123*, cl. V. Rogobete Nicoleta (E : 2395—401, 4), cl. VIII, Ciontea Mariana (E : 2395, 6, 8—401, 4, 9), Ciora Mihaela (E : 2395—401, 4), *Ş. g. 145*, cl. VI. Ciortan Aurel (E : 2410, 31, 2, 7, 9, 41, 2, 4), Michirin Mariana (E : 2429—32, 7—9, 41, 44), Uşurelu Mihaela (E : 2410, 31, 2, 7—9, 41, 2), cl. VII Comana Marian (E : 2340, 4, 8, 50—5, 61), Hanu Rodica, (E : 2410, 3, 30—2, 4, 7—9, 41, 2, 5), Marin Dumitru (E : 2395, 409, 10, 2, 3, 7, 8, 24, 8—31, 4, 45), Pudilie Elena (E : 2429—2, 4, 8, 41, 2), Aabo Ana (E : 429—32, 4, 9, 8, 41, 2, 5), Şerban Radu (E : 2429—32, 4, 7, 8, 41, 2), Stan Ionel (E : 2429—32, 7, 8, 41, 2, 7), Stăncuţ Silvia (E : 2410, 3, 31, 2, 4, 7—9, 41), cl. VIII Iacobescu Pepino (E : 2429—32, 5, 8, 41, 4, 5), Fata Georgeta (E : 2397, 400—2, 4, 10, 1, 9, 23, 4), *Ş. g. 146* cl. VIII Bădescu Smaranda (E : 2394—402, 4—6). *Ş. g. 156*, cl. VIII Ştefănescu D. Cătălin (E : 2400—6, 10, 3, 5, 7—9, 21, 32, 4, 40, 1, 4—9, 7284, 6, 8, 325, 6, 8) ; *A. g. 166.* cl. VIII Vasilescu Adriana (E : 2429—32, 8—41, 4—7, 50, 2—5, 60, 2), *Şg. g. 169* cl. VI. Ivaniev Lucia (E : 2410—4, 6—9, 21), cl. VII Hoisescu Nicolae (E : 2394, 402, 3—6), *Ş. g. Vasile Alecsandri* cl. VII Ionescu Daniel (E : 2429—32,

4, 5, 40—2), *Liceul 1 N. Bălcescu*, cl. IX. Roman Adrian (7222—4, 69, 84, 8, 96, 406, 9, 27, 8), cl. X. Georgescu Dan (267, 83, 93, 6, 300, 14, 7, 8, 20, 2, 3, 5, 6, 8) Stîrnea Mihai (7216, 7, 9—27, 31—6, 9, 42, 3, 46, 7, 58, 72, 6, 82—9, 91—3, 9—301, 5, 6), Popescu Anton (7284—8, 92, 300, 20, 3, 5), Hahn Radu (7185, 8, 90, 210, 6, 7, 9—26, 35), Stolojanu Grigore (7284—300, 17 , 8, 23—8 Teişanu Cornel (7272, 6, 83,—8, 91, 300, 17, 8, 23, 5, 6, 8), *Liceul 4* cl. VII 3298, Tomescu Dan (E : 2395—9, 401, 4, 5, 10, 11, 4, 7, 8, 28—31, 4, 44), *Liceul 5 Manolache C. Nicolae* (7174, 8, 84, 6, 9, 91—3, 6, 204, 12, 5—26, 31, 4—8, 40, 2, 3, 6, 7, 9, 51, 7, 8, 64, 74, 6, 8, 80, 2—304, 8, 13, 4, 7, 8, 20—3, 5—8, 33, 6, 9, 47, 51, 5, 64, 77, 97, 402, 5, P. N) *Liceul 6* cl. XI Frăţilă Eliade (7216—28). Liceul 7 cl. V Bereanu Vladimir (E : 2394, 6—8, 401, 4, 5, 30—2, 4 ; 7325), cl. VIII Radlinger David (E : 2410—4, 6—21, 3—8), cl. IX Nichita Anca (E : 2424—6, 44—7, 9 ; 8284—8, 326—8), *Liceul* 8 cl. IX. Cinteză Mircea (E : 2444—6, 8, 9, 60—3 ; 7325—8, 30, 9, 97), *Liceul 10* cl. VI. Brateş Nanu (E : 2397, 400, 3, 5, 11—3, 34), Pătrîngeanu Victor (E : 2395—7, 403, 5, 11—3, 7, 8, 426, 8, 34), Clasa IX. Mihăileanu Nicoleta (7284—88, 324—26, E : 2425—28) *Liceul 11* cl. IX Claiman Mişu (E : 2425, 78, 45, 7, 9, 61, 2 ; 7285—7, 317, 8, 21, 6, 8), Frangulea Ştefan (E : 2425—8, 45, 6, 8, 9, 62 ; 7284—7, 317, 8, 21, 6, 8), Sporea Şerban (E : 2426—8, 44—6 ; 7219, 84, 6, 7, 317, 8, 21, 6, 7), Tugoi Victor (E : 2424—8 ; 7284 ;—8, 317, 21, 5, 6, 8,), cl. X. *Pascaru Aurel* (7216, 7, 20—6, 35, 40, 76, 83, 5—7, 9, 300, 13, 4, 7, 8, 22—6, 8, 31, 2, 3, 4, 5, 51) 7219, 43, 7, 51, 88, 92, 97), Vlăduţescu Radu (7282—9, 92, 300, 17, 8, 22, 5, 6, 8, 33, 66, 72, 3, 5, 8, 9, 85, 8, 91, 402), cl. XI. Lutaşu Marius (7220, 5, 6, 8, 34—6, 8, 46, 7, 9—52, 8, 63, 72, 6, 83—92, 4, 5, 9—301, 15, 20, 2, 3, 5, 7, 33, 5, 9, 46), Teodorescu Valentin (7263, 4, 6—9, 72, 4—6, 80, 2—92, 4—7, 9—302, 4, 11—5, 7, 8, 20—3), *Liceul 12* Clasa X. *Ralescu Dan* (70, 19, 39, 48, 50—4, 64, 6—70, 3, 7, 80, 3, 9, 91, 100, 2, 5, 10, 2, 7, 9—25. 30, 1, 3—6, 8, 42,—6, 8, 54, cl. VI. Rizescu Marieta (E : 2411, 3, 7, 30, 4, 8, 9, 41, 2), Liceul 13, cl. X *Petrescu Andrei* (6988—91, 5, 7005, 20, 2, 45, 50, 9—61, 6, 9, 70, 3, 7, 80, 1, 91, 119——22, 7, 9, 30 216, 7, 9—26, 35, 7, 72, 6, 82—5,9, 9—91, 5, 300, P) *Liceul 15* cl. XI. Tuţescu Gabi (7216—22, 4, 8, 39, 47, 83, 5), *Liceul 17* cl. IX. Zirimis Gabriel (E : 2424—8, 44—6, 9, 70, 2, 3 ; 7284—8, 325, 6, 8), cl. X. Avrămoiu Valentin (7216, 7, 20—7, 31, 40, 2, 4, 78, 82—8, 90—3, 5—7, 8, 300, 13, 4, 7, 8, 20—3, 5, 6, 7, 33—5), *Liceul 18* cl. X Musceleanu Ion (7216—9, 21—4, 35, 7, 76, 8, 82—8, 91, 2, 5, 1, 9, 14, 7, 8, 25, 5, 78, 35, 77 87), *Liceul 22* cl. X Cristoloveanu Sorin (7272, 6, 8, 84—9, 91, 2, 5, 6, 9, 300, 13, 4, 7, 8, 22, 4—6, 8, 35, 66, 72—6, 8, 82, 5, 97, 402, 3), *Liceul 23* cl. XI Zaharia Dragoş (7216, 7, 9—26, 35, 9, 46, 50), *Liceul 25* cl. X. Adam N. Silviu (7216, 20—4, 40, 84—8, 325, 6, 8), Rădulescu Nicolae (7216, 20, 1, 3, 4, 40, 84—8, 326), Făcină Horia (7282, 3, 6, 93, 9, 300, 18, 20, 3, 6, 8, 39, 75, 7, 8), *Liceul 28*. cl. VI. Ciobanu Mihai (E : 2394, 5, 7, 400, 10, 11, 3, 33, 4, 9, 40, 2, 4—6, 53, 4, 60, 2), cl. VIII Ceauca Dan (E : 2395, 6, 8—401, 3, 4, 12, 3, 7, 8, 23, 5, 30, 11, 4), *Liceul 30* cl. IX Cachela Cristian (E : 2409, 25—8, 44—6, 8, 9 ; 7283, 5, 7, 8, 317, 8, 25, 8), *Liceul 32* cl. VII Popoviciu Liviu (E : 2394—406, 9), *Liceul 33* cl. VII. Nuţă Mariana (E : 2430—2, 4, 8—42) *Liceul 34*, cl. VII Geavlete Petrişor (E : 2429—32, 4, 8, 240, 2, 4) *Liceul 35*. cl. VIII Delangela Florin (E : 2430,—2, 4, 8, 9, 41, 2, 4 ; 7326, 7), *Liceul 39* cl. VIII Guida Cirtsian (E : 2394, 5, 7, 8, 400, 1, 3, 4, 9), Petrescu Dragoş (E : 2421, 3, 6—8. 38—41, 4—6, 9 ; 7284, 325, 8), cl. IX. Bodea Tatiana (E : 2423, 7, 8, 45—7 ; 7284—7, 325, 6, 8), Peliman Mircea (E : 2424, 5, 7, 8, 44—9 ; 7284—7, 325, 6, 8), cl. X. Gavriliuc Mihai (7216, 22, 4, 85—8, 317, 8, 25—8), *Liceul* 40 cl. X. Enea Teodora (7216—20, 2—4, 6, 33, 99, 300, 17, 8, 26, 8, 32, 3), Moldoveanu Mariana (6224, 5, 32, 4, 5, 47, 300, 17, 8, 26—8),

BUHUŞI (BACĂU). *Ş. prof. ucenici* Anul I. Muscalu Aurica (E : 2400, 1, 3, 21, 3, 5, 7, 8).

BUZĂU, *Ş. g. 5* cl. VIII Constantinescu Florin (E : 2429, 32, 4, 8, 9, 41, 4—6, 50, 2—5, 62), *Liceul 1* cl. VIII. Burloi Maria (E : 2395, 9, 400, 10—4, 8—21, 3, 8), Constantinescu Ştefania (E : 2432, 3, 8, 9, 41, 9, 53, 4), Croitoru Viorica (2395—9, 400, 2, 4, 5, 11—3, 7—9, 21, 4, 5, 8, 30, 1), Grigorescu Adriana (E : 2410—2, 14, 7—9, 21, 3, 5, 8, 9, 41—3, 62), Mirea Vasile (E : 2397, 402, 10—4, 6—20, 4, 5, 8), cl. IX. Ştefănescu C. Lidia (E : 2428, 45—7, 60—2 ; 7284—8, 326, 8).

BUZIAŞ (BANAT). *Liceul 1* cl. VI. Toma Constantin (E : 2395, 6, 8, 404, 5, 29, 30, 4), cl. VII Micşa Rodica (E : 2410—3, 6—8, 32), Meglei Ionel (E : 2429—32, 4, 9, 41, 2), cl. VIII Goţia Simona (E : 2429—32, 8—42), Telibaşa Cornelia (E : 2429—31, 4, 40, 4, 5, 50, 3, 62).

CARACAL. *Liceul 1* cl. IX. Alexandru Alexandru (2444—7, 9, 60—3 ; 7314, 7, 8, 25, 6, 8, 85), *Liceul 2* cl. IX Enache Gh. (2926, 8, 44—7, 60, 2 ; 7225, 17, 25, 6, 8, 85), cl. X *Virlosu Mihail* (7272, 6, 8, 82—8, 91—3, 5—301, 6, 8—10, 3, 4, 7, 8, 20—8, 30, 3—5, 7, 42, 7, 52, 2).

CARANSEBEŞ. *Liceul 1.* cl. VI. Poiană Dinu (2410—3, 20, 31, 4, 8, 44, 5), cl. X *Ştefănescu Mircea* (7218, 20, 1, 33, 5, 40—4, 6, 9, 52, 8, 62, 72, 6, 83—8, 91—3, 5—7, 9—

—301, 13, 7, 8, 20, 3, 5, 6, 8, 30, 5), *Liceul 2* cl. VI Vermescher Liana (2395, 6, 8, 9, 411, 3, 32, 8), *Electromecanic* Sgăvîrdea Dumitru (7216, 7, 9, 20, 2—7, 36, 46, 7, 82, 6, 7, 9, 91, 2, 5, 6, 9—301, 17, 8, 20, 3, 5, 6, 8, 39, 42).

CALAN (Hunedoara). *Liceul 1.* cl. VIII. Fazakaş Clara (2432, 8, 9, 41, 2, 9, 7326, 8), Ferencz Eva (2395, 6, 8, 401, 2, 4, 9, 30—2, 4, 8, 41, 7, 9; 7326, 8), Petruş Dorina (2404, 30, 2, 8, 9, 41, 7, 9; 7326, 8), Schuster Herts (2404, 30—2, 41, 9; 7326, 8), Tandadis Gheorghiţa (2402, 4, 9, 30, 2, 8, 41, 7, 9; 7326, 7), cl. XI. Cubineţ Ion (7263, 72, 6, 82—8, 90—6, 9—301, 3, 4, 15, 7, 20, 5—8, 30,3, 5, 9, 42), Marincaş Mircea (7256—20, 2—5, 6, 47, 72, 6, 82—9, 91, 5, 6, 301, 17).

CĂLIMĂNEŞTI (ARGEŞ). *Liceul 1* cl. VIII Popa M. Decebal (2419, 21, 3—5, 7, 8, 44—7), Predescu Mihai (2419, 21, 3—8, 44, 5)

CARAND *Ş. g.* Bortiş Ioan (2400, 1, 4, 9, 10, 21, 3, 7, 8, 40, 5, 6, 9).

CEICA. *Ş. g.* cl. VII. Troie Valeriu (2410—4, 7—22, 4—6, 30—2, 4, 9—41, 4—7).

CHELARU (OLTENIA). *Ş. g. 1* cl. VI Leoveanu Constantina (2412, 3, 32, 4, 8, 9, 41, 2), Petcu Marian (2410—3, 8, 24, 30, .1, 4, 41), Stancu Silvia (2412, 3, 32, 4, 8, 9, 41, 2), cl. VII Celăreanu Viorica (2312, 3, 7, 32, 4, 8, 9, 41, 2), Dinu Floarea (2412, 3, 7, 29, 32, 4, 8, 41, 2), Iliescu Elena (2412, 4, 7, 32, 4, 8, 9, 41, 2), Stan Maria (2396, 411—3, 32, 4, 7, 9, 41, 2), Tiţa Oprica (2412, 3, 7, 32, 4, 8, 9, 41, 2), cl. VIII Licurici Tudor (2395, 6, 8, 404, 11—3, 8), Tudor Alexandru (2396, 418, 20, 3, 31, 4, 8, 9, 41, 2).

CISNĂDIE (BRAŞOV). *Liceul 1* cl. IX. Neagu Alexandru (2425, 8, 44—7; 7286, 7, 32, 326, 8).

CÎMPIA TURZII (CLUJ), *Liceul 3* cl. VIII Bogdan Octavian (2410—3, 7—9, 21, 3—5, 8), Bretoiu Sorin (2410—4, 7—9, 21, 3, 5, 8, 31, 2, 4, 8—42, 4—7, 9), cl. IX. Klein Iuliana (2424, 8, 44—7, 9; 7284; 325—8, 325, 6, 8), Tulai Lucia (2425, 8, 44—7, 9; 7284—8, 325, 8), cl. X. Secui Dora (7217, 22, 85—7, 9, 300, 17—23), Toader Iosif (7217, 9—23, 32, 33, 8, 40, 72, 6, 8, 91).

CÎMPINA (PLOIEŞTI). *Ş. g. 1* cl. Grădinaru Şerban (2410—5, 7, 8, 34), cl. VIII Ivaşcu Ciprian (2411—3, 28, 31, 2, 3, 8), cl. IX. Rădulescu Cornel (2428, 45—7, 9, 60, 2; 7284, 6, 7, 326, 8), cl. X. Andrei Gh. (7284—8, 92, 9—301, 18, 23, 5—7), Constantinescu Florin (7216, 23—6, 76, 84—8, 90, 2, 3, 300, 13, 7, 8, 21—3), Ghenoiu Daniel (7220, 4, 39, 76, 84, 6—8, 91, 9, 300, 1) Ivaşcu Florin (7220, 1, 34, 76, 84—7, 9, 91, 61, 9, 300, 1), Marin Ion (7219, 20, 4, 84, 5, 8, 91, 9, 301, 17, 25‘ 6, 7), Stoian Luminiţa (7213, 34, 6, 72, 83—9, 98—300, 17, 8, 23, 5, 6, 8), Văcăroiu Ioana (7296, 314, 7, 8, 22, 3, 5, 6, 8, 64, 6, 75, 99), Ş. g. 2 cl. IX. Guran Natanil (2424—8, 44, 5, 7; 7284, 5, 8, 325, 6, 8), Muscaliuc Valeria (2424.6, 8, 44—7; 7284, 5, 8, 326, 8), Vişa Florian (2425, 7, 8, 44—6, 7, 9, 60, 2; 7286—8, 326).

CÎMPULUNG MOLDOVENESC. Ş. g. 3 cl. VII. Cojoc Mihai (2412, 3, 30—2, 4, 8, 9, 41, 2), *Liceul militar* cl. X Ababei Mihai (7216, 20, 2—5, 84—8, 300, 17, 8, 23, 5, 6, 8), Cîineanu Ion (7216, 22, 4, 82, 3, 98—301, 9, 17, 8, 20, 3, 6, 8, 335, 7), Maravela Dumitru (7216, 7, 21, 83, 6, 92, 5, 8—30, 9, 326, 8), Matei Ioan (7216, 22—4, 83, 5, 92, 8, 301, 35, 6, 8), Munteanu Gh. (7220, 3—5, 84—8, 300, 17, 23, 5, 6, 8), Năstase Gh. (7216, 20, 2—5, 84—300, 23), Popescu Ovidiu (7217, 9—25, 31, 4—6, 40, 4, 6, 72, 6, 8, 82—7, 9, 91—3, 6, 8, 9), Radu Emil (7216, 20, 2, 3, 84—8, 323, 5, 6, 8), Sabău Ioan (7216—27, 33—5, 7, 9,9 43, 5—7, 72, 6, 8, 82—8, 91, 2, 5, 6, 9301, 8), Timiş Pricop (7131, 4, 8, 90, 2, 217, q 21, 2, 4—6, 76, 82—4).

CLUJ. *Ş. g. 2* cl. VII. Coţiu C. Lia (2411—4, 7—9, 27, 8), *Ş. g. 7* cl. VII Zglobiu Nicolae (2415, 22, 4, 8—30), *Liceul 2* cl. VI Băjă ică Stela (2401, 10, 1, 3—5, 7, 8), cl. VII Marina Florin (2411—4, 6—8, 32, 54, 5), cl. VIII Mihălceanu Dan (2410—3, 21, 3, 8, 31, 8, 9; 7286, 7, 95, 8, 325, 7), cl. X Cîrmăeanu Radu (7284, 5, 7, 8, 92, 300, 1, 17, 8, 25—8, 30, 3, 5, 42), *Liceul 3* cl. VII Straus Adriana (2394—6, 8, 400, 1, 3, 4), *Liceul 4* cl. VIII Barbu Liviu (2394, 5, 9, 400, 2, 3, 10, 1, 3, 5—9, 25, 8, 31—4, 8, 9, 41, 2, 5), Samson Luiza (2395, 404, 2, 21, 32, 8, 9, 41, 2), *Liceul 5* cl. VIII Ordentlich Ana (2430—4, 40—2, 4, 5), *Liceul* 8 cl. VI Juga Doina (2410—3, 6, 31, 7, 8, 9), cl. VIII Goşa Teodor (2395, 8, 410, 1, 3, 31, 2, 4), cl. IX Lăţiş Marius (2424, 5, 7, 8, 45, 7, 9; 7285—8, 325, 6, 8), Man Augustin (2424—8, 46, 7, 9; 7284, 6—8, 91), Tudoran Tudor (7256, 9, 20, 2—4, 34, 5; 2409, 24, 7, 8), cl. X Fărcăşanu Mircea (7217, 84—8, 92, 300, 17, 25, 6, 8), Lazăr Aurel (7216, 7, 9—27, 39, 72, 6, 8, 83—8, 92, 3, 5—399, 9, 17 , 8, 22, 3, 5, 6, 8, 30), Stoian Daniela (7284, 6—8, 92, 9, 300, 17, 8, 21, 3, 5, 6), cl. XI Mareş Maria (7216—8, 22—4, 6, 82, 3, 8, 300, 18, 20, 6, 39), *Liceul 11* cl. VII Schi Vera (2410—4, 7, 8, 22, 8), Szabo Elisabeta (2410—4, 6—8, 28), cl. VIII Borathy Ghyula, Gyärgy Eva, Hegyi György (2410—3, 6—8, 22), *Liceul 15* cl. VI. Iancic Pepinela (2431, 2, 4, 8, 40—2, 4—6), cl. VII Horvat Viorica (2395, 7, 8, 404, 10—3), Iancic Bubu (2431, 2, 4, 8, 40—2, 4, 6, 7), Tripon Antoaneta (2395, 7, 8, 404, 10—3, 32), cl. VIII Iancău Marian (2395, 8—401, 3—6).

CONSTANȚA. *Ș. g. 12* cl. VIII Gurman Monica (2410—3, 7—9, 28, 31, 2, 4, 8), Ivanet Mircea (2410—3, 7—9, 21, 8), Simota Cătălin (2430, 1, 4, 9, 41, 2, 50, 62), *Liceul 1* cl. VIII Gheorghiu Dan (2394, 5, 7, 400, 1, 3—6), cl. IX *Achif Lucsel* (2407, 9, 24—8, 7216, 9, 20, 2—4, 31, 3, 4—6, 42, 72, 6, 84—8, 9, 96, 301, 14, 7, 8, 21, 5—8, 30, 9), cl. IX. Ionică Ștefan (2392, 8, 44—7, 9, 60—3), Trandafir Titi (2424—6, 8, 45, 7, 9; 7288, 317, 8, 21, 5, 6, 8), cl. X Bîrzan Aurelia (7283, 4, 6—8, 300, 14, 7, 8, 22, 5, 6, 8, 64, 72), Chiriac Călin (7225, 6, 34, 5, 9, 47, 87, 92, 301, 20, 3, 6), Ene Sandu (7286—8, 9, 2, 3, 5—7, 300, 1, 17, 8, 22, 3, 5, 6, 8, 32, 4, 5, 8), Dimitrescu Mircea (7276, 83, 6, 7, 300, 14, 3, 9, 22, 5, 6, 8) Mehmez Bema (7276, 82, 3, 91, 301, 14, 8, 26, 8, 34, 5, 42), Persai Radu (7272, 6, 96, 317, 21, 5, 6, 8, 85, 7, 97, 401, 2), *Liceul 2* cl. X. Gülbenkian Irina (7217, 27, 34, 5, 67, 75, 6, 83, 5—7, 92, 9), *Liceul 3* cl. X Hristu Mihaela (7282, 3, 91, 301, 14, 23, 6, 35, 60, 75, 6, 9).

CORABIA. *Liceul 1* cl. IX. Veselin Ion (2425, 7, 8, 44—6, 7284—8, 325, 6, 8).

COSTEȘTI (ARGEȘ). *Liceul 1* cl. VIII Ilie P. Ștefan (2395, 411—3, 9, 21, 3, 4, 8), cl. XI. Negurescu Nicolae (7272, 6, 83—8, 92, 5, 300, 8, 20, 3, 6, 8).

COSTEȘTI (BUZĂU) *Ș. g.* cl. VIII Tudorache Valerica (2417, 8, 21, 3, 4, 67, 8, 31, 2, 7, 9).

COTATCU (PLOIEȘTI), *Ș. g.* cl. VII Iorga Gh. (2395, 9, 400, 4, 12, 3, 7, 24, 6, 8).

CRAIOVA. *S. Cămin 8* cl. VI. Frăchioiu Maria (2397—402, 15, 8, 9, 38), *Ș. g. 24.* cl. V Ciulin Niculița (2411—4, 7, 8, 29—32, 4, 9—42), 4, 5), *Liceul 1* cl. Nicolau Valeriu (2431, 2, 9 41, 5, 52, 3, 5, 62), cl. IX. Didu Marin (2426, 45, 6, 9; 7284;—8, 325, 6, 8), cl. X. Bălan Virgil (7291, 2, 5, 300, 17, 8, 20, 2, 5, 6, 8, 35, 73, 5, 8), *Pătra Cristian* (7220—3, 72, 83—5, 8, 9, 96, 7, 9, 314, 7, 8, 20—3), 5, 6, 8, 30, 5, 9, 48, 64, 6, 72, 5, 7, 9, 85, 91, 2, 5, 302, 5, 10), Aandu Viorel (7284—8, 91, 2, 9, 300, 23, 5, 6, 8), Sprîncenatu Constantin (7216, 7, 21, 2, 4—6, 47, 82, 92, 7, 9), Dediu Luminița (7216, 7, 20—7, 68, 84, 92, 300, 3, 20, 3, 5, 6, 8, 39, 43), *Liceul 2* c.l. IX. Aștefanei Ion (2425, 6, 8, 45, 6; 7284—8, 725, 6), Botezat Liviu (2425, 7, 8, 45, 6, 9; 7284,—8, 325, 6, 8), Cergă Viorel (2424—8; 7284—8, 325, 6, 8), Cherciu Constantin (2425, 8, 45—7; 7284—8, 326, 8), Dumitrana Irina (2424—8, 44—6, 9; 7284—8, 325, 6, 8), Vicol Dan (2424—8, 45, 7, 9, 60—2; 7284—8, 325, 6, 8), cl. X. Ghergă Florian (7283, 6—8, 92, 300, 1, 13, 7, 20—2, 6, 8), Sarivan Ion (7272, 84, 6—9, 91—3, 5—7, 9, 300, 17, 22, 3, 5, 6, 8, 33, 5), *Stoica Lucrețiu* (7219—21, 3, 4, 31, 2, 4—40, 2, 3, 72, 5, 6, 84—97, 9, 300), cl. XI. Georgescu Dan (7216, 7, 9, 22—7, 34, 9, 42, 7, 50, 1), *Liceul 3* cl. VI Gentu Florin (2398—401, 11—3, 8), cl. VIII Brătianu Daniela (2410—3, 5, 9, 21, 3, 7, 31, 2, 4, 8, 9, 41), Comănescu Lavinia (2410—2, 5, 7, 9, 21, 3, 7, 8, 31, 2, 7—9, 41, 5, 7, 9, 60—3), cl. IX. Brăiloiu Danca (2409, 25—8; 7219, 23, 4, 35, 84—8), cl. X. Diaconu Ion (7216, 7, 9, 20, 2, 4, 84, 5, 7, 8, 92, 9, 300), Muscalgiu Nicolae (7216, 7, 9, 20, 2—5, 47, 84, 5, 7, 8, 91, 300), Popa V. Ion (7216, 7, 20, 2—5, 47, 84, 5, 7, 8, 91, 2, 9, 300), Șerbu Anca (7216, 7, 20, 2, 4, 5, 84, 5, 7, 8, 97, 9, 300). cl. XI. Călinescu Mignolla (7216, 7, 20,—7, 84, 8, 92, 325, 6), Dumitrscu Sorin (7216, 28, 20, 78, 83—5, 7, 8, 92, 317, 8, 20, 2, 3, 6), Gheorghe Cicel (7216, 7, 8, 8, 22—4, 78, 83—8, 317, 8, 20, 5, 6, 8, 39), Ursățeanu Ion (7216, 7, 20, 1, 3—6, 82, 3, 323, 39), *Liceul 4* cl. IX. Dima Grigore (2392, 409, 25, 7, 8, 45, 6; 7824—8), Dinu Ștefan (2392, 409, 28, 45, 6, 9; 7185, 285—8, 325, 6, 8), Ghinea Ioana (2409, 25, 8, 44—6; 7233, 84, 6—8, 328), Mircea Maria 2409, 19, 21, 3, 4, 7, 8; 7219, 20, 3, 84—8, 91), Ristoiu Veronica (2391, 2, 409, 25, 8, 45, 6; 7284—8, 326). *Liceul 5* cl. XI Mareș Florin (7217, 22—4, 47, 66, 78, 80, 2—7, 91—3, 6, 9, 301, 3, 4, 13, 4, 7, 8, 20—3).

CRĂCIUNA (ARGEȘ). *Ș. g.* cl. VIII Păduraru Angela (2410, 1, 3, 5, 7—21, 3—8).

CUGIR (ORĂȘTIE), *Liceul 1* cl. IX. Buta Mircea (2424—8, 7219, 20, 2—8, 34, 5).

CURTEA DE ARGEȘ. *Ș. g. 5* cl. VIII Soare Elena (2419, 28, 31, 4, 8, 41, 2, 5), *Liceul 1* cl. XI. Băluță Filofteia (7278, 82, 3, 6, 7, 300, 1, 3, 4, 14, 17, 8, 20, 39, 42, 5).

CUȚ (HUNEDOARA). S. *g.* cl. VII Anghel Suzana (2413, 28, 32, 4, 8, 9, 41, 2), Dicu Ana (2413, 8, 28, 31, 4, 8, 41, 2), Munteanu Cornelia (2413, 6, 28, 32, 4, 8, 9, 41, 2), cl. VIII Bitea Rafila (2413, 24, 5, 8, 31, 2, 4, 8, 9, 41, 2), Bîtui Rozalia (2413, 24, 8, 31, 2, 4, 8, 9, 41, 2).

DĂENI (DOBROGEA). *Ș. g.* cl. VIII Enciu P. Aurel (2394, 6—8, 401, 3, 5, 10, 1, 3).

DARMĂNEȘTI (ARGEȘ). *Ș. g.* cl. VI Dumitrache Aneta (2410—5, 7, 25, 8—32, 4, 8—42, 4—6, 9).

DEALUL-FRUMOS (BRAȘOV). *Liceul 1* cl. IX. Hirist Aurel (2425—8, 44—6, 8, 9, 60—2, 7284, 7, 8, 325, 6, 8).

DEJ (CLUJ). *Liceul 1* cl. VIII Bobu Ioan (2430—2, 4, 8, 9, 41, 2), cl. IX. Peter Dan (2424—6, 8, 45—7, 9; 7284—8, 325, 6), Solymony Zoltan (2423, 5, 6, 8, 44, 6; 7284—8, 91, 326, 8), cl. X Ilieș Ioan (7216, 7, 9, 22, 3, 84, 6—8, 90, 1, 300, 18), *Liceul 2* cl. VII Mureșan Marcela (2394—8, 401, 3—6), Liceul 2 cl. VIII Pacol Viorica (2395, 400, 4, 10, 2, 3, 9, 21, 3, 31, 2, 4, 40), Smărășanu Ovidiu (2395, 400, 4, 10, 2, 3, 9, 21, 31, 4), cl. IX

Bizo Marinela (2425, 6, 8, 45—7; 7284—8, 325, 6, 8), Galiș Dumitru (2425—8, 45, 6; 7284—8, 325), Leițoiu Bogdan (2425, 6, 8, 45, 6; 7284—8, 325, 6).

DEVA. *Ș. g.* cl. V. Petringenaru Rodica (2394—7, 410—3), *Șc. pedagogică* cl. VI Borza Sorin (2394—402).

DETA (Banat). *Liceul 1* cl. VI. Ciurea Mioara (2397, 8, 411, 3, 5, 6, 8, 22, 8), cl. VII. Milici Vlademir (2429—2, 4, 9, 41, 4, 5, 325).

DOLHASCA (SUCEAVA). *Liceul 1* cl. X Alexandrescu Clement (7237, 89, 91, 2, 5, 8, 300, 2, 9, 10, 2, 7, 20—3, 5, 6, 8, 30—2, 42, 7, 8).

DOROHOI. *Ș. g. 1.* cl. VIII Beleșică Marcel (2411, 3, 7—9, 21, 7, 8), Ștefanovici Constantin (2410—4, 7—9, 1, 3, 4, 7, 8, 30—2, 4, 9, 45), *Ș. g. 2* cl. VII. Bălan Adi (2430—2, 41, 5, 52—4), Liceul 21 cl. IX. Rusu Mariana (2431, 2, 4, 9—42, 5, 6, 50, 2, 3, 62).

DRĂGĂȘANI. *Ș. g.* 1. cl. VIII. Dorobanțu Petrică (2430—2, 4, 8, 9, 41, 2, 4, 5, 8—50, 2—6, 8, 60, 1).

DRĂGĂȘANI (ARGEȘ), *Liceul 1* cl. IX. Lungu Ion (2424—8, 44—6, 9; 7294—8, 325, 6, 8), Stăvaru Gh. (7219, 21—3, 36, 84, 6—8, 314, 8, 21, 5, 6), cl. X. *Titu Gh.* (7276, 83—9, 91, 2, 5, 6, 9—301, 13, 4, 7, 8, 20—3, 5, 6, 8, 33, 5, 8, 49, 60, 72—5, 7, 8, 97—9), cl. XI. Stelea Constantin (7284, 6—8, 91, 9, 300, 9, 17, 8, 20, 25, 6, 8, 39).

DUMBRĂVENI (BRAȘOV). *Liceul 1* cl. X. Dumbrăveni (7275, 8, 82, 3, 5—8, 95, 300, 8, 13, 4, 7, 8, 20—2m, 5, 6, 8, 33—5, 9).

EDEVA (PLOIEȘTI). *Ș. g. Edeva* cl. VI Șelaru Constantin (2419, 21, 3, 6, 7, 32, 8, 42, 9).

FĂGĂRAȘ. *Liceul 1* cl. XI. *Otrocol George* (7251, 65, 6, 72, 6, 8, 84, 6, 7, 90—3, 9, 300, 3, 12—4, 7, 8, 20, 2—6, 8, 30, 2, 5, 7—9, 42, 5, 7, 9, 51), Rotaru Fabiu (7223, 72, 3, 5, 7, 84, 5, 7, 95, 402, 6, 16).

FĂGET (BANAT). *Liceul 1* cl. X. Babescu Marius (7313, 4, 7, 8, 21—3, 5, 6, 8, 33, 5, 9).

FĂLTICENI. *Liceul 2* cl. IX. Grigoriu Radu (2425, 6, 8, 45—7, 9; 7284, 6—8, 325, 6, 8).

FETEȘTI. *Liceul 1* cl. XI. Stănescu Matilda (7266, 82—4, 6, 7, 300, 3, 12, 7, 8, 20, 2, 3, 6, 8, 37, 9, 43, 5, 72, 3, 7, 83—5, 91).

FIENI (ARGEȘ). *Liceul 1* cl. VI. Bădeanu Luminița (2394—6, 8, 400—2, 4), Bratu Adina (2395, 402, 4, 10—3, 24), Holban Cristima (2401, 3, 5, 10, 3, 7, 24), Jipescu Liliana (2397, 403, 5, 10m, 1, 5, 6, 24), cl. IX. Popescu Florin (2409, 25; 7219—23, 31, 5, 84, 5, 7—9, 325, 6), cl. X. Chivoiu Pompiliu (7216, 7, 9, 21—6, 84, 6, 7), Zarioiu Gh. (7216, 7, 9, 21, 5, 6, 83 5—7, 92, 301).

FILIPEȘTI-PĂDURE (PLOIEȘTI). *Liceul 1* cl. XI. Chivu Vasile (7216, 22—4, 35, 47, 88, 91, 317, 9, 23, 6, 35).

FOCȘANI. *Ș. g. 7* cl. VI. Iacob Dan 2434, 8, 9, 41, 2, 4, 5, 54, 5), Liceul 1 cl. X. Tănăsescu Constantin (7242, 51, 2, 4, 61, 3, 4, 72, 6, 89—92, 4, 6, 7, 9, 308, 9).

FRASIN (SUCEAVA). *Ș. g.* cl. Volanschi Georgeta (2441, 9, 50, 2, 3, 5, 62, 3).

FRINCEȘTI (ARGEȘ). *Ș. g.* cl. VII. Paraschiv Dumitru (2394, 6—9, 401, 2, 4—6).

GALAȚI. *Ș. g. 7* cl. VII Mrîrzescu Doina (2411, 3, 7, 30—2, 4, 41), *Ș. g. 23* cl. VIII Baicu Ionel (2410—3, 5, 7—9, 21, 3, 8, 45; 7284). Thiel Valeriu (2410—4, 7, 9, 21, 3, 5). *Ș.g .24* cl. VII. Cernov Anghel (2412, 29—32, 4, 9, 40), Costiniuc Florin (2400, 8, 14, 5, 7—9, 26, 8—32, 4, 7—42, 5, 7, 54—7, 9), Frunză Ion (2410—3, 8, 20, 9—32, 4, 9, 40), Ioan Alexandru (2410, 4, 6—8, 28, 30—2, 4), Orzechowsky Richard (2411—3, 7, 8, 30, 1, 4, 9, 44), *Ș. g. 25.* cl. VIII Niculescu Bogdan (2431, 9, 41, 7, 50, 61—3). *Ș. g. 26* cl. VII Buica Monica (2394—8, 400—5), Tomazei Dan (2410, 3, ,8, 9, 23, 8, 32, 8, 41), *Ș. g. 28* cl. VII. Cristian (2395, 8, 40—3, 8, 9, 24), Eftimie Ion (2394, 6, 8, 404, 10—2, 8, 9), *Ș. g. T. Vladimirescu* cl. VIII Cana Ștefania (2430, 1, 4, 9, 44, 5, 9; 7325, 6, 8), *Liceul 1* cl. X. Cerbu Octavian (7221, 2, 4, 35, 6, 9, 84, 5, 8, 317, 8, 25, 6), Niculiță Petre (7222, 3, 76, 83—8, 92, 300, 17, 8, 22, 5, 6, 8, 8, 33), Oprea Vasile (7283—8, 95, 9, 317, 8, 20, 3, 5, 6, 8, 37), 72, 3, 5, 95), cl. XI. Ignătescu Radu (7282, 3, 6, 7, 317, 8, 20—3, 6, 66, 72, 3, 5), 7, 9,91), *Liceul 2* cl. X. Păușan D. Virgil (7282 , 8, 317, 8, 20—3, 5, 6, 66, 72, 3, 5, 7, 8, 91, 9), *Liceul 3* cl. VIII Sușnea Svetlana (2395, 7, 9—402, 4, 5, 19), *Liceul 5* cl. X. Dumitriu Ion (7276, 82, 4—9, 91, 300, 5, 6, 8, 73, 97, 402), cl. XI. Anghelescu Gabriela (7228, 50, 82, 3, 303, 4, 11, 20, 6, 8, 39, 43, 5), *Liceul 6* cl. X. Ivănescu Paula (7216, 7, 22, 4, 6, 8, 84—7, 90, 2, 300).

GĂIEȘTI (ARGEȘ). *Liceul 1* cl. X Ene Ion (7238—40, 2, 3, 92.4, 8, 9—301, 5), Oprescu Dănuț (7285, 9—300).

GĂTAIA (BANAT) . *Liceul 1* cl. VIII Ghilezan Mihai (2395, 404m, 6, 52, 3, 9, 21, 3, 4, 6—8).

GHIZDARU (GIURGIU). *Ș. g.* cl. VIII. Sotrocanu Constanța (2410—4, 7, 8, 20, 2, 4, 5, 8).

GIURGIU. *Ș. g. 1* cl. VII. Neacșu Maria (2395, 412, 3, 8, 30, 24,9), Liceul 2 cl. IX. Capră Maria (409, 24, 7, 8, 46, 84—9, 91, 326), Isar Aurelian (2409, 24—8, 44—7, 9, 60—3; 7284, 6—8, 326, 8), Tena I. Marcel (2426, 44—9; 7317, 8, 25, 6, 8), cl. XI. Muscalu Ilie (7218—

—20, 2, 3, 5, 76, 83, 6, 7, 9, 92, 3, 300, 2), Voicu Ion (7218—20, 2, 3, 5, 76, 83, 6, 7, 9, 92, 300, 2), Voicu Paul (7216—8, 20, 2, 4—6, 47, 50, 76, 82, 3, 6, 7, 9, 92, 3, 5, 300, 1, 4, 18, 20, 3, 6, 8, 33, 7, 9).

GORUNA (PLOIEŞTI). *Ş. g. 2* cl. VIII Cimpoieşu Gh. (2410—21, 3—5, 7—32, 4, 8, 42, 4—7, 9), Petrescu Lucian (2410—21, 3—5, 7—32, 4, 8—42, 4—9).

GOVORA (ARGEŞ). *Liceul 1* cl. VIII. Băncioi Ion (2413, 7, 9, 21, 32, 9, 41, 2, 5).

GOEŞTI (OLTENIA). *Liceul 1* cl. IX. Stoc Mihai (2425, 7, 8, 44—6, 8; 7284—8, 325, 6, 8).

HALEŞ (BUZĂU). *Ş. g.* V. Gavrilă Nicolae (2395, 410—3, 28, 32, 8). Ioniţă Elena (2411,—3, 5, 7, 29, 30, 2, 4), Ichimescu Sofia, Zîvnea George (2411—4, 30—4), cl. VI. Dogaru Anghel (2412, 8, 28, 31, 4, 9, 41, 53), Stanciu Ioana (2411—3, 5, 29, 32, 4, 9), cl. VII. Panait Elisabeta (2411—3, 8, 32, 8, 9, 41), Pinţoi Dumitru (2429—2, 4, 8, 9, 41), Matara Toma (2412, 8, 20, 4, 30, 1, 2, 4, 8, 9, 41, 2), Vişan Ştefan (2418, 21, 9, 30, 2, 4, 8, 9, 41, 5, 7), cl. VIII. Dogaru Vasilica (2410, 9, 23, 4, 8, 30, 4, 9, 40), Vişan Alexandru (2411—4, 9, 21, 3, 30—2, 4).

HÎRLĂU (IAŞI). *Liceul 1* cl. X Solomon Adi (7267, 72, 6, 8, 84—9, 91, 3, 6, 9, 300, 8, 17, 22, 5, 6).

HOREZU (ARGEŞ). Liceul 1 cl. XI. Buşe Marcu (7212—5, 7, 8, 20, 3, 5—8, 31—3, 5, 7, 9, 40, 2, 3, 5—7, 51).

HUNEDOARA. *Ş. g. 4* cl. VII. Mărculescu Nicolae (2429, 31, 2, 4, 8, 9., 41, 2, 5), Zamfirescu Constantin (2410—3, 7, 8—32, 4, 8, 9, 41, 2, 5), cl. VIII, Pitea Mihai (2414, 7—9, 23, 34, 8, 9, 41, 9; 7287, 326), Poenaru Mihai (2418, 31, 2, 4, 8, 41, 2, 5, 53, 5, 62; 7318; 26, 8), Rusan Mihai (2411—3, 20, 4, 5, 54, 5, 61, 2; 7326, 8), Toma Ilie (2412, 3—8, 24, 5, 31, 2, 4, 8, 9, 41, 2, 53, 5, 62; 7326, 8), Liceul 1 cl. VIII Jula Angela (2410—3, 7—20, 4, 5, 8, 32, 4, 41, 2), Palcău Ecaterina (2411—4, 7, ,8, 21, 8, 30, 1, 4, 8, 9, 41, 2, 55), cl. X. Mogoşan Petru (7283—9, 300, 18, 23, 5—8), *Oprişa Dan* (7267, 9, 82, 3, 6—8, 95, 9, 300, 1, 17, 8, 20, 3 5, 6, 8, 37, 42), 60, 4, 72—5, 7, 9, 82, 5, 8, 97—9, 402, 18), cl. XI. Căpăţînă Octavian (7226—8, 1, 3—6, 41—34, 6, 7, 50, 2, 61, 6, 76, 7, 8, 82, 3, 5—93, 303, 8, 13—5, 7, 8, 8, 20, 2, 3, 5—8, 30, 2—5, 9, 40, 3, 5, 6, 8, 9, 62, 4, 7, 72, 82—5, 91, 5, 7—405, 9—13, 16, 8, 21, 2), Retegan Aurel (7318, 20, 3, 9, 72, 3, 7, 9, 82—4, 91, 8, 411, 3), *Liceul 2* cl . VIII Căluşer Elena (4232, 8, 9, 41, 4—7), Puica Victor (2432, 8, 9, 41, 4—7), cl. X. Tănăsescu Iuliu (7283—8, 93, 300, 23, 5, 6, 8), S. Th. Furnale an I. Vlad Daniel (7283, 312—4, 7, 8, 20—3, 6, 79).

HUŞI. *Liceul 1* cl. X. Ioniţu Constantin (7282, 5, 7, 98, 300, 25, 6, 8, 98, 9, 404, 6).

IAŞI. *S. g. 7* cl. VI. Davideanu Florian (2934, 5, 9, 400, 10—3) cl. VII Barbu Gelu (210, 2, 5, 7, 24, 5, 8, 31, 2, 4), Bercu Constantin (2394—6, 8, 404, 11, 8, 32), cl. VIII Hörer Silvia (2406, 9, 11—3, 7—9, 24, 3, 8), Obreja Doru (2410—3, 5, 7, 8, 28, 95—8, 400, 1, 4), Petrechioaie Doina (2410—3, 5—9, 21, 30—2), Radu Driscu (2394—406, 10—2), *Ş. g.212* cl. VII Ruxăndrescu Silvian (2411—3, 29, 31, 2, 4, 9, 41, 4), cl. VIII Dimitriu Constantin (2411—3, 7—9, 21, 3, 6, 8), *Ş. g. 13* cl. VII Chitan Doina (2429, 32, 4, 5, 8—41, 5, 7),*Ş. g. 14* cl. VIII Joldesar Mitică (2411, 3, 9, 21, 30—2, 4, 8, 9, 41—3, 5, 7, 9, 26, 8, 30). *Liceul 1* cl. VII. Rusu Emil (2411—4, 6—8, 28), cl. VIII Axel Herbert (2430—2, 4, 8, 42, 44, 50, 3, 5, 62), Budai Liviu (2411—4, 9, 21, 4, 8). Mîrzanca Magda (2411—2, 921, 8, 9, 32, 8, 9), *Liceul nr. 2* cl. VII, Arabu Monica (2410—5, 6, 7, 8), Martin Simona (2411—8, 30, 2, 3, 8), Tănase Iulian (2410—8, 30, 24, 8), *Liceul 3* cl. VI Arsenescu Cătălina (2410—3, 32, 8, 9, 42, 50, 3—5), Balahur Paul (2394, 6, 8—40 1, 10—4),cl. VII Mirţu Mihai (2410—5, 7—9 21, 3—5, 8—31, 4, 9, 40), cl. IX Angelescu Romulus (2428, 44—9, 7284, 8, 7, 325, 6 8), cl.X Baban Ştefan (7232, 6, 82, 3, 7, 73, 8, 22—5), Diaconu Don (7217, 23, 89, 4, 7, 317 8, 20, 3, 5, 6, 8), Dima Valentin (7216—8, 22—4, 83, 6—8, 300, 17, 8, 20, 3, 5, 6, 8), Gherghescu Mihai (7222—4, 36, 72, 6, 82—8, 90, 1, 2, 6, 300, 1), Irimia Constantin (7216, 7, 22, 4, 83, 6—8, 300, 7, 8, 20, 3, 5, 6, 8), Pascal Stelian (7222—4, 6, 83, 300, 17, 8, 20, 2, 6, 8, 7), Surdu Mihai (7216, 7, 8, 22, 5, 36, 83, 6—8, 300, 7, 8, 20, 2, 8) Teodorescu Octavian (7287, 325, 6, 8, 419, 21, 3—5, 7, 8, 45—7, 9, 60, 2, 3), Vişan Ioan (7216, 22, 4, 83, 6, 7, 317, 8, 20, 3, 5, 6, 8) *Liceul 3.* Cl. X *Popa Eugen* (7286, 303—05, 08, 20, 2—5, 8, 30—2, 5—7, 9, 42, 5, 7, 9, 51, 62, 4, 75, 7, 8, 9, 91, 2, 4—7, 400, 2, 8, 5, 9, 13, 6, N, P), *Liceul 4,* cl. VIII Rusu Doina (2410—4, 6—9, 21, 2, 8—32, 4, 8, 42, 4—6), cl. IX Săveanu Sanda (2424, 6, 8, 5, 9, 62, 3, 7284, 5, 7, 325, 8). *Liceul 7,* cl. VIII Birleanu Dorel (2394—406), *Liceul 8* cl. VIII Hogea Valentin (2413, 7—9, 23, 42, 53, 62), cl. XI. Amoriţei Gheorghiţă (7218, 22, 6, 34, 83, 8, 92, 3, 5, 7, 9, 300—4, 8, 12, 4, 7, 8, 20, 5, 6, 33, 9, 45), Boroboi Adrian (7218, 9, 25, 7, 8, 34, 5, 41—52, 63, 76, 83, 4, 5, 7, 8), *Liceul 9,* cl. VI Vlad Marius (2429, 31, 2, 9, 9, 50, 3, 5), cl. VII Barcon Nina (2398, 9, 402, 11—3, 8, 23), Buchholtzer Loreley (2429—34, 4, 7—42, 5—7).

IBĂNEŞTI (SUCEAVA). *Ş. g.* cl. VIII Amoriţei Constantin (2402, 30, 2, 4, 8, 9, 41, 2, 4), Atănăsoaie Ioan (2430—2, 4, 8, 39, 41, 3, 5).

INEU (CRIŞANA). *Ş. g.* cl. VIII Pîrv Floare (2394, 5, 7, 400, 1, 4, 10—3, 21, 3).

LELEŞTI (OLTENIA), *Ş. g.* cl. VII Măruţă Dumitru (2431, 2, 8, 9, 41, 2, 50—5).

LIPOVA. *Ş. g.* cl. VIII Ghering Elena (2402, 9, 19, 21, 3, 32, 8, 9, 41, 2), Ruxăndrean Doina (2398, 402, 4, 9, 19, 21, 30, 4, 9), Senchea Ligia (2409, 13, 21, 3, 4, 32, 8, 9), Wild Günther (2416—9, 21, 6, 8, 32).

LUCĂCEŞTI (BACĂU) *Ş. g.* cl. VII Andrei Ludmila (2410—4, 6—9, 21, 2, 4—6).

LUGOJ. *Liceul 1* cl. X Hakes Dumitru (7216—20, 2, 3, 6, 84—8, 99, 300), Peia Ioan (7222, 3, 83, 9, 90—2, 5, 8, 300, 25, 6, 30), Preoteasa Viorel (7220—3, 31, 43, 72, 84, 5, 9, 91, 2, 5, 8), *Ş. g.* cl. VI Duncescu Sorin (2429—32, 4, 5, 8, 9, 41, 2), *Ş. g.* cl. VIII Epure Octavia (2411—4, 9, 28, 32, 41, 2, 6), *Ş. g.* cl. VIII Murărescu Elena (2411, 9, 21, 3, 7, 9, 38, 9, 41).

LUNCA BANULUI (IAŞI). *Ş. g.* cl. VII Georgescu Costică (2410, 1, 3—5, 7—9, 23, 8).

MEDIAŞ. *Liceul 1* cl. IX Doljanu Dan, Bostan Vladimir (44—6, 8, 7284—8, 325, 6, 8), Dinescu Florin (2428, 45—7, 9, 7284—8, 325, 6, 8), Doljana Dan (2425—8, 44—9, 7284—8, 325, 6, 8), Lupu Dorel (2428, 45—7, 9, 72, 7285—9, 90, 325, 6, 8), Dumitru Gh. (7216, 7, 9, 22—4, 9, 34, 5, 42, 5, 7, 50, 1), *Liceul 2.* cl. X. 7272, 6, 86, 7, 92, 301, 12, 7, 8, 20, 5—8, 35, 7, 8), cl. XI Georgescu Clement (7266, 7, 9, 82, 3, 90, 2, 9, 303, 4, 11, 3—5, 20, 2, 39, 43, 5), Panicanu Viorel (7221, 50, 76, 82, 91, 92, 99, 302, 3, 4, 6, 23, 6, 8).

MIERCUREA, *Liceu* cl. IX. Galaizi Peter (7267, 72, 5, 6, 84—8, 95, 9, 300), cl. XI Staicovici Gheorghe (7216—9, 22—7, 36, 82, 3, 317, 8, 20, 3, 9, 40).

MIZIL. (PLOIEŞTI) *Ş. g.* 1 cl. VIII Drescu Sonia (2417, 30, 1, 4, 6—43, 5), Spînu Emulia (2410—3, 7, 8, 21—4, 31, 2), Voicu Boris (2410, 1, 3—7, 21, 32), *Liceu* cl. VIII Bozianu Mirela (2417, 31, 2, 6—9, 41, 2, 6), Căpăţînă Elena (2410—4, 21, 3, 4, 9, 31, 2, 6, 8, 9), Cioacă Dorina (2410—3, 7, 23, 31, 6, 8, 9, 42, 4, 6), Dumitrescu Ileana (2431, 2, 6—8, 41—3, 5, 6), Dumitru Valeria (2411—3, 31, 21, 36—9, 41—3, 5, 6), Dur Constanţa (2413, 4, 7, 9, 21, 34, 6, 7, 8, 9, 41, 2, 5, 6), Georgescu Maralambie (2410—3, 7, 31, 4, 6, 8, 41, 2, 6), Hurduilă Elena (2431, 2, 6—9, 4—43, 5—7), Iliescu Cristian (2395, 8, 9, 410—4, 7, 9, 23, 31, 6—9, 42, 6, 91), Iliescu Marioara (2413, 4, 7, 9, 21, 3, 31, 2, 6—9, 41—3, 5, 6), Marinescu Aneta (2417, 31, 2, 4, 7, 8, 40—2, 5, 6), Mateescu Maria (2411—3, 7, 8, 21, 3, 4, 9, 31, 2, 44, 9), Miriţă Paula (2412—4, 7, 9, 21, 3, 30, 2, 4, 6—9, 41, 6), Mosor Maria (2417, 31, 6, 41—3, 5, 6), Petre Florica (2417, 31, 6, 8, 41, 2, 5, 6), Pistoru Elena (2417, 30—2, 4, 6—9, 41—3, 6), Stancia Eliza (2411—3, 7, 21, 3, 4, 8, 9, 31, 8, 9, 41, 2, 4, 6), Trandafir Marilena (2410—3, 7, 31, 2, 6—9, 41—3, 5, 6), Treguă Lucia (2417, 31, 2, 6—9, 41, 2, 5, 6), Vasilescu Steliana (2417, 31, 2, 6—9, 41—3, 4—6), Vlădăreanu Doina (2410—4, 6—9, 21, 3, 7—9, 30, 1, 4, 9—41, 4—6).

MOGOŞANI. *Ş. g.* cl. VIII Postelnicu Ion (2394—409), Badea Gheorghe (2396—406, 9—11, 3—4, 7—9, 21, 3—6, 8—32, 4, 8, 9, 41, 4, 6, 84, 8, 325, 6).

MÎNECIU-UNGURENI. *Liceu* cl. VII. Profirescu Alexandru (2411—3, 8, 9, 24, 31, 2, 4, 8, 9, 41, 2), cl. VIII Badea Ion (2412, 3, 9, 21, 3, 4, 7, 8, 9, 41, 2, 9), cl. IX Ghiciureanu Gheoghe (2424, 5, 8, 45, 6, 7, 7222, 86, 7), cl. XI. Savu Ştefan (7283, 6, 7, 92, 3, 9, 300, 1, 3, 9, 26, 8, 9, 72, 5).

MORENI. *Ş. g. 2* cl. VII Saghin Claudia (2410—3, 6, 8, 9, 31, 4, 50), Liceu cl. XI Selaru Corneliu (7286, 7, 300, 1, 14, 7, 8, 20, 3, 5, 6, 33, 42).

NADLAC. *Ş. g.* cl. VII Bătăran Ştefan (2410—4, 7—9, 21—3, 5, 8—32, 7—48).

NADRAG, *Liceul 1.* David Nicolae (7217, 22, 4—6, 39, 47, 58, 72, 83, 6, 7, 95, 301, 3, 28).

NĂVODARI. (DOBROGEA), *Liceu* cl. X. Kiss Eugen (7314, 7, 8, 22, 3, 33, 5, 66, 72, 3, 5, 7, 402).

NEGREŞTI. *Ş. g.* cl. VII Ailincăi Dan (2410—4, 6—8), Labina Rodica (2429—32, 4, 8, 9, 41, 2), Sarca Viorica (2411, 29—32, 4, 8, 9, 41, 2), cl. IX. Ciocan Gheorghe (2421, 3, 6, 8, 44, 5—7, 9, 7284, 6, 7, 325, 6, 8), Sombe Ana (2411, 30—2, 4, 7, 8, 41, 2).

NEHOIAŞI *Ş. g.* cl. VI Găleată Gheorghe (2413, 9, 23, 7, 8, 32, 8, 42, 5, 6).

NICOREŞTI (GALAŢI). *Ş. g.* cl. V Corban Gabriela (2394, 5, 400, 1, 4, 11, 2, 3, 32, 5), cl. VI Parolache Elena (2394, 5, 400, 1, 4, 11, 3, 32), cl. VII Oprea Dorin (2394, 411—3, 7, 8, 25, 8).

NOVACI (OLTENIA *Ş. g.* cl. V. Andreoiu Elena (2394—8, 400, 10—4), Cosar Filimon (2395—8, 403, 11—3), Jega Florian (2394—8, 411—3), Mustaţă Elena 2394—8, 403, 10—3), cl. VIII Ciorogam Nicolae (2394—404). Porumbel Ion (2394—406), Toader Ion (2395—401, 3—5), cl. IX Păpurică Eugenia (2438—42, 5—7, 62, 326, 8, 30, 98).

OBREJA. *Ş. g.* cl. VI Cărăbuş Floare (2410—8,20).

OCNA MUREŞ. *Liceu* cl. IX Ursu Tiberiu (2425, 7, 8, 44, 5, 6, 9, 63, 7, 84, 317, 25).

ORADEA. *Liceul 1* cl. IX. Bîrău Marietta (2424, 6—8, 46, 72, 3, 5, 84—8, 25, 6), cl. X Braum Gheorghe (7216, 7, 9, 20, 2—4, 6, 7, 83, 4, 6—8, 93, 300, 26, 8), Creţu Vla-

dimir (2425, 6, 8, 45, 6, 9, 62, 7284—8, 326, 8), Gherman Mihai (7216, 7, 22, 3, 4, 6, 83, 4, 8, 300, 18, 25, 6, 8), Lipcei Smaranda (2424—8, 46, 7, 7237, 84—8), Olteanu Gheorghe (2424—8, 47, 7237, 84—8), Onaca Maliana (7235, 7, 409, 84—8, 424—8), Sourigan Magdalena (2424, 8, 44—6, 7284—8, 325, 6, 8), *Liceul 2* cl. X. Urdă Ioan (7276, 82—5, 7—9, 91, 2, 4, 6—8, 300, 3, 5, 7, 8, 20—3, 5, 6, 8, 30, 5, 9, 73, 5, 6—9, 85, 7, 9, 402), cl. XI Mănuca Dumitru (7218, 75, 83, 5, 300, 3, 4, 18, 20, 3, 5, 6, 8, 35, 7), *Liceul 4* cl. X Brădău Florian (7210, 39, 45, 7, 76, 82, 90, 301, 15, 8, 20, 2—6, 8, 33, 5, 7), Negruțiu Radu (7283, 6, 7, 93, 300, 1, 18, 20, 3, 5, 26, 8, 33, 5, 7), Pop Raul (7272, 6, 83, 300, 13, 7, 8, 22, 3, 5, 6, 8, 75, 9), cl. XI But Tiberiu (7216—9, 21—4, 6, 7, 36, 45, 7, 84—9), Hanza Gheorghe (7216, 7, 9—23, 66, 84, 5, 95, 301), Meer Petre (7216—9, 22—8, 34, 6, 9, 42, 3, 5, 7), *Liceul 5* Herman Gheorghe (7216—8, 20, 2—5, 35, 47, 82, 4—7, 91, 2, 5, 301, 3, 17, 8, 20, 6, 42).

ORAȘ GH. GHEORGHIU DEJ. *Liceul 1* cl. IX Kopecniri Andrei (2424—8, 45—7, 84—6, 8, 326, 8), Peponicolau Lefterin (2424—8, 45—7, 67, 84—8, 91), cl. X. Novăcescu Constantin (7284, 5, 8, 90, 1, 3—6, 325, 6, 8).

ORĂȘTIE (HUNEDOARA). *Liceu* cl. VII Mureșan Carolina (2385, 5, 410—3, 7, 8).

ORLEȘTI. Florescu Constantin (2395, 6, 8—405, 10—3, 18, 25, 8).

ORȘOVA. *Liceu* cl. VI Sperdea Mircea (2415, 30—2, 9, 42, 50, 1), cl. VII Moruzi Nicolae (2413, 4, 20, 31, 2, 4, 8, 41, 2), cl. VIII Bănică Gabriela (2411, 3, 8, 9, 21, 7, 31, 41), Miloș Tatiana (2411—3, 9, 21, 32, 9, 42, 62), Sperdan Rodica (2411—3, 9, 21, 32, 9, 42), cl. IX Magerin Oana (2424, 5, 7, 8, 84—8).

OȚELUL ROȘU. *Ș. g.* cl. VIII Neicu Victorian (2919, 32, 4, 8, 9, 41, 2, 50), cl. IX Moderan Gheorghe (2426, 8, 45—7, 61, 2, 7284, 5, 8, 325, 8, 426, 8).

PANCIU. *Liceu.* cl. VIII Iordache Dorina (2411—4, 29—31, 4), cl. IX Purdilă Adrian (7216, 9, 20, 3, 4, 33, 4, 76, 84—8, 91, 2, 5, 8, 301, 17, 8, 25—8, 30, 409, 24—8), Minea Gheorghe (7276, 91, 7, 300, 1, 17, 22, 3, 5, 75, 7, 9, 82, 402).

PĂTIRLAGELE (PLOIEȘTI). *Liceu* cl. IX Jorcău Viorel (2425, 7, 44—9, 7284, 5, 7, 326, 8), Sibiescu Florin (24242, 7, 8, 45—7, 62, 7284, 5, 7, 326, 8).

PĂUNEȘTI. *Ș. g.* cl. VI. Anghel I. Zarafina (2417, 8, 28, 9, 32, 3, 9, 41, 2), Bîrlă Magdalena (2418, 28, 9, 32, 3, 7—9), Chiria Maria (2410—3, 6—9, 32, 8, 9, 41). Novac Virginia (2410, 2, 18, 32, 6, 9, 41, 2, 5), Roșu N. Elena (2405, 16, 32, 3, 7, 8, 9, 41, 2), Vîrlan Lenuța (2410, 6, 28, 9, 32, 3, 8, 9, 42), cl. VII Bostan Iordache (2395, 403, 10, 29, 31, 2, 8, 9, 41), Bratu Victoria (2428, 9, 32, 6—8, 41), Conduraru Maria (2416, 24, 8, 9, 32, 8, 9, 41, 2), Gheorghiu Mihaela (2411—3, 7, 8, 20, 1, 8), Murgoci Lenuța (2418, 24, 8, 9, 32, 8, 417, 41, 2, 54), Nica Lucica (2416, 24, 31, 2, 8, 9, 41, 2, 5, 6), Novac Maria (2403, 5, 10, 1, 3, 4, 7, 8—24, 8), Sandu Mariana (2381—5, 411—4, 7), cl. VIII Berbece Maria (2410—4, 7, 9, 21, 3, 4).

PERIEȚI (ARGEȘ) *Ș. g. 1* cl. VI. Luță F. Ion (2410—3, 28, 32, 4, 8, 41), cl. VII Popa Ion (2428, 9, 31—4, 7—9, 41), Tudorică Constantin (2428, 9, 31, 2, 4, 8, 9, 41, 2), Mihai Constanța (2432, 3, 6—9, 41—3).

PETRILA. *Liceu* cl. X Coțan Nicolae (7222—5, 87, 9, 91, 2, 5, 9—301, 7, 8, 23, 32, 5).

PETROȘANI. *Ș. g.* cl. V. Eșeanu Ileana (2397, 9, 401, 4, 10—3, 28), cl. VIII Paraschiv Ion (2425, 8, 44—7, 9, 67, 84—8, 325, 6, 8), Popescu Mihaela (2429—34, 6—9, 41—3, 7), cl. XI Joni Nicolae (7120—2, 4, 85, 8, 203, 12, 6, 7, 22, 4).

PIATRA NEAMȚ. *Ș. g.* cl. VI Lăzărescu Dan (2396, 8, 9, 405, 11, 3, 7, 24), cl. VIII Pop Livia (2412—4, 9, 21, 3, 6, 8), *Liceu* cl. IX Solomon Adela (2425, 7, 8, 44, 5, 60, 2, 7284, 6, 7, 326, 8), cl. XI Lazarovici Antonie (7216, 7, 22—7, 36, 47, 82, 3, 6—8, 301).

PITEȘTI. *Ș. g.* cl. VI Iacomi Oleg (2410—4, 28, 31, 9, 41, 53), *Ș. g. 4* cl. VIII Ruse Lilian (2403, 9—21, 3—32, 4, 8, 9, 41, 2), *Ș. g.* cl. VII Nica Nușa (2450, 2—5, 60, 1, 2), *Ș. g.* cl. VII Costache Mariana (2413, 8, 9—21, 4, 39, 41), Matei Vornia (2410—3, 8—20, 1 3, 4), Tomescu Casiana (2410, 8, 20, 4, 5, 32, 9, 41, 5), *Liceul 1* cl. IX Bărbulescu Adrian (2424, 5, 7, 8, 45—7, 9, 7284, 6—8, 325, 6, 8), Cotta Emil (2424, 44—7, 9, 89, 90, 1, 317, 20 5, 6, 8, 34), Păunescu M. (2425—8, 45—7, 60, 2, 84, 5, 7, 8, 325, 8), Ștefănescu Emil (2424—8, 44—7, 960—2, 7235, 6, 84—8), Verescu Cornel (7276, 21, 300, 84—8, 326, 8, 326, 8424—8, 45, 6), Vișinescu Emilian (2425—8, 44—7, 325, 6, 8, 7284—8), cl. X Anghel Ionescu (7284—7, 300, 20, 5, 6, 8, 33, 7), *Dumitrache Ion* (7120, 3—5, 33, 6, 44, 63, 9, 173, 5, 8, 9, 81, 3 5, 8, 90, 2, 4—6, 202, 10, 6, 7, 20, 3—6, 2—5, 7—40, 8), Lazăr Mircea (7222—4, 86, 7, 300 3, 7, 8, 25, 6, 8), *Pavelescu Ion* (7179, 85, 8, 216, 7, 20—5, 34, 5, 72, 6, 83—8, 91—3, 7, 300, 1, 14, 7, 8, 20—3, 5—8, 33, 5), Rubinstein Magda (7276, 82, 4—9, 91, 2, 6, 300, 17, 8, 21, 2, 5, 6, 33, 9), cl. XI Ionescu Alexandru (7317, 8, 20, 3, 59, 72—4, 6—8, 80, 3—5), Sterian Marian (7216—8, 20, 2, 4, 5, 7, 68, 83, 6, 7), Tănăsescu Nicolae (7216—8, 22—5, 47, 68, 83, 6, 7), *Liceul 2*, cl. IX Brătescu Adriana (2495, 7, 400, 1, 4, 13, 4, 7, 9, 31, 41), Dumitriu Dana (2428, 45—7), 9, 60—3, 7321, 6, 8), Voiculescu Cornelia (2428, 44—7, 60, 2, 3, 84, 6, 7, 8, 317, 21, 5, 6, 8), cl. X Boia Doina (7235, 84—8, 91, 3, 5, 6, 9, 300, 17,

8, 23, 5, 6, 8), Victoria Zinenicalu (7235, 84, 5—8, 91, 3, 6, 9, 300, 17, 8, 23, 5, 6, 8), cl. XI Broniște Dumitru (7263, 76, 8, 81—3, 8, 93, 9, 303, 4, 20, 5, 6, 8, 45), Preda Vasile (7218, 21, 71, 4, 5, 9, 46, 7, 50, 1, 8, 6, 63, 5, 7, 9, 72, 6, 8, 81—91, 3—6, 9—301, 3, 4, 8, 13, 14, 7, 8, 20, 5, 6, 8), *Liceul 2* cl. XI *Nistrescu Constantin* (7266—9, 78, 82—93, 5, 6, 8—300, 2—5, 12—4, 7—23, 5, 6, 8).

PÎNCOTA. *Liceu* cl. VIII Samoș Constantin (2410—3, 7—9, 21, 3, 8, 30—2, 4), cl. X. Chebeleu Petri (7216, 7, 9, 20—7, 44, 72, 6, 83, 4—8, 91, 2, 9).

PLOSCA (București) cl. VIII Ondrone Ilie (2429—32, 4, 8, 41, 2, 4, 8).

PLOIEȘTI. *Ș. g. 10.* cl. VII Vișan George (2421, 3—32, 4, 5, 41—3, 55—7), *Ș. g. 12*, cl. VII Tiprigan Carmen (2424, 8, 30, 1, 3, 9, 41, 4), *Ș. g. 21* cl. VII Stoica Valentin (2410—3, 5—9, 23—8), Tătuc Ștefan (2410—2, 7, 8, 21, 8, 31, 4), Tudose Mihai (2430, 1, 4, 9, 44, 50, 2—5), Pietraru Gheorghe (2410, 2, 5, 21, 3, 4, 30, 8, 41), Sgraon Victor (2410, 1, 2, 3, 8, 41, 3, 81, 91), Turțudău Florin (2429—31, 4, 8, 41, 2, 4, 8), *Ș. g. 23.* cl. VIII Anton Costel (2429—32, 4, 7, 40, 5—7), Antonescu Luiza (2430—2, 8, 9, 41, 2, 5, 6), Avramescu Mircea (2429—34, 6—45), Bărbulescu Felicia (2412, 8, 28, 31, 2, 8, 9, 41, 9, 5, 6), Bunbeum Constantin (2410, 1, 3, 4, 7—9, 21, 5, 8), Calotă Dumitru (2410, 1, 3, 4, 7—9, 21, 4, 5, 30, 45, 6), Dobre Doru (2429, 30, 1, 4, 40, 4, 5—7, 7326), Lică Niculina (2430—2, 8, 9, 41, 2, 5, 6), Nicolae Daniela (2417, 9, 20, 1, 32, 8, 9, 41, 2), Niculescu Georgiana (2429, 31, 3, 8, 42, 2, 5, 6), Răduță Viorel (2412, 6, 29—47), Șerpoianu Iulia (2411—4, 7, 8, 29, 31, 2), *Liceul 1* cl. V Rednic Cristina (2410—6, 29, 30), cl. VII Grigorescu Mihaela (2395—400, 4, 10—3, 5), Ilie Beatrice (2417, 8, 26, 8, 39—41, 4—6), Nicolescu Ruxandra (2429, 30, 2, 8, 9, 41, 2, 53—5), Solomon Ernest (2411—3, 7, 8, 26, 8, 31, 4, 8, 9, 41), cl. VIII Cucurezeanu Mihaela (2410, 3, 4, 7—9, 21, 3, 6, 8), Grigorescu Nicolae (2410—3, 9, 25, 8, 32, 8, 9, 41—3), Ion D. Mihail (2411—4, 6—9, 20, 1, 3—8), Mihalache Cristina (2417, 8, 3, 6, 5, 60—2), Necula Luiza (2410, 1, 3, 7—9, 23, 7, 34, 41, 9), Olteanu Gh. (2417—9, 21, 3, 4, 7, 6, 8), Preda Oltea (2412, 3, 7—9, 23, 41, 9, 7326), Rotaru Mihaela (2411, 3, 7, 8—20, 4, 5, 8), cl. VI Marinoaia George (2429, 31, 1, 9, 53—6), Mazăre Valentin (2430—2, 4, 8, 41, 2, 8), cl. VII (Chirița Mioara (2432, 8, 9, 41, 2, 6, 54, 4), cl. X. Boladă Nicolae (2424, 6—8, 44—9, 7286, 7, 7326, 8). Ilie Gheorghe (2425, 7, 8, 44—7, 49; 7284, 5, 8, 325, 6, 8), Ioniță Gheorghe (2424—8, 444, 6, 7, 9, 7284, 5, 317, 8, 28), Tăbleț Domnița (2425, 7, 8, 444, 6, 7, 60, 2, 3; 7284, 6, 7), cl. X Casăndroiu Dănuț (7216, 7, 9, 20, 3, 4, 5, 82—8, 91, 2, 5, 300, 17, 18, 20, 2, 3, 5), Dinescu Iulian (7216—25, 34, 5, 40, 3, 6, 82—8, 91, 2, 5, 6, 300, 1, 8, 17, 18, 20, 2, 3, 5, 35), Neguț Gheorghe (7216—26, 34—6, 39, 40, 42—4, 6, 7, 76, 8, 82—9, 91—3, 5, 6, 8, 301, 8). Olaru Ion (7216, 7, 20, 1, 2, 3, 4, 5, 36, 84, 5, 6, 90, 1, 3), Olteanu Raluca (7284—7, 91, 300, 23, 5, 6, 8, 35, 402, 4, 5, 6), Priscoci Constantin (2427, 8, 7284—9, 318, 2, 5, 6, 8), Popescu Mariana (7283—9, 91, 6, 302, 6, 8, 9, 13, 7, 25, 6, 35, 8, 9, 42), State Adrian (7217, 9, 220—5, 35, 6, 9, 40, 2—4, 6, 7, 76, 82—89, 91, 2, 5—9, 300, 1, 2, 8), cl. XI Andronescu Dan (7216, 7, 20, 2, 3, 4, 43, 83—9, 317, 20, 5, 6), Apostolescu Dan (7216, 7, 9, 20, 2, 4, 6, 43, 83—7), *Brătulescu Nicolae* (7272, 5, 6, 9, 82—8, 91, 2, 5, 8, 9, 300, 1, 2, 9, 311, 2, 4, 7, 8, 20, 3, 5, 6, 8, 33, 5, 9, 42, 3, 66, 7, 72, 3, 5, 7, 8, 9, 83, 4, 5, 7, 98, 402, 22), Dumitru Marcel (7216, 7, 9, 22, 4, 43, 7, 83, 4, 5, 6, 7, 8, 320, 1), Constantinescu Marian (7127, 88, 211, 6, 9, 22, 4, 84, 5, 7, 9, 320, 5), Dinu Marian (7216—29, 31—6, 37—47, 9, 51, 2, 4, 7, 8), Ghioldiș Gheorghe (7185, 216, 7, 23, 4, 48, 82—9, 320, 1, 5, 30, 1), Ilie Aurel (7216, 20, 2, 3, 4, 43, 75, 83—9, 317, 20, 5, 6, 9), Ionescu Constantin 7216, 7, 23—4, 43, 8, 55, 82—9, 20, 1, 5, 6, 31), Ionescu Gabriela (7185, 216, 7, 23, 4, 48, 82—9, 330, 1), Ionescu Radu (7216, 7, 23, 4, 43, 8, 55, 82—9), Mihai Dan (7216, 7, 24, 7282—9 320, 1, 330. 1), Minea Florea (7202—28). Minescu Florea (7185, 216, 8, 9, 22, 3, 7, 48, 82, 4, 5, 7, 8, 9, 317, 20, 1, 5, 30, 1), Nicolaescu Cristina (7185, 216, 7, 23, 4, 48, 82—9, 330, 1) Oprea Connel (7185, 216, 7, 23, 4, 48, 82—9, 31), Pană Constantin (7185, 217, 8, 23, 4, 48, 82—9, 20, 1, 5, 30), Predescu Elena (7217, 24, 43, 8, 55, 82, 4—9, 320, 1, 6), Rădulescu Natalia (7217, 22, 75, 82—9, 300, 20, 5), Sandu Elena (7127, 216, 75, 83; 84—9, 320, 5), (Tănase Luciu (7216, 7, 24, 82—9, 320, 1, 30, 1), Tomescu Pavelina (7185, 6, 216, 7, 83—7, 9, 320, 31), *Vasiliu Constantin Ovidiu* (7169, 76, 9, 83, 93, 5, 7, 9, 203, 711, 3, 4, 89, 20—9, 6, 7, 9, 32, 3, 7, 9, 10, 51, 64—8, 71—81, 3, 93, 5—304, 311—5, 17, 8, 20—3, 6, 8, 30, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 40, 2, 3, 5, 8, 32), Wijolă Sorin (7185, 8, 94, 216, 7, 204, 43, 7, 84—9, 320, 5, 6), Vișan Nicolae (7217, 223, 4, 43, 8, 55, 82—9, 320, 1, 5, 6), *Liceul 4.* cl. X. Albulescu Mircea (7284—8, 91, 2, 301, 20, 3, 5, 8, 35), *Neguriță Paul* (7216—20, 2—5, 7, 8, 3, 5, 9, 43, 5, 7, 65—7, 9, 82—302, 17, 8, 20, 3, 5, 6, 8, 35, 42), Ștefan R. Roma (7216, 7, 22—4, 6, 39—40, 7, 83—8), Rădulescu Nicolae (7216, 8, 20, 2, 3, 5, 68, 87, 314, 7, 20, 6), *Liceul 6*, cl. X Nicolae Otilia (7283—9, 92, 3, 300, 23, 5).

POIANA MARE. *Liceu* cl. IX Olaru Mircea (2411, 26,, 30—5, 8—40 2—5, 7285, cl. X Trăistaru Ion (7272, 6, 83—8, 92, 300, 14, 7, 8, 21, 5, 6, 8).

POIANA SIBIULUI. cl. VIII Bon Inocenţiu (2419, 24, 6, 8, 30—46, 50, 2—6, 62). Marinescu Niculina (2392, 4, 5, 8, 400, 11, 7—9, 23, 30—4, 9, 41, 4).

POTCOAVA. cl. IX Bălănescu Mănică (2394, 5, 7—404, 9—15, 31, 2, 40, 1, 5—7, 7285—7, 325, 6, 8), *Rădoi Marin* (2387, 93—406, 9—17, 23—42, 5—9, 7236, 84—8, 325, 6, 8).

PREDEAL. *Liceu* cl. VIII Popa Georgeta (2430, 1, 8, 9, 41, 2, 4—6, 162), cl. IX Ciocîrlan Vasile (2425, 6, 8, 45—7, 9, 7284, 5, 7, 8, 325, 6, 8).

PRISĂCANI. *Ş. g.* cl. VIII Buruiană Florica (E : 2381—5, 7—90, 4—6), *Liceul 2* cl. VII Nichita Ştefan (2411—3, 7, 8, 28, 34, 9), Marinoaia Veronica (2438, 9, 41, 2, 50, 3—5), Radnif Sorin (2411—3, 7, 28, 39, 41), cl. VIII Balea Gabriel (2425, 30, 1, 4, 9, 45—7, 53), Hotăreanu Ion (2395, 1, 400, 1, 4, 11—3, 7, 25), Lipănescu Costin (2410—4, 19, 21, 5, 8, 31, 4, 9, 44—6), Mănău Ortansa (2419, 31, 4, 9—41, 5—7), Nicolescu Ileana (2419, 25, 8, 9, 31, 2, 40—2, 4—6, 50, 2, 4, 5, 60—3), Popescu Olga (2414, 9, 34, 9, 44, 6, 50, 4, 62), Popu Mariana (2419, 21, 3, 8, 31, 9, 41, 5—7, 63), Sinescu Ruxandra (2417—9, 21, 37—9, 41—2, 6, 7), Tănăsescu Doina (2414, 9, 21, 3, 8, 32, 7—42, 4—7, 53—5, 60—3), cl. IX Brenner Mircea (2424—8, 7284—8, 317, 25, 6, 8) Căruţaşu Raimond (2424—6, 44—6, 7284, 5, 325, 6, 8), *Circioagă Teodora* (2424—7, 44—7, 62—3, 7267, 72, 6, 84—9, 91, 5, 300, 17, 8, 25), Dinu Dumitru (2424—8, 45—7, 7284—8, 326, 8), Troacă Ion (2425, 7, 8, 44—7, 60—3, 7284—8, 326, 401), cl. X *Orăşanu Laurenţiu* (7227, 9, 32, 4—6, 8—40, 2, 3, 6, 7, 9—52, 65, 71, 3, 6, 82—9, 91—3, 5, 6, 8—303, 8, 13, 4, 7, 8, 20—3), cl. XI *Stan Emil* (7216—29, 32—69, 71—93, 5—304, 8—28, 31—3, 42—7, 51—406, 9—14, 7, 8, 21, 2), *Liceul 3* cl. VII Ghiţă Magda (2395, 412—5, 9, 32, 4, 41), Iancu Marieta (2394—401, 4), Tudor Sanda (2395, 7, 400, 11, 3, 20, 82, 3, 8, 41, 4), cl. VIII Grigore Rodica (2410—4, 7, 23, 4).

PRUNDUL BÎRGĂULUI. *Liceu* cl. VI. Tonea Elena (2411—3, 32, 8, 9, 41, 3, 4), cl. X Vrîncean Andrei (7267, 9, 83, 9, 317, 8, 75—7, 82, 5).

PUCIOASA. *Ş. g. 4* cl. VI Căprăruş Simona (2410—9, 21, 4, 8), *Liceu* cl. IX Popa Petre (2425, 8, 44—7, 7234, 6, 8), Popescu Cornel (2426, 44—7, 7284—8, 325, 6, 8), cl. X Cimpoca Gheorghe (7292, 6, 320, 1—3, 5—8, 73, 7, 91, 402), *Mărculescu Corneliu* (7266, 72, 5, 6, 83, 6, 7, 9, 40, 5, 9, 302, 9, 11—23 ; 55—60, 76—81, 91, 93), Tudor Constantin (7287—7, 325, 6, 8, 420, 45, 6, 7, 9), cl. XI *Vasilescu Nicolae* (7263, 6, 72, 8, 9, 82, 3, 302, 6, 8, 11, 3, 7, 8, 20—3, 30, 2, 3, 5, 8, 42, 3, 7, 9, 56, 9, 62, 73, 6, 7, 8, 6, 91, 5, 8, 405, 13, 8), Zecheru Gheorghe (7217, 9, 20, 2, 5, 6, 35, 83, 7, 91, 317, 8, 20, 3, 6, 7, 39).

RAFNIC (BANAT). *Ş. g.* 34 cl. VII Gherga Marian (2410, 5, 9, 20, 1, 3, 33, 38, 43, 5), cl. VIII Pataşan Todor (2423, 6, 7, 8, 44, 6, 7, 8) Covaci Gh. (2423, 7, 8, 44, 5, 6, 7 ; 7326).

RĂDĂUŢI. *Liceu* cl. VII Nimigean Viorica (2395, 402, 4, 10—14), cl. IX Gheorghiţă Elena (2409, 21, 4, 5, 8, 44—6, 48 ; 7286, 7, 325, 68), Milici Nicolae (2424—6, 8, 44—7, 60—2), Procopov Narcis (2409, 24, 25, 28, 44—48, 7286, 7, 326, 8).

REGHIN. *Ş. g. 1* cl. VII Ghiciudean Anton (2410—3, 18, 24, 29, 30—2, 34, 38, 39, 41, 2, 53—5), Tekete Otto (2430, 1, 2, 4, 9, 40, 5, 7 ; 7326).

RÎUL ALB (PLOIEŞTI). *Ş. g. 1* cl. VIII Pavel Elena (2394, 400, 1, 4, 11, 2, 3, 31, 6, 8), Radu Constantin (2431, 2, 4, 8, 9, 40—2, 45, 46), Stoica Gh. (2394, 5, 2411, 2, 3, 21, 5, 8).

RÎMNICU SĂRAT. *Liceul 1* cl. IX Tudor Valeriu (2424—8, 44—9, 7286, 7, 317, 26, 28), cl. X. Gloria Spînu (7292, 300, 312, 4, 7, 22, 66, 75, 87, 402, 6), cl. XI Panait Stan (7216—18, 21—28, 82, 83, 86, 87, 98, 99, 7300—3).

RÎMNICU VÎLCEA. *Liceul 1.* cl. IX Balici Gheorghe (2425, 7, 8, 44, 5, 6, 60, 2, 7287, 8, 325, 6, 8), Brădeanu Florin (2424—6, 8, 44—7, 7286—9, 7326, 8), Bobîlcă Aurel (2444—49 ; 7284—90, 325—8), Cazan Liviu (2424, 7, 8, 44—6, 49, 7284, 5, 8, 7325, 6, 8), Cernătescu Gheorghe (2425, 6, 8, 44—7, 7284, 5, 7, 8, 7325—6, 8), Diaconu Nicolae (2424, 5, 6, 8, 44—7, 49, 7284, 5, 8, 7325, 6, 8), Glăman Mihai (7284, 5,8, 7325, 6, 8, 2424, 5, 8, 45, 6, 60, 2), Iliescu Florea (7284, 5, 7, 8, 9, 7325, 6, 8 ; 2425, 8, 44—7), Mateescu Cristian (2224—6, 7284—8, 325—8), Nadolu Dorin (2425, 6, 8, 45, 6, 7, 9 ; 7284—8 ; 7313, 8, 22, 25, 26, 28), Olteanu Dumitru (2424—8, 44—6, 7284, 5, 7, 8 ; 7325, 6, 8), Pîslaru Ion (2425, 8, 44—7 ; 7284, 5, 7, 8, 9, 7325, 6, 8), Popian Crişan (2424—8, 2444—9, 7284—8, 7325, 6), Soare Marin (2425, 6, 8, 44, 5, 6, 7 ; 7284, 5, 7, 7318, 25, 6, 8), Stănescu Constantin (2425, 8, 44—7 ; 7284—9, 7326, 8), Tulvica Mihai (2424, 7, 8, 45, 6, 9 ; 7284, 6, 7, 9 ; 7314, 25, 6, 8), cl. X Bădescu Adrian (7216, 7, 9, 22, 4, 5, 6, 72, 6, 83, 6, 7, 91, 9), Darie Laurenţiu (7216, 7, 9, 22—5, 35, 78, 83—8), Grigorescu Florin (7216, 7, 22, 34, 83—8, 7300, 18, 26, 28, 37), Marinescu Silviu (7284—6, 8, 99, 7300, 17, 18, 20—8, 73, 75, 7402), Popescu Marian (7216, 7, 9, 22—4, 35, 83—7, 7323—6), Stănescu Mihail (7216, 7, 9, 22—4, 35, 78, 83, 323, 25, 26, 28), cl. XI Marinescu Alexandru (7263, 78, 7312—18, 20, 13, 15, 16, 18, 39, 43), Otătărăşanu Ion (7216, 7, 9, 21, 2, 4, 84, 8, 7300, 17, 20, 22, 25), Popian Doru (7216, 7, 9, 21, 2, 4, 84, 8, 300, 317, 20, 22, 25), *Popescu N. Constantin* (7216—23, 16, 28, 29, 43, 47, 50, 51, 63,

78, 81—8, 91, 2, 95, 97, 99, 7300—2, 309, 311, 14, 17—20, 23, 33, 5, 40, 2), Tufiş Ion (7219, 20, 63, 78, 7303, 12, 14, 17, 18, 20—28, 34, 9, 43).

ROMA. (SUCEAVA). cl. VII Florescu Lucia (2410—15, 2431, 4, 41; 7326, 8), Măzăreanu Aurica (2410, 12, 13, 15, 18, 34, 41, 25, 28).

ROMAN. *Şc. prof. Uc. I. M.* Galu Vasile (2413, 28, 31, 2, 4, 9, 40, 1, 5, 6), Olaru Gheorghe (2367—72, 74—6, 80, 85, 89), Ulca Vasile (2367—71, 75—7, 80, 83, 95, 400), Tăbarcea Vasile (2413, 28, 9, 31, 2, 4, 40, 1, 5, 6), *Liceul* cl. IX Caşu Vasile (2423, 5, 7, 8, 44, 5, 6, 9; 7286, 7, 7325, 6, 8). cl. XI *Bercovici Nelu* (7163, 4, 9, 7203, 17, 8, 20, 3, 5, 8, 83, 6, 7, 92, 9, 7300, 301, 13, 7, 8, 20, 3, 5, 6, 7, 8, 32, 5, 9, 42—3, 6, 50, 6, 60, 2, 4, 71, 2, 3, 5, 8, 9, 91, 5, 9, 402, 4, 6, 13, 8, 22), Cornea Vasile (7283, 4, 5, 6, 7, 14, 5, 7, 23, 5, 6, 8, 52), *Rugină Andrei* (7263, 6, 72, 5, 6, 81—92, 5—304, 8—12, 4, 5, 7, 8, 20—8, 30—3, 5—40, 5—7, 9, 5, 6, 8), *Smit Petru* (7178, 81, 5, 202, 22, 3, 66, 8, 78, 823, 4, 5, 6, 7, 8, 92, 3, 6, 9, 303, 4, 5, 8, 11, 2, 4, 7, 8, 9, 20).

ROMÂNEŞTI (PLOIEŞTI), *Ş. g. 8 ani* cl. VIII Herea Ion (2429—34, 36, 38—42, 44—7).

ROŞIORI DE VEDE. *Liceu.* cl. IX Golesteanu Petre (2425, 7, 8, 45—7, 49; 7284—8, 321, 5, 6), Popescu Gheorghe (2409, 25—8, 44—6, 49; 7234—7, 84—5), Sisu Ilie (2426—8, 45, 9, 7285—7, 318, 21, 6, 8), Tucă Anastasie (2424—8, 7284—9).

SĂLIŞTE (BRAŞOV) *Ş. g.* cl. IX Pompu Reveca (2429, 31—4, 6, 8, 9, 41, 2).

SĂULEŞTI (OLTENIA). *Ş. g.* cl. VIII. Negoiţă Victoria (2411, 4, 7, 9, 21, 3, 7, 7185, 7, 326).

SĂRMAŞ (MUREŞ AUT. MAGHIARĂ). *Liceu* cl. XI Moldovan Vasile (7276, 88—301, 17, 8, 20, 2, 5, 6, 8, 33, 42, 7, 8).

SATU MARE. *Ş. g. 1.* cl. V. Liona Mălai (2394—7, 2410—3), cl. VI. Sacal Ştefan (2429—32, 4, 8, 9, 41, 2, 4, 5), cl. VII Vreja Irina (2430—2, 4, 8, 9, 40, 1), cl. VIII Ardeleanu Doina (2413, 3, 9, 32, 8, 9, 41, 2), cl. IX Iacob Margareta (2424—8, 44—9, 67, 84—92, 301, 17, 8, 25—8), Iordan Andrei (2424—8, 45—7, 9, 7220, 3, 67, 84—8, 91, 2, 301, 17 8, 21—8, 35, 9), cl. X Mera Iosif (7210—2, 3, 34, 40, 1, 91—3, 300, 17, 22, 30), Noje Georgeta (7287, 9, 91, 300, 7, 8, 22, 3—6, 8), Sichet Margareta (7288, 91, 300, 4, 7, 8, 21, 2, 3, 5, 6, 35), cl. XI Ciornău Niculae (7185, 8, 94, 9, 210, 6, 7, 22, 4, 5, 7, 47, 76) 87, 9, 320).

SĂVENI (Suceava) *Ş. g.* cl. VIII Bacău Silvia (2410—4, 7, 21, 31, 4, 50, 2, 3, 5, 402), cl. IX Grădinaru Valentina (7325, 6, 8, 44—6, 8, 9, 60—3).

SEBEŞ (Hunedoara). *Ş. g. 1* cl. VI Fărcaşu Dan (2381, 3, 95, 404, 10—2, 9, 30'4), Topîrceanu Nicoleta (2410—3, 29, 32, 4), cl. VIII Tudoran Viorel (2413, 9, 21, 32, 4, 8, 9, 41, 2), cl. IX Bociort Maria (2409, 25, 7—9, 35, 5, 6, 84—8, 7325, 6, 8), Brădău Nicolae (2409, 25, 7, 8, 45, 6, 9, 7223, 8, 36, 86, 7), Cofon Nicolae (2409, 25—8, 45, 6, 7284—8, 320), Mureşan Nicolae (2409, 26—8, 45, 6, 9, 7222, 67, 84—8, 320), cl. X Borţiş Terente (7225, 35, 6, 40, 84—7, 88—90, 5, 6, 8, 300, 25, 6, 8), Florenţiu Marius (7216, 9, 22—4, 84—8, 96, 300, 17, 25, 6, 8).

SIBIU. *Ş. g. 1* cl. VII Stîngescu Petre (2410—4, 6—9, 21, 8), *Ş. g. 2* cl. VII Boca Ioan (2410—4, 30, 1, 8, 9, 41), *Ş. g.* cl. VII Băstoiu Rodica (2393, 6, 8, 400, 1, 3—5), Dordea Daniela (2395, 96, 8, 400, 1, 3—5), Dumitrescu Iuliu (2394, 5, 7—402), Gherman Mihaela (2395, 6, 8, 400, 1, 3—6), Lungu Carmen (2395, 6, 8, 400, 1, 3—5), Popescu Viorel (2395, 6, 8, 400—3, 5), cl. VIII Juga Violeta (2395—7, 48, 99, 410—3), *Ş. g.* cl. VIII Pereorestov Mircea (2411, 4, 9, 21, 31, 8, 41, 2, 4, 53—6), *Ş. g. 7* cl. VIII Marinaş Marin (2410, 1, 3, 5, 9—21, 32, 9), *Ş. g. 8* cl. V Moraru Constantin (2394, 5, 7, 402, 10—4, 29, 32), cl. VI Blaga Iacob (2394—6, 9, 400, 2, 11—4), Borcea Ciprian (2429—32, 4, 8, 9, 41, 2, 4), Pătrujel Doina (2395, 404, 12, 3, 31, 2, 4, 8, 42), cl. VII. Răceală Mircea (2396—8, 404, 10—3, 8, 32), cl.VIII Leneny Marga (2410—3, 7—9, 21), Schuster Horald (2395—404), *Ş. g. 9* cl. VIII Potroacă Mihai (2431—3, 7—9, 41—3), *S. g. 12* cl. VIII Cucer Valentin (2395, 6, 89, 401, 4, 12, 13, 21), *Ş. g. 15* cl. VI. Dădîrlat Nicolae (2404, 10—3, 5, 32, 42), Raţiu Constanţa (2404, 12, 13, 31, 2, 8, 1, 41, 2), cl. VIII Moţ Magdalena (2411, 2, 9, 21, 53—5, 62), *Ş. g. 19* cl. VII Pătraşcu Georgeta (E: 2381, 5, 9, 94, 6, 8—400), *Liceul 1* cl. IX Drăgan Florin (2425—8, 45—7, 9, 84—8, 7325, 6, 8), Lup Pavel (2425—8, 444—7, 9, 7284—8, 325, 6, 8), cl. X Turcu Emiş (7234—6, 9, 44, 5, 7, 72, 6, 91, 3, 6, 9, 301, 8), cl. XI Gavadis Maria (7216—18, 20, 2—4, 317, 8, 39, 43, 5), *Liceul 3* cl. IX. Sevestrean Ioan (2424, 5, 8, 44—9, 84, 90, 317, 8, 21, 3) cl. XI Mihai Mircea (7216—8, 22, 3, 6, 82, 3, 6, 7, 92, 9, 300), Sevestrean Ioan (7216, 8, 22, 6, 34, 63, 84—8, 95), Popa Nicolae (7216—8, 20, 2—4, 87, 304, 18, 23, 6), Baloskò Paul (7217—20, 2—4, 8).

SIGHIŞOARA. *Ş. g. 2* cl. VIII Moraru Cristian (2381—4 7—90, 2—400, 3, 4, 10—5, 7, 9, 20, 1, 8).

SIMERIA, *Ş. g.* Oprea Alexandru (2410—4, 7, 8, 30, 1, 4), cl. VIII Tontici Denisa (2429, 31, 4, 9, 41, 4, 54, 62, 7326), cl. IX Biro Margareta (2424, 6, 8, 45, 6, 9, 60, 2, 86,

7, 318, 25, 6, 8), Savu Doina (2426—8, 45, 6, 9, 7286, 318, 25, 6, 8), *Horvat Andrei* (7216, 7, 8, 22—4, 8, 41, 66, 7, 8, 78, 82—8, 92, 9, 300, 1, 3, 4, 11, 20, 1—3, 5, 6, 8, 35), Munteanu Marcel (7216, 7, 24, 68, 82—5, 7, 8, 92, 300, 1, 14, 8, 20, 3, 5, 6, 8, 35) cl. X, Vasilescu Radu (7216, 7, 71, 2, 3, 89, 300, 25, 66), cl. XI *Cojocaru Vasile* (7216—24, 6—9, 31, 2, 47, 8, 50, 63) 82, 3, 5—7, 300—4, 11, 4, 7, 8, 20, 2, 3, 5, 6, 8, 35, 7, 9, 42, 3), cl. XI *Sava Costică* (7216—29, 31, 2, 45, 7, 50, 63, 72, 6, 8, 82—4, 6—8, 92, 5, 9, 301, 2, 6, 20, 2, 3, 5, 6, 8, 35, 7, 9, 42), *Ştefan Viorel* (7216—8, 22—4, 6—8, 32, 6, 9, 63, 6—8, 72, 6, 8, 82—8, 91, 2, 5, 9, 300, 1, 6, 14, 5, 7, 8, 20, 2, 3, 5, 6, 8, 42, 3).

SITITELEC (CRIŞANA), *Liceu* cl. XI Lucuş Teodor (7293, 303, 4, 7, 8, 20, 2, 5, 6, 8, 38, 42, 3).

SINGEORZ-BAI (CLUJ). *Liceu*, cl. IX Moisil Emanoil (2424, 5, 8, 45—7, 82, 7—9, 325, 6, 8).

SÎNNICOLAUL MARE (BANAT) *Ş. g.* cl. V Cecan Lidia (2410—2, 28—32, 4).

SÎNTANA (CRIŞANA), *Ş. g.* cl. VI Stan Cristian (2429,—32, 4, 9, 41—3).

SÎNTANDREI (ORADEA). *Ş. g.* cl. VI. Chişvan Dumitru (2394—405), Farcaş Gheorghe (2394—405), Lobonţ Maria (2394—405), Maghiar Ana (2394—405), Mureşan Teodor (2394—405), Roşca Maria (2394—405), Torjoc Floarea (2394—405), Tarsoc Tanţa (2394—405), Ungur Victor (2394—404), Vaida Ioan (2394—405), Vereş Maria (2394—405), Vidican Ioan (2394—405).

SLATINA. *Liceul 2* cl. VI Custurea Nicolae (2394—401, 15—8), cl. XI Bucescu Radu (7372—9, 81, 5).

SLĂNIC. cl. X Neicu Adrian (7216—8, 24, 6, 78, 82, 3, 6—8, 92, 300, 18, 20, 5, 6, 8, 9), Moraru Gh. (7216—8, 22—6, 36, 47, 82, 3, 6, 7, 92, 5, 317, 20, 5, 6, 8).

SOCRUJENI (BOTOŞANI). Aenculesei Veronica (2410—4, 7—21, 3, 5, 7, 8), cl. VIII Ivan Antonica (2410—4, 7—21, 3, 5, 7, 8).

SOMCUŢA MARE. *Liceu*, cl. X. Cuceu Gheorghe (7216, 7, 22—5, 87, 8, 91, 317, 8, 21, 2), Mureşan Emil (7216, 7, 20, 2—5, 85—9, 91—3).

STANCEA (BUCUREŞTI). *Ş. g.* cl. VIII Ioniţă Vasile (2394—404).

STOENEŞTI (BUCUREŞTI). *Ş. g.* cl. VII Bunica Petra (2410—3, 5, 28, 32, 8, 9), Chinaţă Constantina (2410—3, 5, 28, 32, 8, 9), Olteiu Vasilica (2410—3, 7, 9, 21, 8, 85), Prodan Maria (2410—3, 5, 7, 9, 21, 8), Ion Stere (2410—3, 5, 7, 9, 21, 8), Cotorobai Elvira (2410—3, 5, 8, 32, 4, 41), cl. VIII Ceauşu Niculina (2410, 3, 5, 7, 9, 21, 8), Crîngea Petre (2410—3, 5, 7, 9, 28), Enache Nicolae (2410—3, 5, 7, 9, 21, 8), Ghiţă Ioan (2410—3, 5, 21, 8). Năchiţă Petre (2402, 10—3, 5—9, 21, 3, 5, 8—32, 4, 8—45, 8, 50, 1, 3, 4, 60—2, 7325, 8).

ŞTEFĂNEŞTI (ARGEŞ). *Ş. g.* cl. VIII Gal Mihai (2452—5, 60—5).

SUCEAVA *Liceul „Ştefan cel Mare"* cl. VI Berlinski Mira (2410, 1, 3, 4, 394, 6, 8) Teuceanu Radu (2396, 8, 401, 4, 11, 3, 7, 8, 30, 2, 4, 9, 41), Iancovici Iosif (2431, 2, 4, 6—8, 41—3, 50, 3—5, 60, 2, 13), cl. IX Constanton Stelian (2410—9, 23, 8, 3, 2, 4, 8, 9, 41, 2, 7326, 8), Tabarcea Petru (7216, 7, 9, 21—4, 6, 7, 34—7, 9, 42, 5, 7, 82—8, 95, 8, 7300,1)

(va urma)

EVIDENŢIAŢI LA CONCURSUL DE MATEMATICĂ 1966, ETAPA FINALĂ

PREMIUL I

1. *Coman Silviu*, Liceul 1 cl. IX Tg. Mureş;
2. *Sergiescu Vlad*, Liceul Gh. Lazăr, cl. IX, Bucureşti;
3. *Cartianu Dan*, Liceul Spiru Haret cl. X, Bucureşti;
4. *Popa Eugen*, Liceul 3 cl. X, Iaşi;
5. *Mihalache Adrian*, Liceul Petru Groza cl. XI, Bucureşti;
6. *Nicolescu Radu*, Liceul Petru Groza, cl. XI, Bucureşti;
7. *Anghel Ştefan*, Şc. profesională anul II, Tîrgovişte.

PREMIUL II

1. *Brener Paul*, Liceul 2 cl. IX, Ploieşti;
2. *Hurjui Veronica*, Liceul 5, cl. IX, Iaşi;
3. *Apşan Dan*, Liceul 3 cl. X, Baia Mare;
4. *Gavrilă Şerban*, Liceul 1 cl. X, Buzău;
5. *Mignea Arminius*, Liceul 2 cl. X Ploieşti; 6.
6. *Steriu Dan*, Liceul 1 cl. XI, Ploieşti.

PREMIUL III

1. *Dăneţ Nicolae* Liceul 1 cl. IX Buzău;
2. *Pop Horia* Liceul 1 cl. IX Tg. Mureş;
3. *Lungulescu Bogdan*, Liceul 1 cl. X Piteşti;
4. *Ralescu Dan*, Liceul 12 cl. X, Bucureşti;
5. *Sava Petru*, Liceul Traian Vuia, cl. X, Făget;
6. *Voiculescu Dan*, Liceul 21 cl. X, Bucureşti;
7. *Aizicovici Sergiu*, Liceul 3 cl. XI Iaşi;
8. *Farkaş Petru*, Liceul Bălcescu, cl. XI, Cluj;
9. *Suciu Paul*, Liceul M. Basarab cl. XI, Bucureşti;
10. *Gălbenuş Nica* Liceul seral cl. IX Ştefăneşti Argeş;
11. *Ciolaca Adam*, Şc. profesională anul II, Bocşa.

MENŢIUNI

1. *Boaldă Nicolae*, Liceul 1 cl. IX Ploieşti;
2. *Caraghiosu Angela*, Liceul 3 cl. IX Galaţi;
3. *Iordan Andrei*, Liceul Eminescu, cl. IX Satu Mare;
4. *Blană Ionel*, Liceul 2 cl. X Constanţa;
5. *Cearnău Ioan* Liceul Eminescu, cl. X Satu Mare;
6. *Ciocîrlie Valeriu*, Liceul 1 cl. X Tg. Jiu;
7. *Cernea Raul Adrian*, Liceul 2 cl. X Ploieşti;
8. *Dumitrache Ion*, Liceul 1 cl. X Piteşti;
9. *Mitaru Alexandru*, Liceul Eminescu cl. X Satu Mare;
10. *Manolache Nicolae*, Liceul Sadoveanu, cl. X, Bucureşti;
11. *Oros Lucian*, Liceul Bălcescu, cl. X. Cluj;
12. *Pascu Ion*, Liceul 2, cl. X Constanţa;
13. *Popescu Marcel*, Liceul 1 cl. X Tr. Severin;
14. *Rogalschi Mircea*, Liceul Spiru Haret, cl. X Bucureşti;
15. *Vasile Eugen*, Liceul 2 cl. X Călăraşi;
16. *Alexandru Radu*, Liceul Petru Groza, cl. XI, Bucureşti;
17. *Bădescu Alexandru*, Liceul 2 cl. XI Ploieşti;
18. *Bercovici Nelu*, Liceu cl XI Roman;
19. *Blumenfeld M.*, Liceu cl. XI Roman;
20. *Magda Radu*, Liceul 3 cl. XI Sibiu;
21. *Penea Teodor*, Liceul 2 cl. Buzău;
22. *Pitiş Gheorghe*, Liceul 4 cl. XI, Braşov;
23. *Ţepelea Vlad*, Liceul N. Bălcescu cl. XI Bucureşti;
24. *Teodorescu Valentin*. Liceul D. Cantemir, cl. XI Bucureşti.

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

IN „BIBLIOTECA SOCIETĂȚII DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA" AU APĂRUT URMĂTOARELE CĂRȚI DE MATEMATICĂ, MECANICĂ ȘI DE ASTRONOMIE

*1. E. RUSU: Bazele teoriei numerelor, 2. A. I. MARKUȘEVICI: Șiruri recurente, 3. N. .N VOROBIEV: Numerele lui Fibonacci, 4. P. S. ALEXANDROV: Introducerea în teoria grupurilor, 5. I. S. SOMINSKI: Metoda inducției matematice, 6. GH. MIHOC: Elemente de calculul probabilităților, 7. H. IONESCU: Calcule numerice, 8. A. I. MARKUȘEVICI: Arii și logaritmi, 9. A. I. GHELFOND: Rezolvarea ecuațiilor în numere întregi, 10. O. SACTER: Despre conice și alte curbe, 11. ION IONESCU: Maxime și minime geometrice, 12. F. I. ZIGHEL: Cometele, 12. S. SKLOWSKI: Radioastronomia, 15. V. V. ȘARONOV: Soarele și observarea lui, 16. O. KREINDLER: Elemente de calcul vectorial, 18. M. V. PENTKOVSKI: Nomograme, 19. A. KAHANE: Elemente de teoria congruențelor de drepte, 20. GH. ȚIȚEICA: Culegere de probleme de geometriei ed. V (revăzută și completată de G. D. Simionescu), 2. A. HALANAY): Introducere în teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale, 24. C. N. BERMAN: Cicloida, 25. C. BORȘ: Noțiuni de geometrie proiectivă, 29. I. S. DUBNOV: Erori în demonstrațiile geometrice, 30. H. STEINHAUS: Caleidoscop matematic, 31. C. POPOVICI: Stelele, date fizice, originea și evoluția lor, 32. C. DRIMBA: Elemente de mecanică cerească, 33. C. IONESCU-BUJOR: Elemente de transformări geometrice (I), 35. GH. A. CHIȚEI: Metode pentru rezolvarea problemelor de aritmetică, 37. C. IONESCU-BUJOR: Elemente de transformări geometrice (II), 38. O. SACTER: Olimpiade matematice, 39. A. I. MARKUȘEVICI: Numere complexe și reprezentări conforme, 40. I. S. GRADSTEIN: Teorema directă și reciprocă, 41. A. I. HINCIN: Fracții continue, 42. V. A. USPENSKI: Unele aplicații sle mecanicii în matematică, 43. V. G. BOLTEANSKI: Ce este derivarea? 44. G. N BERMAN: Despre numere și studiul numerelor, 45. A. IAGLOM și I. IAGLOM: Probleme neelementare tratate elementar, 47. G. CIUCU și G. SIMBOAN: Probleme de calculul probabilităților și statistică matematică, 47 FEODOROV: Cicloida, 48. O. SACTER: Elemente de teoria ecuațiilor algebrice și transcendente, 50. C. BORȘ și D. BORȘ: Numere complexe, 52. D. RIMER: Noțiuni de teoria mulțimilor, 53. * * *: Probleme actuale de matematică (conferințe ținute la cursurile de vară de la Piatra Neamț), 54. M. GHERMANESCU: Aplicați ale trigonometriei, 55 * * *: Ipotezele care stau la baza geometriei de B. Riemann (studii și comentarii de E. Gerhgely), 57. A. HAIMOVICI: Grupuri de transformări, 58. AL. TOTH: Noțiuni de teoria construcțiilor geometrice, 60. T. ROMAN: Simetria, 61. C. IONESCU-BUJOR: Elemente de transformări geometrice (partea a treia), 63. E. NICOLAU: Introducere în cibernetică, 64. * * *: Probleme actuale de matematică (conferințe ținute la cursurile de vară de la Săcele-Brașov 1962), 65. N. MIHĂILĂ: Introducere în programarea liniară, 66. GH. D. SIMIONESCU: Tirigonometrie sferică, 67. AGNETA VESCAN: Sumabilitatea seriilor, 68. * * * Jocuri și probleme distractive de matematici, 68. * * * : Probleme actuale de matematici III, 70. N. MIHĂILĂ: Teoria probabilităților și statistică matematică, 71. G. CIUCU, M. IOSIFESCU, R. TEODORESCU: Introducere în teoria jocurilor, 72. I. MUȘAT și C. IONESCU-ȚIU: Exerciții șiprobleme de matematică pentru admiterea în clasa a IX-a. 73. C. IONESCUL-BUJOR Elemente de transformări geometrice (partea a IV-a).*

1966 JUL - 4

CĂTRE REZOLVITORII DE PROBLEME

Corespondenții care ne trimit probleme rezolvate trebuie să redacteze fiecare problemă separat, însoțind-o de toate calculele necesare și de figuri desenate cu îngrijire.

Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceeași foaie.

Evidențiații trebuie să aibă cel puțin 35—40 soluții bune.

Problemele care se propun de către colaboratorii revistei să fie clar alcătuite și însoțite de soluții, să fie personale, iar nu luate din cărți sau reviste. Elevii sînt sfătuiți să înceapă a propune probleme numai după ce au rezolvat un număr destul de mare de exerciții și probleme. Problemele propuse, dar necorespunzătoare, nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse au fost publicate în cărți sau reviste, este rugat să arate precis volumul și pagina unde a mai apărut enunțul sau soluția problemei respective.

Solicităm probleme interesante legate de practică.

— Problemele propuse urmînd a fi publicate ținînd seama de predarea la clasă a materiei respective, autorii lor sînt rugați să trimită problemele din vreme însoțite de una sau mai multe soluții îngrijit scrise precum și observări, discuții sau uneori generalizări, arătînd și modul cum au fost stabilite.

— Problemele propuse (P), *note matematice* (N), *articole* (A), *materiale privind cercurile de elevi* (C), *se vor trimite redacției* G.M.-B. *de preferat într-un plic separat de problemele rezolvate.*

Corespondentul nostru care a citit și a înțeles deplin multe din soluțiile publicate, a rezolvat multe din problemele propuse poate și este îndemnat să încerce să schițeze cîte o notă rezultată dintr-o observație făcută cu ocazia rezolvării unei chestiuni mai grele. Aceste note să fie *revăzute de mai multe ori înainte de a fi trimise*, pentru ca redactarea lor să fie *cît mai clară și concisă*. Figurile să fie făcute separat. În redactare se vor evita prescurtările.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

La publicarea problemelor rezolvate se vor menționa rezolvitorii care au dat o bună redactare și o soluție interesantă sau mai multe metode de rezolvare.

Elevii claselor a IX-a pot trimite soluții și la problemele propuse pentru clasa VIII-a. Problemele rezolvate trebuie să fie din ultimile trei numere apărute în G.M.B. *Problemele rezolvate*, vor fi expediate în cursul unei luni și vor fi însoțite de un borderou cu numărul problemelor, scrise în ordinea crescîndă. Pe plic se va scrie școala, clasa și localitatea rezolvitorului. Problemele propuse vor fi separate, corect rezolvate și citeț semnate. Desenele să fie făcute îngrijit pe foi separate.

Elevii claselor V—VIII vor fi anunțați în rubrica rezolvitorilor de probleme dacă trimit odată cel puțin 8 probleme bine rezolvate, iar elevii claselor IX—XI, pentru cel puțin 12 probleme bine rezolvate.

Autorii sînt rugați să semneze clar la sfîrșitul lucrării personale pe care o trimit pentru publicat și să dea adresa lor exactă.

★

În vederea stimulării elevilor clasei XI premiați la olimpiadele internaționale de matematică sau olimpiadele interne (etapa finală), care devin studenți ai facultății de matematică-mecanică sau fizică de la Universități, conducerea Ministerului Învățămîntului a hotărît să li se acorde următoarele forme de sprijin material:

a) bursă în primul an de studii, indiferent de situația lor materială. În următorii ani de studii bursa să fie menținută în aceleași condiții dacă obțin media generală cel puțin 9,00.

b) la începutul primului an de studii să li se acorde cărți și manuale de specialitate în valoare de 500 lei.

c) în vacanțele anului I de studii să fie trimiși cu prioritate la odihnă în taberele studențești (iarna sau vara la alegerea studentului) dacă rezultatele școlare sînt foarte bune.

★

Tirajul fiind limitat, gazetele se trimit mai întîi abonaților și de aceea rugăm colaboratorii noștri să se aboneze de îndată. Prețul este de 2 lei exemplarul. *Abonamentele se pot face prin oficiile poștale locale.*

I. P. „Informația" — c. 3317

INDEX 41601

Lei 2

E 1426

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE
DIN REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA

GAZETA MATEMATICĂ

SERIA B

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XVII — iulie 1966

7

1883

GAZETA MATEMATICĂ
SERIA B
Anul XVII, nr. 7 — iulie 1966

SUMARUL

	Pag.
1. Despre grupuri de Gh. Galbură	289
2. Unele exemple de grupuri de Valeriu Popa, Bicaz	291
3. O aplicaţie a diviziunii armonice de C. Borş şi D. Butuc Piatra Neamţ	296
4. Caleidoscop matematic de Gh. Pîslaru, Bacău	298
5. Probleme rezolvate (7218, 7220, 7223, 7224, 7225, 7226, E: 2344, 2358, 2361, 2362).	300
6. Chestiuni de examen (7626—7635)	307
7. Probleme propuse (7636—7663)	309
8. Exerciţii şi probleme propuse pentru clasele V — VIII (E: 2528 — 2544)	314
9. Rubrica rezolvitorilor de probleme	316

ANUL XVII 7 IULIE

O mare parte din materialele publicate în acest număr a fost asigurată de către filiala Bacău a Societăţii de ştiinţe matematice din Republica Socialistă România.

COMITETUL DE REDACŢIE

Dincă N., profesor; *Grosu A.*, profesoară; *Ionescu-Bujor C.*, prof. univ. emerit; *Ionescu-Ţiu C.*, profesor, redactor şef adjunct; *Kiss E.*, conf. univ. (Cluj); *Kovacs K.*, conf. univ. (Cluj); *Muşat I.*, profesor; *Ottescu C.*, profesor; *Plăviţu M.*, profesor; *Sacter O.*, conf. univ., redactor şef; *Simionescu Gh.*, conf. univ.; *Ţene L.*, profesoară şi *Voinea R.*, prof. univ.

REDACŢIA G. M-B: Str. Academiei, 14 — Tel. 14.46.53 — Bucureşti

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică a şcolilor, precum şi orice material informativ se vor trimite pe adresa de mai sus.

GAZETA MATEMATICĂ

SERIA B

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XVII, nr. 7. iulie 1966

1883

DESPRE GRUPURI

Prof. univ. *GHEORGHE GALBURĂ*,
Universitatea București

1. În matematică, se întîlnesc mulțimi în care este definită numai o lege de compunere. Astfel este grupul translațiilor unui plan în el însuși, grupul translațiilor spațiului, grupul permutărilor unei mulțimi ș.a.

Fie G o mulțime oarecare; însemnăm cu $G \times G$ mulțimea perechilor (a, b) de elemente a și b din G; orice funcție definită în $G \times G$ și cu valori în G se numește *lege de compunere* în G.

Astfel suma este o lege de compunere în mulțimea N a numerelor naturale, $s(a, b) = a + b$; produsul p, $p(a, b) = ab$ este de asemenea o lege de compunere în N.

Cînd este vorba de o singură lege de compunere, într-o mulțime dată, pentru a simplifica, se notează cu ab valoarea funcției în perechea (a, b), iar această valoare se numește produsul lui a cu b, în ordinea în care sînt scrise; alteori valoarea legii de compunere se notează cu $a + b$ și se numește suma elementelor a și b.

Pentru a exprima că perechii (a, b) i se asociază elementul ab, se scrie $(a, b) \to ab$.

2. *Definiție.* O mulțime G împreună cu legea de compunere $(a, b) \to ab$ definită pe întreaga mulțime $G \times G$, se numește *grup*, dacă sînt îndeplinite următoarele condiții:

G 1. $(ab)c = a(bc)$ (compunerea este asociativă).

G 2. Există un *element neutru* $u \in G$, astfel încît $ua = au = a$, pentru orice $a \in G$.

G 3. Pentru fiecare $a \in G$ există un *invers* $a' \in G$, astfel încît $a'a = aa' = u$.

Exemple. a) Astfel mulțimea Z a numerelor întregi, împreună cu adunarea ca lege de compunere, este un grup; la fel mulțimea Q a numerelor raționale, împreună cu adunarea, este un grup și la fel numerele complexe, cu adunarea ca lege de compunere formează un grup C. Elementul neutru în fiecare din aceste grupuri este 0; inversul unui element a se notează cu $-a$ și se numește opusul lui a.

b) Complementara Q^*, respectiv C^*, a lui 0 în mulțimea Q, respectiv C, din exemplul a), cu înmulțirea obișnuită ca lege de compunere, este grup; elementul neutru în fiecare din aceste grupuri este 1; inversul lui a se scrie a^{-1} sau $\frac{1}{a}$.

c) Întregii $+1$ și -1 și operația de înmulțire formează un grup; la fel numerele complexe de forma e^{ix}, cu x real și cu înmulțirea ca lege de compunere, formează grup.

d) Permutările unei mulțimi de 3 obiecte formează grup.

e) Simetriile față de două drepte perpendiculare în plan, împreună cu simetria față de punctul lor de intersecție și cu transformarea identică a planului în el însuși, formează un grup de transformări ale planului în el însuși, etc.

3. Din însăși definiția noțiunii de grup rezultă că, într-un *grup general*, sînt valabile reguli de calcul familiare elevilor din liceu. Astfel, într-un grup oarecare, orice egalitate de forma $ax = ax'$ (sau de forma $xa = x'a$) atrage după sine egalitatea $x=x'$ (se poate simplifica); este suficient să înmulțim în ambii membri ai egalității de simplificat, la stînga (respectiv la dreapta) cu a^{-1}.

De asemenea are soluție unică ecuația $ax = b$.

Observăm că, dacă a și b sînt elemente dintr-un grup G, putem scrie $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ (pentru că $ab(b^{-1}a^{-1}) = a(bb^{-1})a^{-1} = aa^{-1} = u$); în general

$$(a_1 \dots a_n)^{-1} = a_n^{-1} \dots a_1^{-1}. \tag{1}$$

Într-un grup oarecare G, se pot defini puterile întregi, pozitive și negative, ale unui element a.

Anume, pentru n natural, a^n este produsul a n factori egali cu a. Punînd în egalitatea (1) $a_i = a$, pentru $i = 1, \dots, n$, deducem

$$(a^n)^{-1} = (a^{-1})^n. \tag{2}$$

Pentru orice întreg negativ m se pune

$$a^m = (a^{-1})^{-m}$$

Se demonstrează ușor că într-un grup oarecare sînt valabile regulile obișnuite de calcul

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \tag{3}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}. \tag{4}$$

4. După cum noțiunea de *spațiu* se completează cu aceea de funcție, tot astfel noțiunea de grup se întregește cu a aceea de *omomorfism de grup*. Se numește *omomorfism al unui grup G într-un grup G', orice funcție f definită pe G, cu valori în G', care satisface condiția*

$$f(xy) = f(x)f(y) \tag{5}$$

pentru orice x și y din G.

Condiția (5) nu spune altceva decît că funcția f comută cu legile de compunere în G și G': fie că facem produsul xy (în G) și luăm apoi imaginea sa $f(xy)$, fie că luăm mai întîi imaginile $f(x)$ și $f(y)$ ale factorilor și apoi calculăm produsul $f(x)f(y)$ (în G') găsim același rezultat. Rezultă că dacă e este elementul neutru în G, atunci

$$f(x) \cdot f(e) = f(xe) = f(x),$$

adică $f(e)$ este elementul neutru în G'.

De asemenea, din relația

$$f(x)\cdot f(x^{-1}) = f(x\cdot x^{-1}) = f(e),$$

rezultă că $f(x^{-1})$ este inversul lui $f(x)$, $(f(x))^{-1} = f(x^{-1})$. În particular, dacă $f(x) = f(e)$, atunci și $f(x^{-1}) = f(e)$.

Exemple. f) Să considerăm drept grup G *grupul aditiv* R al numerelor reale, iar drept grup G' *grupul multiplicativ* R' al numerelor reale strict pozitive.

Însemnînd cu a un număr real pozitiv, funcția $f(x) = a^x$ este un omomorfism al lui R în R':
$f(x+y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = f(x)\cdot f(y)$, oricare ar fi numerele reale x și y.

g) De asemenea, m fiind un număr întreg, funcția $g(x) = x^m$ este un omomorfism al lui R' în R': $g(xy) = (xy)^m = x^m y^m = g(x)\,g(y)$.

h) La fel, funcția $h(x) = |x|$ (modulul lui x) este un omomorfism al grupului C^* format de numerele complexe (nenule) în grupul R':

$$h(xy) = |xy| = |x|\,|y| = h(x)h(y).$$

UNELE EXEMPLE DE GRUPURI

VALERIU POPA prof. Liceul Bicaz

Reamintim că fiind dată o mulțime de elemente G și o operație $*$ peste elementele acestei mulțimi, mulțimea G este un grup în raport cu operația $*$ dacă sînt verificate următoarele 4 axiome:

1) Dacă $x \in G$ și $y \in G$ atunci și $x*y \in G$

2) $(x*y)*z = x*(y*z)$

3) Există un element $e \in G$, numit *element unitate*, așa ca pentru orice $x \in G$, să avem $x*e = x$

4) Pentru orice $x \in G$, există un element $x' \in G$, numit reciprocul lui x, așa ca $x*x' = e$.

În cazul cînd mai este satisfăcută și axioma 5:

5) $x*y = y*x$

grupul se numește *comutativ* sau *abelian*.

De exemplu: mulțimea numerelor întregi este un grup în raport cu adunarea dar nu este un grup în raport cu înmulțirea.

Amintim că dacă $x*e = x$ atunci și $e*x = x$; de asemenea dacă $x*x' = e$ atunci și $x'*x = e$.

Exemple de grupuri

În cele ce urmează ne propunem să găsim anumite operații definite pe anumite mulțimi, mulțimi care să formeze un grup în raport cu operația respectivă. Pentru operațiile pe care vrem să le determinăm vom proceda astfel: Vom determina operația respectivă din condițiile următoare: *a)* $x*e = x$ și *b)* $e*y = y$, deoarece e este element unitate și la dreapta și la stînga, apoi vom verifica axiomele grupului.

I. Ne propunem să găsim o operație de forma $x*y = f(x) + g(y)$ operație pentru care să se verifice axiomele $1 - 4(5)$ pe mulțimea de definiție.

Conform relațiilor *a*) și *b*) rezultă:

$$x * e = x, \text{ deci } f(x) + g(e) = x;\ f(x) = x - g(e),$$

$$e * y = y, \text{ deci } f(e) + g(y) = y;\ g(y) = y - f(e).$$

Deci (I) $x * y = x + y - k$; $k =$ constant.

Verificăm axiomele 1—4(5):

1) Dacă $x \in R$ și $y \in R$ atunci și $x * y \in R$.

2) $(x * y) * z = (x + y - k) + z - k = x + y + z - 2k,$

$$x * (y * z) = x + (y + z - k) - k = x + y + z - 2k.$$

Deci $(x * y) * z = x * (y * z)$.

3) $x * e = x$; $x + e - k = x$, rezultă că $e = k$.

Deci elementul unitate este $e = k$.

4) $x * x' = e$; $x + x' - k = k$; $x' = 2k - x$.

Deci elementul reciproc al elementului x este elementul x' determinat mai sus.

5) Egalitatea $x * y = y * x$ este evidentă.

Deci mulțimea numerelor reale formează un *grup comutativ* în raport cu operația (I).

II. Ne propunem să găsim o operație de forma $x * y = f(x) \cdot g(y)$; operație pentru care să se verifice axiomele 1—4(5) pe mulțimea de definiție. Conform condițiilor a) și b) rezultă:

$$x * e = x, \text{ deci } f(x) \cdot g(e) = x;\ f(x) = \frac{x}{g(e)},$$

$$e * y = y, \text{ deci } f(e) \cdot g(y) = y;\ g(y) = \frac{y}{f(e)}.$$

Deci (II) $x * y = kxy$; $k \neq 0$.

Verificăm axiomele 1—4 (5):

1) Dacă $x \in R - \{0\}$ și $y \in R - \{0\}$ atunci și $x * y \in R - \{0\}$.

2) $(x * y) * z = k(kxy)z = k^2xyz,$

$$x * (y * z) = kx(kyz) = k^2xyz.$$

Deci $(x * y) * z = x * (y * z)$.

3) $x * e = x$; $kxe = x$; deci $e = \frac{1}{k}$.

Deci elementul unitate este $e = \frac{1}{k}$.

4) $x * x' = e$; $kxx' = \frac{1}{k}$; $x' = \frac{1}{k^2 x}$.

Deci elementul reciproc al elementului x, este elementul x' determinat mai sus.

5) Egalitatea $x*y = y*x$ este evidentă.

Deci mulțimea $R - \{0\}$ formează un grup comutativ în raport cu operația (II).

III) Dacă ne vom propune să găsim o operație de forma $x*y = f(x)^{g(y)}$, operație pentru care să se verifice axiomele 1 — 4 (5) pe mulțimea de definiție, vom găsi:

(3) $x*y = x^{\frac{\ln y}{\ln \theta}}$, $\theta > 0$, operație care se cere în problema 5085. Mulțimea $(0, +\infty) - \{1\}$ formează un grup comutativ în raport cu operația (III).

IV. Ne propunem să găsim o operație de forma: $x*y = [f(x) + g(y)]^k$, $k = 2p + 1$; operație care să verifice axiomele 1 — 4 (5) pe mulțimea de definiție. Conform condițiilor a) și b) rezultă:

$$x*e = x, \text{ deci } [f(x) + g(e)]^k = x;\ f(x) = \sqrt[k]{x} - g(e).$$

Analog, vom găsi că $g(y) = \sqrt[k]{y} - f(e)$.

Deci (IV) $x*y = \left(\sqrt[k]{x} + \sqrt[k]{y} - \sqrt[k]{a}\right)^k$; $k = 2p + 1$.

Verificăm axiomele 1 — 4 (5):

1) Dacă $x \in R$ și $y \in R$, atunci și $x*y \in R$.

2) $$(x*y)*z = \left[\sqrt[k]{[\sqrt[k]{x} + \sqrt[k]{y} - \sqrt[k]{a}]^k} + \sqrt[k]{z} - \sqrt[k]{a}\right]^k = [\sqrt[k]{x} + \sqrt[k]{y} + \sqrt[k]{z} - 2\sqrt[k]{a}]^k,$$

$$x*(y*z) = [\sqrt[k]{x} + \sqrt[k]{[\sqrt[k]{y} + \sqrt[k]{z} - \sqrt[k]{a}]^k} - \sqrt[k]{a}]^k = [\sqrt[k]{x} + \sqrt[k]{y} + \sqrt[k]{z} - 2\sqrt[k]{a}]^k.$$

Deci $(x*y)*z = x*(y*z)$.

3) $x*e = x$; $[\sqrt[k]{x} + \sqrt[k]{e} - \sqrt[k]{a}]^k = x$; $\sqrt[k]{x} + \sqrt[k]{e} - \sqrt[k]{a} = \sqrt[k]{x}$.

Deci $\sqrt[k]{e} = \sqrt[k]{a}$, $e = a$.

4) $x*x' = e$; $\sqrt[k]{x} + \sqrt[k]{x'} - \sqrt[k]{a}$; $\sqrt[k]{a} = \sqrt[k]{x'} = 2\sqrt[k]{a} - \sqrt[k]{x}$;

$x' = [2\sqrt[k]{a} - \sqrt[k]{x}]^k$.

Deci elementul reciproc al elementului x este elementul x' determinat mai sus.

5) Egalitatea $x*y = y*x$ este evidentă.

Deci, mulțimea numerelor reale formează un grup comutativ în raport cu operația (IV).

V. Dacă ne vom propune să găsim o operație de forma :

$$x * y = \sqrt[k]{f(x) + g(y)}, \quad k = 2p + 1,$$

operație care să verifice axiomele 1 — 4(5) pe mulțimea de definiție, vom găsi :

$$(V)\ x * y = \sqrt[k]{x^k + y^k - a^k}; \quad k = 2p + 1.$$

Mulțimea numerelor reale formează un grup comutativ în raport cu operația (V), elementul unitate fiind $e = a$ iar elementul reciproc al elementului x fiind $x' = \sqrt[k]{2a^k - x^k}$.

VI. Analog putem determina și verifica că mulțimea $(0, +\infty)$ formează un grup comutativ în raport cu operația

(VI) $x * y = a\sqrt[k]{(\lg_a x)^k + (\lg_a y)^k - (\log_{a^\alpha})^k \alpha}$; $a>0$; $\alpha>0$; $k=2p+1$; Elementul unitate este $e = \alpha$, iar elementul reciproc al elementului x este

$$x' = a^k \text{ unde } y = \sqrt[k]{\log_a^k \alpha - \log_a^k x}.$$

VII. Ne propunem că găsim o operație de forma :
$x * y = \text{arc tg}\,[f(x) + g(y)]$, operație pentru care să se verifice axiomele 1 — 4(5) pe mulțimea de definiție.

Conform condițiilor *a*) și *b*), rezultă :

$$x * e = x;\ \text{arc tg}\,[f(x) + g(e)] = x;\ f(x) = \text{tg}\, x - g(e).$$

Analog vom găsi că $g(y) = \text{tg}\, y - f(e)$.

Deci (VII) $x * y = \text{arc tg}(\text{tg}\, x + \text{tg}\, y - \text{tg}\, \alpha)$; $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$.

Verificăm axiomele 1 — 4 (5) :

1) Dacă $x,\ y \in \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$, atunci și $x * y \in \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$.

2) $(x * y) * z = \text{arc tg}\{\text{tg}\,[\text{arc tg}\,(\text{tg}\, x + \text{tg}\, y - \text{tg}\, \alpha)] + \text{tg}\, z - \text{tg}\alpha\}$,

$$(x * y) * z = \text{arc tg}\,(\text{tg}\, x + \text{tg}\, y + \text{tg}\, z - 2\ \text{tg}\, \alpha).$$

$$x * (y * z) = \text{arc tg}\,\{\text{tg}\, x + \text{tg}\,[\text{arc tg}\,(\text{tg}\, y + \text{tg}\, z - \text{tg}\, \alpha)] - 2\,\text{tg}\alpha\},$$

$$x * (y * z) = \text{arc tg}\,(\text{tg}\, x + \text{tg}\, y + \text{tg}\, z - 2\,\text{tg}\alpha).$$

Deci $(x * y) * z = x * (y * z)$.

3) $x * e = x$; $\text{arc tg}\,(\text{tg}\, x + \text{tg}\, e - \text{tg}\, \alpha) = x$,

$$\text{tg}\, e = \text{tg}\, \alpha;\ \text{deci } e = \alpha.$$

Elementul unitate este deci $e = \alpha$.

4) $x * x' = \alpha$; $\text{arc tg}\,(\text{tg}\, x + \text{tg}\, x' - \text{tg}\, \alpha) = \alpha$;

$\text{tg}\, x + \text{tg}\, x' - \text{tg}\, \alpha = \text{tg}\, \alpha$; $\text{tg}\, x' = 2\,\text{tg}\, \alpha - \text{tg}\, x$; $x' = \text{arc tg}(2\,\text{tg}\, \alpha - \text{tg}\, x)$.

Deci elementul reciproc al elementului x este elementul x' determinat mai sus.

5) Egalitatea $x * y = y * x$ este evidentă.

Deci mulțimea $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ formează un grup comutativ în raport cu operația (VII).

Analog putem verifica că mulțimea $(0, \pi)$ formează un grup comutativ în raport cu operația.

$$x * y = \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y - \operatorname{ctg} \alpha).$$

VIII. Ne propunem să găsim o operație de forma: $x * y = \operatorname{arc\,tg}(f(x) \cdot g(y))$, operație pentru care să se verifice axiomele 1—4(5) pe mulțimea de definiție.

Conform condițiilor *a*) și *b*) rezultă:

$$x * e = x;\ \operatorname{arctg}(f(x)\, g(e)) = x;\ f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{g(e)}.$$

Analog vom găsi că $g(y) = \frac{\operatorname{tg} y}{f(e)}$.

Deci: (VIII) $x * y = \operatorname{arc\ tg}\ (k \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y);\ k \in R - \{0\}$.

Verificăm axiomele 1 — 4 (5):

1) Dacă $x, y \in \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) - \{0\}$ atunci și $x * y \in \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) - \{0\}$.

2) $(x*y)*z = \operatorname{arc\,tg}\{k \operatorname{tg}[\operatorname{arc\,tg}(k \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y)] \operatorname{tg} z\} = \operatorname{arc\,tg}(k^2 \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z)$,

$x * (y * z) = \operatorname{arc\ tg}\ \{k \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\ [\operatorname{arc\ tg}\ (k \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} z)]\} = \operatorname{arc\ tg}\ (k^2 \operatorname{tg}\ x \cdot \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} z)$.

Deci $(x * y) * z = x * (y * z)$.

3) $x * e = x;\ \operatorname{arc\ tg}\ (k \operatorname{tg} x \operatorname{tg} e) = x;\ k \operatorname{tg} x.\ \operatorname{tg} e = \operatorname{tg} x;$

$$\operatorname{tg} e = \frac{1}{k};\ e = \operatorname{arc\ tg} \frac{1}{k}.$$

Deci elementul unitate este $e = \operatorname{arctg} \frac{1}{k}$.

4) $x * x' = e;\ \operatorname{arc\ tg}\ (k \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} x') = \operatorname{arc\ tg}\ \frac{1}{k}$.

$$k \operatorname{tg} x \operatorname{tg} x' = \frac{1}{k};\ \operatorname{tg} x' = \frac{1}{k^2 \operatorname{tg} x};\ x' = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{k^2 \operatorname{tg} x}.$$

Deci elementul reciproc al elementului x este elementul x' determinat mai sus.

5) Egalitatea $x * y = y * x$ este evidentă.

Deci mulțimea $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right) - \{0\}$ formează un grup comutativ în raport cu operația (VIII).

Analog putem verifica că mulțimea $(0, \pi) - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ formează un grup comutativ în raport cu operația

$$x * y = \operatorname{arc\ tg}\ (k \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y);\ k \in R - \{0\}.$$

O APLICAȚIE A DIVIZIUNII ARMONICE

C. BORȘ și *D. BUTUC*, profesori Piatra Neamț

1. Se știe că fiind date două puncte A, B și un alt punct M coliniar cu ele, există un singur punct N, situat pe aceeași dreaptă, astfel ca:

$$\frac{NA}{NB} = -\frac{MA}{MB} \text{ sau : } (AB; MN) = -1. \qquad (1)$$

Punctele M și N sînt conjugate armonic față de punctele A și B și invers. Construcția dată în manualul de clasa a IX-a, 1964, poate fi expusă sub forma: prin A, M și B se duc dreptele paralele d, d' și d''; fie δ o dreaptă oarecare ce trece prin A. Dacă $M' = \delta \cap d'$; $B' = \delta \cap d''$ și $A' = d \cap BM'$, atunci $N = AB \cap A'B'$ (fig. 1) este *conjugatul armonic* al lui M față de A și B. În construcția efectuată apare o dificultate atunci cînd M este mijlocul segmentului AB. În acest caz rezultă imediat (fig. 2) că $A'B' \cap AB = \Phi$ și deci punctul N nu există. Pentru a nu strica corespondența biunivocă între punctul M și conjugatul său armonic față de A, B convenim să completăm dreapta AB cu un punct la infinit pe care îl numim punctul impropriu al dreptei; el este conjugatul armonic al mijlocului segmentului AB față de A și B [1]).

Ce ne-ar putea sugera construcția din fig. 1? Dreptele d, d', d'' fac parte din același fascicul de drepte al cărui centru a fost aruncat

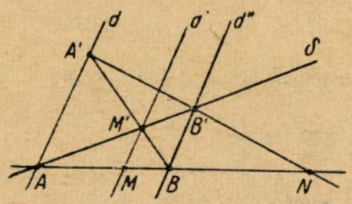


Fig. 1.

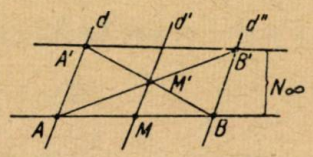


Fig. 2.

la infinit. Ar rămîne valabilă construcția dacă alegem dreptele d, d' și d'' dintr-un fascicul cu centrul în punctul I? (fig. 3). Dreptele AB', BA' și IM fiind concurente, din triunghiul ABI avem:

$$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{B'B}{B'I} \cdot \frac{A'I}{A'A} = -1 \qquad (2)$$

și pentru că A', B' și N sînt pe o transversală, avem și

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{B'B}{B'I} \cdot \frac{A'I}{A'A} = 1. \qquad (2')$$

Din (2) și (2'), prin împărțire, obținem relația (1).

[1]) Unicitatea punctului impropriu decurge din caracterul biunivoc al corespondenței dintre punctele M și N care stă la baza convenției făcute.

Ce am realizat urmărind sugestia dată de construcția din fig. 1? Mai întîi, o construcție simplă a conjugatului armonic și apoi am descoperit o figură care înlocuiește trapezul $ABB'A'$ din fig. 1. Această figură $ABB'A'$ (fig. 3) se numește *patrupunct*, are patru vîrfuri, șase laturi și trei puncte diagonale $M' = AB' \cap A'B$; $N = AB \cap A'B'$; $I = AA' \cap BB'$. Acestea formează *triunghiul diagonal al patrupunctului*. Semnalăm doar una din proprietățile patrupunctului: pe fiecare latură a triunghiului diagonal vîrfurile lui separă armonic punctele în care această latură este intersectată de laturile patrupunctului care trec prin cel de-al treilea vîrf al triunghiului diagonal. Astfel avem $(M'N; I'I'') = -1$ (fig. 3) Dacă punctul N devine punctul impropriu al dreptei AB, patrupunctul devine trapez și punctul M' punctul de intersecție al diagonalelor. Din cele de mai sus rezultă că $M'I' = M'I''$ și am regăsit astfel o proprietate a trapezului.

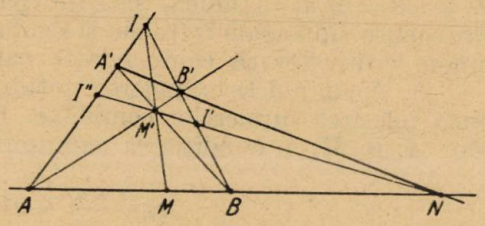


Fig. 3.

2. Problema rezolvată poate conduce și la aspecte mai interesante. Dacă am renunța la condiția de coliniaritate a punctului M față de punctele A și B? Dacă punctele nu sînt coliniare ele determină un cerc (γ) și locul punctelor N așa fel ca $(1')\ \frac{NA}{NB} = \frac{MA}{BM}$ este cercul (γ') care are centrul în mijlocul O al segmentului CD, C și D fiind conjugate armonic față de A, B. Avem, $(\gamma) \cap (\gamma') = \{M; N\}$ (fig. 4), așa fel că avem (1'). Numim punctul N conjugatul armonic în plan al punctului M față de punctele A, B. *Patrupunctul* $ANBM$ se numește *armonic* și acum ar fi interesant să găsim găsim un procedeu de construcție pentru conjugatul armonic în plan. Dacă O este mijlocul lui CD se știe că $OC^2 = OA \cdot OB$ dar $OC = OM$ și deci $OA \cdot OB = OM^2 = ON^2$. Rezultă că AB trece prin punctul de intersecție al tangentelor în M și N la cercul (γ), *polul dreptei*

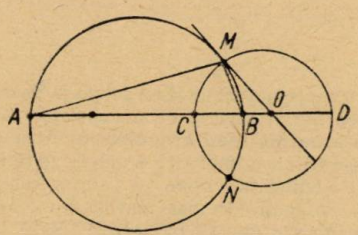


Fig. 4.

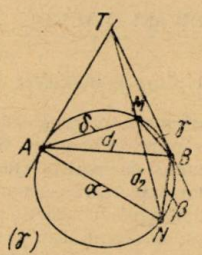


Fig. 5.

MN față de acest cerc; la fel se arată că MN trece prin polul dreptei AB față de (γ).

Rezultă construcția conjugatului armonic N, în plan, al punctului M față de punctele A, B (fig. 5): $N = (\gamma) \cap TM$ în care T este punctul de intersecție a tangentelor în A și B la (γ).

Am ajuns la o specie de patrupuncte înscrise în cerc, patrupunctele armonice. Consemnăm de exemplu, particularizarea teoremei lui *Ptolomeu*. Ce devine această teoremă în cazul *patrupunctului armonic*? Avem, conform teoremei lui *Ptolomeu*, $\alpha\gamma + \beta\delta = d_1 d_2$ şi $\alpha\gamma = \beta\delta$ (1'); rezultă că $\alpha\gamma = \beta\delta = {}^1/_2 d_1\ d_2$, adică, într-un patrupunct armonic produsele laturilor opuse sînt egale între ele şi egale cu semiprodusul diagonalelor. Propunem cititorilor să caute relaţia care caracterizează trapezul armonic.

3. Ajungînd la extinderea noţiunii de armonie în plan, aceasta sugerează folosirea numerelor complexe. Dacă a, b, z şi z' sînt afixele punctelor A, B, M, N condiţia ca patrupunctul $ANBM$ să fie inscriptibil este

$$\arg\frac{z-a}{z-b} - \arg\frac{z'-a}{z'-b} = \pi$$

sau

$$\arg\left(\frac{z-a}{z-b} : \frac{z'-a}{z'-b}\right) = \pi \qquad (3)$$

şi condiţia ca patrupunctul să fie armonic este $\frac{|MA|}{|MB|} = \frac{|NA|}{|NB|}$ sau:

$$\left|\frac{z-a}{z-b}\right| : \left|\frac{z'-a}{z'-b}\right| = |-1|. \qquad (3')$$

Pentru că $\arg(-1) = \pi$, (3) şi (3') arată că

$$\frac{z-a}{z-b} : \frac{z'-a}{z'-b} = 1 \ (4); \quad 2(zz' + ab) = (a+b)(z+z') \qquad (4')$$

deci punctele A, B, M, N sînt vîrfurile unui *patrupunct armonic*. Ajungem la următorul rezultat: relaţia (4') exprimă condiţia de armonie a două perechi de puncte coliniare sau conciclice indiferent dacă numerele a, b, z, z' sînt reale sau complexe.

CALEIDOSCOP MATEMATIC

I. *Discipline matematice uitate*

a) *Algebra ornamentală* este o disciplină matematică al cărei scop era de a stabili ecuaţiile carteziene ale unor curbe sau figuri ornamentale şi invers, de a construi un ornament după ecuaţii convenabil alcătuite. Odată stabilite ecuaţiile unui ornament acestea pot fi transmise cu uşurinţă, iar executarea ornamentului constituind o îmbinare a artei cu ştiinţa. Diversitatea formelor liniilor unui ornament şi lipsa lor de regularitate chiar pe porţiuni mai mici, au impus introducerea unor semne noi, pe lîngă semnele obişnuite în matematică, a unor denumiri proprii şi a unor reguli care au fost cuprinse într-o lucrare de 112 pagini intitulată „L'Algèbre ornamentale", apărută acum un sfert de veac în Franţa.

Deşi privită cu interes de către matematicieni de seamă ca J. Hadamard, E. Cartan şi A. Lambert şi apreciată ca fiind deopotrivă utilă atît arhitecţilor cît şi inginerilor sau matematicienilor, algebra ornamentală nu s-a dezvoltat mai mult.

b) *Trigonometria pătratică* este o disciplină matematică în care, spre deosebire de trigonometria obişnuită, sau circulară, funcţiile trigonometrice ale unui unghi ascuţit se definesc în alt mod şi se generalizează înlocuind cercul trigonometric cu un pătrat.

Unele relaţii între funcţiile trigonometrice astfel definite sînt mai simple. Astfel, definind sinusul pătratic al unui unghi ascuţit x (sp x) ca raportul dintre cateta opusă acelui unghi şi

suma catetelor triunghiului dreptunghic care conține acel unghi, iar cosinusul pătratic al unghiului x (cp x) ca raportul dintre cateta alăturată acelui unghi și suma catetelor, se obține formula fundamentală :

$$\text{sp } x + \text{cp } x = 1$$

Elaborată de către *Valeriu Alaci*, fost profesor la Școala Politehnică din Timișoara, trigonometria pătratică a apărut în anul 1941 într-o lucrare de 272 pagini și a fost premiată de Academia Română. Și această disciplină a rămas nefolosită.

II. *Curiozități ale numerelor*

Se consideră curios faptul că :

$$1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,7\,6\,5\,4\,3\,2\,1 = 1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1^2 =$$
$$= 11 \times 11223344332211 = 11x11x10203040302010 = 11 \times 11 \times 101 \times$$
$$\times\ 10102020101 = 11^2 \times 111 \times 101 \times 100020001 = 11^2 \times 102^2 \times 10001^2$$

sau că :

$$\begin{aligned} 1 &= 1^2 \\ 121 &= 11^2 \\ 12321 &= 111^2 \\ 1234321 &= 1111^2 \\ 123454321 &= 11111^2 \\ 12345654321 &= 111111^2 \\ 1234567654321 &= 1111111^2 \\ 123456787654321 &= 11111111^2 \\ 12345678987654321 &= 111111111^2 \end{aligned}$$

Aceste diferite forme oarecum interesante, sub care pot fi scrise unele numere, ele însile interesante prin ordinea de succesiune sau de așezare simetrică a cifrelor lor, nu reflectă vreo însușire a lor „misterioasă", ci exprimă doar consecințe a căror origine trebuie căutată în sistemul zecimal de numerație în care sînt scrise. Folosind alte sisteme de numerație pot fi descoperite încă numeroase alte „curiozități" asemănătoare. Astfel scriind numerele în sistemul de numerație cu baza 5, avem :

$$\begin{aligned} 4 \times 0 + 3 &= 3 \\ 4 \times 4 + 2 &= 33 \\ 43 \times 4 + 1 &= 333 \\ 432 \times 4 + 0 &= 3333 \end{aligned}$$

iar în sistemul de numerație cu baza 7 se obține de asemenea

$$\begin{aligned} 6 \times 0 + 5 &= 5 \qquad & 25 \times 3 &= 111 \\ 6 \times 6 + 4 &= 55 \qquad & 25 \times 6 &= 222 \\ 65 \times 6 + 3 &= 555 \qquad & 25 \times 12 &= 333 \end{aligned}$$

și încă :

$$\begin{aligned} 654 \times 6 + 2 &= 5555 \qquad & 25 \times 15 &= 444 \\ 6543 \times 6 + 1 &= 55555 \qquad & 25 \times 21 &= 555 \\ 65432 \times 6 + 0 &= 555555 \qquad & 25 \times 24 &= 666 \end{aligned}$$

unde numerele de la înmulțitor din coloana ultimă sînt în progresie aritmetică cu rația 3.

În sistemul de numerație cu baza 2, în care se folosesc pentru scrierea numerelor doar două semne, cifrele 1 și 0, în mod frecvent numerele sau operațiile cu ele vor conține o anumită succesiune sau simetrie a cifrelor, iar aspectul de neobișnuit va dispare. Unele proprietăți ale numerelor scrise într-o anumită bază nu se mai păstrează atunci cînd ele sînt scrise în altă bază și mai puține sînt acele proprietăți care rămîn valabile oricare ar fi baza în care ele sînt scrise.

Astfel, considerînd ca bază a sistemului un număr impar, criteriul de divizibilitate cu 2 nu mai depinde de faptul că ultima cifră este zero sau o cifră cu soț, iar pătratul numărului 12 este 144 oricare ar fi baza $b > 5$.

Proprietăți interesante ale numerelor se pot obține prin studiul lor aprofundat. Fie de exemplu problema :

Să se determine numerele N_n (n fiind numărul de cifre) astfel că N_n^2 să aibă 2n cifre, iar $(N_n + \underbrace{11\ldots\ldots1}_{n})^2$ să fie egal cu $N_n^2 + \underbrace{11\ldots\ldots1}_{2n}$.

Din condițiile problemei rezultă :

$$N_n^2 + \underbrace{22\ldots.2}_{n} \cdot N_n + \underbrace{11\ldots.1}_{n}{}^2 = N_n^2 + \underbrace{11\ldots.1}_{2n} \text{ sau :}$$

$$\underbrace{22\ldots.2}_{n} \cdot N_n = \underbrace{11\ldots.1}_{n} \cdot 10^n + \underbrace{11\ldots.1}_{n} - \underbrace{11\ldots.1}_{n}{}^2$$

$$22\ldots.2 \cdot N_n = 11\ldots.1\,(10^n + 1 - 11\ldots1)$$

$$2\,N_n = 100\ldots.01 - 11\ldots.1$$

$$2N_n = 88\ldots.890$$

$$N_n = 44\ldots.45$$

În particular : $5^2 = 25$ și $45^2 = 2025$

$6^2 = 36$ și $56^2 = 3136$

și de aici rezultă și proprietatea interesantă a acestor două numere (5 și 45) că dacă se mărește fiecare cifră cu o unitate, pătratul numărului obținut se află mărind cu cîte o unitate fiecare cifră a pătratului numărului inițial și deci această particularitate numerică nu conține nici un „mister".

Denumiri ca : numere perfecte, numere imperfecte, numere amice, numere inamice, numere misterioase, numere magice, pătrate magice, etc., nu justifică cîtuși de puțin vreo legătură între proprietățile lor matematice și unele semnificații de natură idealistă pe care s-ar părea că vor să le exprime.

Studiul aprofundat al propozițiilor matematice ne dezvăluie din ce în ce mai mult legătura acestora cu realitatea obiectivă din care își au izvorul și face să dispară acele reminiscențe de interpretare, fie ele și numai în denumirea lor.

Gheorghe Pîslaru, profesor Bacău

PROBLEME REZOLVATE

Problema 7218

Să se arate că elementele unui triunghi oarecare ABC verifică inegalitatea :

$$128\,R\,(a\sin A + b\sin B + c\sin C)\cos^3\frac{A}{2}\cos^3\frac{B}{2}\cos^3\frac{C}{2} < 9\,(a^2 \sin A +$$

$$+ b^2\sin B + c^2\sin C)\,(1 + \cos A\cos B\cos C).$$

Laura Constantinescu, Sibiu

Soluție. Într-un triunghi oarecare ABC sînt cunoscute relațiile :

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \frac{1}{4}\,(\sin A + \sin B + \sin C),$$

$$1 + \cos A\cos B\cos C = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C,$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

de unde :

$$\sin A = \frac{a}{2R}\ ;\ \sin B = \frac{b}{2R}\ ;\ \sin C = \frac{c}{2R}\ .$$

Înlocuind în relația de demonstrat, obținem:

$$128\,R\,\frac{a^2+b^2+c^2}{2R}\,\frac{1}{64}\,\frac{(a+b+c)}{8R^3}<9\cdot\frac{a^3+b^3+c^3}{2R}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{4R^2}$$

Simplificînd cu factorul pozitiv $\frac{a^2+b^2+c^2}{8R^3}$, se obține:

$$(a+b+c)^3<9\,(a^3+b^3+c^3),$$

inegalitate cunoscută pentru a, b, c, numere pozitive.

Într-adevăr,

$$a^3+b^3=(a+b)\,(a^2+b^2-ab).$$

Dar, $a^2+b^2>2ab$, deci

$$a^3+b^3>ab\,(a+b).$$

Analog,

$$b^3+c^3>bc\,(b+c);\quad c^3+a^3>ac\,(a+c).$$

Adunînd aceste inegalități și adunînd apoi ambilor membri $a^3+b^3+c^3$ obținem:

$$3\,(a^3+b^3+c^3)>(a+b+c)\;\;(a^2+b^2+c^2)$$

Dar, $a^2+b^2+c^2>ab+bc+ca$, deci inegalitatea precedentă devine:

$3\,(a^3+b^3+c^3)>(a+b+c)\,(ab+bc+ca)$ sau $6\,(a^3+b^3+c^3)>$

$$>2\,(a+b+c)\,(ab+bc+ca).$$

Adunînd cu $3\,(a^3+b^3+c^3)>(a+b+c)\,(a^2+b^2+c^2)$ obținem:

$9\,(a^3+b^3+c^3)>(a+b+c)\;\;(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac)$ sau

$$9\,(a^3+b^3+c^3)>(a+b+c)^3.$$

Problema 7220

Pe axele Ox, Oy ale sistemului rectangular xOy se consideră punctele A, respectiv B, variabile, astfel încît $OB-OA=k$. Notăm cu M mijlocul segmentului AB. Pe paralela dusă prin M la a doua bisectoare luăm punctul N astfel ca $ON=MN$. Să se afle locul geometric al punctului N.

Ilie Stănescu, Sibiu

Soluție dată de *Botez Dan*, elev București. — Fie $A\,(\lambda,\,0)$, $B(0,\,\beta)$ și $\beta-\lambda=k$; Coordonatele lui M sînt $x=\frac{\lambda}{2}$ și $y=\frac{k+\lambda}{2}$. Eliminăm pe λ între x și y și obținem $y=x+\frac{k}{2}$ locul geometric al punctului M, care este o paralelă la prima bisectoare a sistemului de axe. Inseamnă că MN este tocmai distanța punctului N la dreapta $y=x+\frac{k}{2}$.

Din $ON = MN$ rezultă că N este egal depărtat de origine şi o dreaptă fixă. Locul lui N este o parabolă. Directoarea parabolei e dreapta $y = x + \frac{k}{2}$, focarul este originea, iar axa de simetrie este a doua bisectoare a sistemului de axe.

Parabola se află de o parte sau de alta a dreptei $y = x + \frac{k}{2}$ după cum k este pozitiv sau negativ.

Dacă avem $k = 0$ locul geometric nu mai este posibil decît cînd $A \equiv B \equiv O \equiv M \equiv N$ şi este originea sistemului de axe.

Problema 7223

Să se deducă inegalitatea :

$$\frac{p-a}{c} \cdot \operatorname{ctg}\frac{C}{2} + \frac{p-c}{b} \cdot \operatorname{ctg}\frac{B}{2} + \frac{p-b}{a} \cdot \operatorname{ctg}\frac{A}{2} > \frac{\pi}{4}$$

notaţiile fiind cele obişnuite într-un triunghi

Lașiță Ileana, elevă Sibiu

Soluţie dată de *I. Căpăţînă*, elev Hunedoara. Aplicăm teorema lui *Lagrange* sau teorema creşterilor finite, funcţiei $f(x) = \sin\frac{x}{2}$ pe intervalul $(A-B\,;\ A+B)$ şi obţinem :

$$\frac{\sin\frac{A+B}{2} - \sin\frac{A-B}{2}}{\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}} = f'(\alpha) \text{ unde } A - B < \alpha < A + B$$

Dar, $f'(\alpha) = \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ şi $\cos\frac{A-B}{2} > \cos\frac{\alpha}{2} > \cos\frac{A+B}{2}$

şi deci avem :

$$\frac{\sin\frac{A+B}{2} - \sin\frac{A-B}{2}}{\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}} > \frac{1}{2}\cos\frac{A+B}{2}\,;\quad \frac{\sin\frac{A+B}{2} - \sin\frac{A-B}{2}}{B} > \frac{1}{2}\cos\frac{A+B}{2}\,.$$

$$\frac{\sin\frac{A+B}{2} - \sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}} > \frac{B}{2}\,;\ \operatorname{tg}\frac{A+B}{2}\left(1 - \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}\right) > \frac{B}{2}\,.$$

Dar $\operatorname{tg}\frac{A+B}{2} = \operatorname{ctg}\frac{C}{2}$ şi, din relaţia lui Mollweide, $\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}} = \frac{a-b}{c}$.

Problema 7224

Fie MN o dreaptă variabilă paralelă cu baza BC a unui triunghi ABC (M pe AB și N pe AC).

Să se arate că locul geometric al punctului P de intersecție al cercurilor ABN și AMC este simediana din A a triunghiului ABC.

Vasile Vasu, Sibiu

Soluție dată de *I. Chițescu*, elev București,

Transformăm figura printr-o inversiune de pol A, putere oarecare, sau mai simplu să luăm puterea

$$K = AB \cdot AC$$

(figura iese mai clar așa).

Inversele lui B și C vor fi B' și C' iar :

$$AB' = AC.$$

$$AC' = AB,$$

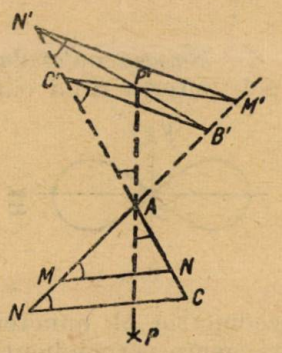


Fig. 1.

Notăm cu M', N' inversele lui M și N

Conform proprietăților inversiunii, dreapta $B'C'$ e antiparalelă cu BC, dreapta $M'N'$ e antiparalelă cu MN față de laturile unghiului A. ceea ce se poate verifica și direct).

Deci $M'N' \parallel B'C'$ deoarece $BC \parallel MN$.

Cercurile ABN și AMC se transformă în dreptele $B'N'$ și $M'C'$. Aceste drepte se taie în P', inversul lui P.

Aflăm locul lui P' : avem triunghiul fix $AB'C'$ și o dreaptă variabilă $M'N'$ paralelă cu baza $B'C'$. Locul punctului de intersecție al dreptelor $M'C'$ și $N'B'$ este mediana triunghiului $AB'C'$, dusă din vîrful A. (Se știe din geometria de clasa a IX-a). Se stabilește ușor și direct, folosind proprietatea învățată în această geometrie că dacă în trapezul $B'C'N'M'$ se duce prin punctul P' de întîlnire al diagonalelor o paralelă la baze mijlocul acestei paralele este punctul P'.

Dreapta AP' trece prin pol. Inversa ei, este ea însăși.

Deci locul punctului P este această dreaptă. Să arătăm, că ea este simediana triunghiului ABC.

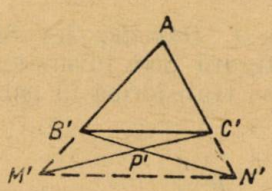


Fig. 2.

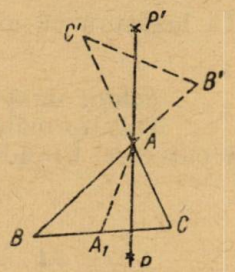


Fig. 3.

Notăm AA_1 mediana triunghiului ABC și avem :

$\sphericalangle PAC = \sphericalangle P'AC'$ (opuse la vîrf)

$\sphericalangle P'AC' = \sphericalangle BAA_1$

Deci $\sphericalangle PAC = \sphericalangle BAA_1$ Rezultă că AP este simediană.

Problema 7225

Fie O centrul de simetrie al lemniscatei lui Bernoulli. Considerăm două cercuri ortogonale, ambele trecînd prin O, ambele tangente lemniscatei. Există o infinitate de asemenea perechi de cercuri. Să se găsească locul geometric al punctului de intersecţie al acestei perechi de cercuri, cînd ele variază. În legătură cu articolul din G.MOB. 10/1965.

Vasile Vasu, Sibiu

Soluţia autorului. Transformăm figura prin inversiune; luăm *0* ca pol, puterea fiind oarecare. Lemniscata se transformă în hiperbolă echilateră. Cele două cercuri ortogonale ce trec prin pol se transformă în două drepte perpendiculare. Cercurile fiind tangente lemniscatei, dreptele vor fi tangente hiperbolei.

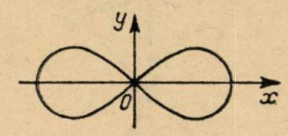


Fig. 1.

Rămîne de găsit locul geometric al punctului de intersecţie a două tangeute perpendiculare una pe alta, duse la hiperbolă sau altfel spus: locul geometric al punctelor de unde se pot duce la hiperbola echilateră tangente perpendiculare una pe alta. Se ştie că acest loc este un cerc cu centrul în *O*. Revenind, se poate afirma că locul geometric căutat este un cerc cu centrul în punctul *O*.

Problema 7226

Pe cisoida cu vîrful în punctul O, avînd ca axă de simetrie dreapta Ox, se consideră un punct variabil M. Construim două cercuri, ambele trecînd prin punctele O şi M, unul cu centrul pe axa Ox, altul cu centrul pe tangenta dusă în punctul M la cisoidă. Cele două cercuri mai taie axa Ox în punctele P şi Q. Să se arate că:

$$\frac{1}{OQ} - \frac{1}{OP} = \text{const.}$$

În legătură cu articolul din G.—MB nr. 10/1965.

V. Vasu

Soluţie dată de *I. Dăncilă*, elev Sibiu

Transformăm figura prin inversiune, luînd *O* ca pol, puterea fiind *k* oarecare. Cisoida se transformă în parabolă, punctul *M* în *M'*. Cercul

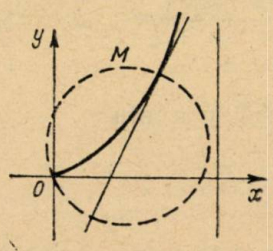


Fig. 1.

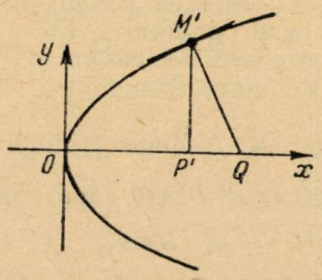


Fig. 2.

trecînd prin O și M cu centrul pe Ox se transformă în dreapta trecînd prin M', perpendiculară pe Ox. Această dreaptă taie axa Ox în P', inversul lui P. Al doilea cerc, trecînd prin O și M și avînd centrul pe tangenta la cisoidă în punctul M (fig. 2) este ortogonal față de această tangentă și deci și față de cisoidă, în punctul M.

Prin inversiune se transformă într-o dreaptă ce trece prin M', perpendiculară pe parabolă în M', adică, normală la parabolă.

Remarcăm că $P'Q'$ este subnormala la parabolă. Se știe însă, că $P'Q' = \text{const}$. Dar, $OP \cdot OP' = k$. $OQ \cdot OQ' = k$, deci

$$\frac{1}{OQ} - \frac{1}{OP} = \frac{OQ'}{k} - \frac{OP'}{k} = \frac{OQ' - OP'}{k} = \frac{Q'P'}{k} = \text{const.}$$

Problema E : 2344

Un pionier vrea să determine aria unui teren dreptunghiular măsurînd cu pasul laturile sale. Cînd socotește că pasul lui are 80 cm, găsește că aria este cu 180 m² mai mare decît atunci cînd are 70 cm. Dacă pe una din laturi ar fi făcut cu 20 de pași mai puțin diferența care ar fi apărut în socotelile sale ar fi fost doar de 90 m². Să se afle cîți pași ar fi făcut dacă ar fi dorit să măsoare diagonala dreptunghiului.

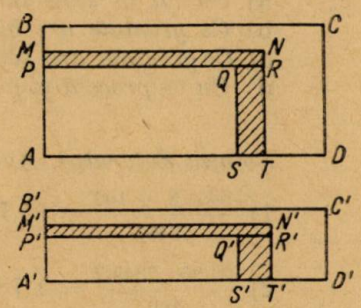
Dan Brînzei, Iași

Soluție. Fie $ABCD$ planul terenului. unde AB, AD sînt măsurate luînd ca unitate de măsură pasul pionierului.

Măsurînd în metri dreptunghiul $ABCD$ apare ca $AMNT$ cînd pasul are 0,8 m și $APQS$ cînd pasul are 0,7 m.

Diferența de 180 m² exprimă în acest caz tocmai aria porțiunii haşurate.

Mergînd cu 20 de pași mai puțin planul terenului ar fi fost $A'B'C'D'$. Se constată imediat că $\frac{AB}{A'B'} = \frac{A_{MNTSQP}}{A_{M'N'T'S'Q'P'}} = \frac{180}{90}$, deoarece $MN = M'N'$, $ST = S'T'$ și $MP : AB = M'P' : A'B'$. Constatăm prin urmare că AB trebuie să fie dublul lui $A'B'$ și cum ele diferă doar prin 20 (de pași) deducem $AB = 40$ (de pași). Se constată apoi că $AM = 40.0{,}8 = 32$ m, $AP = 40 \cdot 0{,}7 = 28$ m. Observînd că $MP = 4$ m diferența $MNTSQP$ apare ca : $4AT + 28.ST = 180$. Dar ST reprezintă 0,1 din AD în timp ce BT reprezintă 0,8 din AD. Deducem



$(3{,}2 + 2{,}8)\ AD = 180$ sau $6.AD = 180$ de unde $AD = 30$ (măsurat în pași).

Prin urmare o latură are 30 de pași, alta 40 de pași. Aplicînd teorema lui Pitagora, diagonala va avea 50 de pași.

Problema E : 2358

Pe un șantier de construcții lucrează un număr de muncitori, iar pe al doilea șantier, un alt număr de muncitori. Raportul dintre numărul de muncitori de pe cele două șantiere este de 4 :3. Dacă s-ar trece 6 muncitori

de pe primul șantier pe al doilea, raportul dintre numărul de muncitori de pe primul șantier față de al doilea, ar fi $3 : 2\frac{1}{2}$. *Să se afle cîți muncitori lucrează pe fiecare șantier?*

D. Mîrzan, R. Vîlcea

Soluție. Notăm cu $x = \frac{1}{4}$ din numărul de muncitori de pe primul șantier, sau $x = \frac{1}{3}$ din numărul de muncitori de pe al doilea șantier.

Formăm ecuația $\frac{4x-6}{3x+6} = \frac{3}{2\frac{1}{2}}$. Amplificăm partea a doua a ecuației cu 2 și obținem $\frac{4x-6}{3x-6} = \frac{6}{5}$.

$5(4x - 6) = 6(3x + 6)$, de unde rezultă:

$20x - 30 = 18x + 36$; $2x = 66$ și $x = 33$

Deci pe primul șantier lucrează $33 \cdot 4 = 132$ muncitori, iar pe al doilea $33 \cdot 3 = 99$ muncitori.

Problema E : 2361

La unul din izvoarele cu apă minerală din Tușnad, cantitatea de elemente mineralizate este de 7345,7 mg. la un kg. de apă. Radicalul bicarbonic care intră aci, are o greutate de 3951,3 mg, iar bioxidul de carbon contribuie cu 24,26 % din întreaga cantitate de materie mineralizată.

Raportul dintre greutatea sodiului și aceea a bioxidului de carbon este $\frac{5}{22}$.

a) *Cu cît la sută intră radicalul bicarbonic?*
b) *Ce greutate are bioxidul de carbon?*
c) *Ce greutate are sodiul?*
d) *Cu ce procent și cu ce greutate intră celelalte elemente* :

Corneliu Georgescu, Craiova

Soluția autorului. Avem

1) $\frac{3951,3 \times 100}{7345,7} = 53,79\,\%$ aproximativ.

2) $\frac{24,26 \times 7345,7}{100} = 1\,782$ mg.

3) Notînd cu s greutatea sodiului, avem:

$\frac{s}{1782} = \frac{5}{22}$, $s = 405$ mg.

4) $7345,7 - (3951,3 + 1782 + 405) = 1207,4$ mg.

$\frac{1208,4}{7345,7} = \frac{x}{100}$, $x = 16,44\,\%$.

Problema E : 2362

Se dă triunghiul echilateral ABC și un punct M pe latura BC. Din M se duce perpendiculara MP pe AC, care întîlnește prelungirea laturii AB în D.

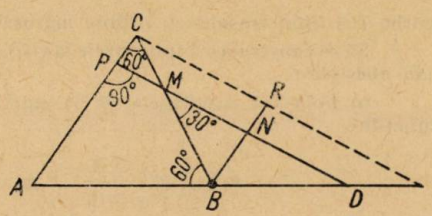
Să se arate că : a) $MB = BD$, b) $AB = 2(CP + BN)$, *N fiind mijlocul lui MD.*

c) *Să se găsească locul geometric al lui N, cînd M se mișcă pe BC, rămînînd în interiorul acestei laturi.*

Corneliu Georgescu, Craiova

Soluție. — a) Unghiurile din M și D ale triunghiului BMD sînt egale, avînd cîte 30° fiecare ; rezultă $BM = MD$.

b) În triunghiul dreptunghi CMP, cu unghiul din M de 30°, $MC = 2CP$; în triunghiul dreptunghi BMN, la fel, găsim că $BM = 2BN$, deci $MC + BM = BC = AB = 2\ (CP + BN)$



c) Triunghiul BDM fiind isoscel, mijlocul bazei este piciorul bisectoarei unghiului B care are 120° și are o poziție fixă. Locul lui N este pe această bisectoare, care este paralelă cu AC, limitat la segmentul $BR = \frac{AC}{2}$.

CHESTIUNI DE EXAMEN

7626 a) Să se studieze variația funcției $y = 4 \sin^2 x \cos x$. Să se traseze în raport cu un reper ortonormat, curba (C) care reprezintă grafic această funcție pentru $-\pi \leqslant x \leqslant +\pi$.

Să se traseze în raport cu același reper, curba (C_1) care reprezintă, în același interval de variație a lui x, funcția

$$y_1 = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

Să se determine prin coordonatele lor, punctele comune lui (C) și (C_1).

b) Să se găsească o primitivă a fiecăreia din funcțiile y și y_1.

Aplicație la calculul ariei domeniului cuprins între curbele (C) și (C_1) și limitat de dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = \frac{\pi}{2}$.

Subiect-tip de bacalaureat Franța, 1964

7627. Știind că paralaxa orizontală a Soarelui este $8'\frac{8}{10}$ și că diametrul aparent al Soarelui este 32′, să se calculeze :

a) Distanța de la Pămînt la Soare, exprimată în km ;

b) Raza Soarelui, exprimată luînd ca unitate raza Pămîntului) ;

Pentru aceste calcule s-ar putea folosi faptul că unghiurile date sînt „unghiuri mici".

Subiect-tip de bacalaureat, Franța 1964

7628. În planul raportat la un reper ortonormat $x'Ox$, $y'Oy$, se consideră un mobil M ale cărui coordonate sînt definite în funcție de timpul t, de formulele următoare : $x = e^t$, $y = \ln t$, în care e este baza logaritmului neperian și t este presupus pozitiv.

a) Să se determine ecuația carteziană a traiectoriei (Γ) a mobilului M și cea a hodografului (H) a mișcării sale. Să se construiască două curbe raportate unui același sistem de axe.

Să se calculeze în funcție de t, componentele scalare ale vectorului accelerație a lui M.

Subiect-tip de bacalaureat, Franța 1694

7629. a) Să se studieze variația funcției

$$u_1 = \frac{x-1}{x+1},$$

Să se construiască curba (C_1) reprezentînd această variație. Să se traseze pe același grafic, curbele (C_2) și (C) reprezentînd respectiv variațiile funcțiilor

$$u_2 = \frac{1-x}{1+x} \quad \text{și} \quad u = \left| \frac{x-1}{x+1} \right|,$$

curba (C) fiind trasată cu o linie îngroșată.

Să se construiască tangentele la (C_1), (C_2) și (C) în punctele comune ale acestor curbe cu axa abcsiselor.

b) Folosind rezultatele de la punctul precedent, să se studieze variația fiecăreia din funcțiile :

$$y_1 = \log \frac{x-1}{x+1}, \qquad y_2 = \log \frac{1-x}{1+x}, \qquad y = \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$$

Să se construiască pe un al doilea grafic curbele (Γ_1), (Γ_2), (Γ) reprezentînd respectiv aceste variații. Să se arate că aceste curbe admit un centru de simetrie.

c) Să se studieze variația funcției

$$(\Gamma')z = \frac{1-e^x}{1+e^x}.$$

Să se precizeze care sînt limitele lui z cînd x tinde către $+\infty$ sau către $-\infty$. Să se exprime x în funcție de z. Să se deducă de aci, că curba (Γ') este simetriea curbei (Γ_2) în raport cu prima bisectoare a axelor de coordonate. Să se traseze curba (Γ') pe graficul de la punctul *b*).

Bacalaureat, Franța, 1964

7630. 1° Un skior de masă $m = 80$ kg este tras cu viteză constantă, de un cablu, în lungul pantei rectilinii AB, înclinată cu 30° pe orizontală. Forța de frecare este de 200 newtoni. Să se calculeze tensiunea cablului.

2° Din punctul B el alunecă fără viteză inițială, numai sub acțiunea propriei sale greutăți, în lungul pistei rectilinii BC, înclinată cu 30° pe orizontală. Știind că viteza skiorului la sosirea în C este de 20 m/s : a) să se studieze mișcarea sa pe BC ; b) să se calculeze lungimea BC.

3° El abordează apoi cu această viteză de 20 m/s o placă orizontală de gheață CD, fără frecare. Care este mișcarea sa pe CD?

4° Acest skior sare o faleză verticală DE înaltă de 5 m. Să se calculeze EF, distanța orizontală între piciorul E al falezei și punctul de cădere F al skiorului pe sol. Se dă $g = 10$ m/s^2.

Bacalaureat, Réunion, iunie 1965

7631. Tokio și Los Angeles sînt respectiv, pe fusele orare numărul 9 și 16.

a) Să se explice înțelesul propoziției precedente.

b) Să se determine ora și data corespunzătoare fiecăreia din aceste localități atunci cînd la Greenwich este : 1° ora 3 la 4 iulie și 2° ora 20 la 4 iulie.

Bacalaureat, Franța, 1964

7632. a) Să se determine cît mai simplu posibil resturile împărțirii cu 7 a primelor șapte puteri ale lui 5 :

$$5,\ 5^2,\ 5^3,\ldots,5^7.$$

b) Să se deducă de aci determinarea întregilor naturali n pentru care împărțirea numărului 19^n prin 7 să dea restul 2.

c) Să se calculeze restul împărțirii numărului 19^{22} prin 7.

Bacalaureat, Franța, 1964

7633. Se consideră un tetraedru $ABCD$. Notăm cu A', B', C', D' respectiv, punctele de intretăiere ale medianelor fețelor BCD, CDA, DAB, ABC. Să se arate că :

a) Dreptele AA', BB', CC' sînt concurente într-un punct G, care împarte segmentele AA', BB', CC', DD' în raportul 1/3.

b) Dreptele care unesc mijloacele muchiilor opuse sînt concurente în același punct G, care împarte segmentele determinate de mijloacele muchiilor opuse în raportul 1/2.

c) Să se arate că prin vîrfurile tetraedrului se pot duce 4 plane paralele și echidistante. Cîte soluții are problema?

La facultatea de matematică-mecanică, București 196ç.

7634. — Pe parabola $y^2 = 2px$ se iau n puncte $M_1, M_2, \ldots, M_n$ ale căror proiecții pe tangenta la vîrf formează un șir de puncte avînd ordonatele în progresie aritmetică. Să se arate că :

a) Dacă $n = 2s$, coardele M_1M_n, $M_2M_{n-1}, \ldots, M_sM_s + 1$ sînt paralele.

b) Dacă $n = 2s + 1$, coardele M_1M_n, $M_2M_{n-1}, \ldots, M_sM_{s+1}$ sînt paralele cu tangenta în M_{s+1} la parabolă.

La facultatea de matematică-mecanică, București, 1965.

7635. Pe diagonala BD a patratului $ABCD$ se consideră punctul M variabil. Perpendiculara în M pe AM, taie latura CD în punctul E. Să se arate că :

a) $AM = ME$. b) Cercurile care trec prin D, A, M respectiv B, A, M au raze egale. c) Cercurile de la punctul precedent sînt ortogonale. d) Perpendiculara din B pe tangenta în A la cercul care trece prin A, M, E, taie dreapta AM în N. Să se determine locul punctului N cînd M variază.

La facultatea de matematică-mecanică, București, 1965.

PROBLEME PROPUSE *

7636. Să se descompună în factori expresia :

$$E = (y - z)^3 (y + z - x)^3 + (z - x)^3 (z + x - y)^3 + (x - y)^3 (x + y - z)^3$$

Eliza Vasiliu, profesoară Bacău

7637. Într-un triunghi oarecare ABC se duc bisectoarele interioare BB' și CC'. De asemenea bisectoarele exterioare ce trec prin vîrfurile B și C se intersectează în punctul O. Din vîrful A se duc perpendiculare pe aceste patru bisectoare.

a) Să se demonstreze că picioarele perpendicularelor sînt coliniare.

b) Dacă P și R sînt picioarele perpendicularelor pe bisectoarele interioare, să searate că între segmentele AP, AR, BO și CO avem relația :

$$AR \cdot BO = AP \cdot CO.$$

c) D fiind punctul în care bisectoarea CC' intersectează bisectoarea exterioară a unghiului B iar I punctul de intersecție al bisectoarelor interioare, să se deducă relația :

$$\frac{2}{CC'} = \frac{1}{CI} + \frac{1}{CD}.$$

Paraschiva Magăr, profesoară Bacău

* IX (7636—7638); X (7639 — 7647); XI (7648 — 7658) S; (7659—7663). Soluțiile se primesc pînă la 15 octombrie 1966. Problemeld pentru clasa a IX-a sînt indicate și pentru elevii școlilor profesionale și pedagogice.

7638. În triunghiul dreptunghic ABC, bisectoarea unghiului drept intersectează bisectoarele interioară și exterioară ale unghiului B în punctele E și D. Să se arate că pentru unghiul $B = 30°$ aria ABC este jumătate din aria BDE.

V. Castravete, profesor Bacău

7639. Muchiile ce pornesc din același vîrf la un paralelipiped oblic, fac între ele unghiuri de 60°. Lungimile lor fiind a, b, c, să se calculeze volumul paralelipipedului.

Eliza Vasiliu, profesoară Bacău

7640. Să se determine valoarea parametrului $a \neq 0$, -1 și să se rezolve ecuația $ax^4 + (a+1)\,x^3 - 19x^2 - 15x + 45 = 0$, cunoscînd că două dintre rădăcinile ei satisfac relația $a(x_1 + x_2 + 1) + 1 = 0$.

C. Săndulache, Podu Turcului, reg. Bacău

7641. Într-un triunghi ABC bisectoarea interioară unghiului B intersectează bisectoarele interioară și exterioară unghiului A în punctele M și N, iar bisectoarea exterioară unghiului B intersectează aceleași bisectoare ale unghiului A în punctele D și E.

Să se determine valoarea unghiului B pentru care ariile MNA și ADE sînt egale.

Viorel Castravete profesor Bacău

7642. Să se demonstreze identitatea:

$$\frac{\cos(a+b+c)+\cos(a+b-c)}{\cos(a-b+c)+\cos(-a+b+c)} + \frac{\sin(a+b+c)+\sin(a+b-c)}{\sin(a-b+c)-\sin(-a+b+c)} = \frac{2\sin 2a}{\sin 2(a-b)}$$

7643. Se dă ecuația

$$x^3 - 3(m+2)\,x^2 + (2m^2 + 12m + 1)\,x - m^3 - 6m^2 - 11m - 6 = 0,$$

unde m este un parametru.

a) Să se rezolve știind că rădăcinile sînt în progresie aritmetică;

b) Dacă între rădăcini există relația:

$$\frac{\dfrac{1}{x_3}-\dfrac{1}{x_2}}{\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_3}} = \frac{3}{5}\,\frac{\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}}{\dfrac{1}{x_2x_3}+\dfrac{1}{x_1x_2}},$$

să se determine m.

Traian Prodea, profesor Bacău

7644. Să se rezolve ecuațiile :

a) $\frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}5x}{\operatorname{tg}x} = 8\sin^2 2x - 6$;

b) $\frac{\sin 5x - 5\sin 3x}{\cos 5x + 5\cos 3x} = \operatorname{tg}x$;

Traian Prodea, profesor Bacău

7645 Într-o sferă de rază $R = 3{,}5$ k, cm se înscrie paralelipipedul dreptunghic $ABCDA_1B_1C_1D_1$ cu muchiile $AD = a$; $AB = b$ și $AA_1 = 2b$. Diagonala BD_1 face cu muchia BC unghiul $CBD_1 = \varphi$. Să se determine volumul V al paralelipipedului în funcție de k și φ.

Pentru ce valoare a lui φ avem $V = 36$ k^3

C. Săndulache, Bacău

7646. Să se demonstreze că dacă mediana AA' a triunghiului ABC este egală cu latura BC, atunci :

a) unghiul A este ascuțit,

b) $4\sin B \sin C \cos A = 3\sin^2 A$.

Gheorghe Pîslaru, Bacău

7647. Să se arate că între elementele unui triunghi oarecare există relația :

$$\sum \frac{l_a}{l'_a} \cdot \frac{1 + \cos(B - C)}{\sin(B - C)} = 3$$

unde prin l_a și l'_a am notat respectiv bisectoarea interioară și cea exterioară ale unghiului A.

P. Arcip, absolvent, Trușești

7648. Un șir $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ este definit astfel : $x_0 = a$, $x_1 = b$ iar pentru orice $n > 0$ $x_{n+1} = \frac{x_{n-1} + kx_n}{1 + k}$ $(k > 0)$. Se cere :

a) să se găsească termenul general al șirului în funcție de a și b și să se calculeze și limita lui ;

b) să se deducă și limita șirului

$$x'_0, x'_1, x'_2, \ldots, x'_n,$$

în care $x'_0 = a$, $x'_1 = b$, iar pentru orice $n > 0$, $x'_{n+1} = \frac{x'_n + kx'_{n-1}}{1 + k}$

c) Caz particular : $k = 1$.

Aurel Panaite, Roman

7649. Fie AB un diametru fix al unui cerc oarecare O, și M un punct variabil situat pe același cerc. Se notează cu N și P mijloacele coardelor AM și BM.

Să se determine locurile descrise de centrele de greutate G_1 și G_2 ale triunghiurilor MAP și MBN.

C. Săndulache, prof. Podul Turcului, Bacău

7650. *Să se calculeze* limita funcției

$$f(x) = \sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4} + \sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4} + \sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4} + \ldots}}}$$

cînd $x \to \frac{\pi}{3}$

Traian Prodea, profesor Bacău

7651. Se consideră o elipsă raportată la un sistem de axe ortogonale xoy, de ecuații parametrice

$$x = a\frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad y = b\frac{2t}{1+t^2}.$$

Dintr-un punct exterior $M(\alpha, \beta)$ se duc tangentele MT_1 și MT_2 la elipsă, se cere :

Să se formeze în funcție de α și β ecuația care dă valorile t_1 și t_2 ale parametrilor punctelor T_1 și T_2.

Vasile Gheorghiță, Mărășești

7652. Într-un cerc oarecare (O) se duc doi diametri ficși perpendiculari AB și CD. Fie M un punct mobil, situat pe cerc. Dreapta MB taie pe CD în E. Se cere locul geometric al punctului P, intersecția dreptelor OM și AE.

C. Săndulache, Bacău

7653. Într-un sistem de coordonate cartezian ortogonal se dau punctele fixe $A(a, 0)$, $B(b, 0)$ și punctele mobile : $C(0, \alpha)$ și $D(0, -\alpha)$. Se construiesc dreptunghiurile $OAEC$ și $OBFD$. Se cere :

a) Ecuația dreptei (Δ), perpendiculară pe OE în mijlocul ei și cea a dreptei OF.

b) Locul geometric al punctului de intersecție dintre dreapta (Δ) și dreapta OF.

Parascan Ilie, Moinești

7654. Să se determine numărul natural $N = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^7$ știind că are 60 de divizori și că suma acestor divizori este egală cu 38 440.

Parascan Ilie, Moinești

7655. Se dau două axe rectangulare xx' și yy'. Un triunghi dreptunghic isoscel avînd cateta a, se mișcă în planul celor două axe, cu vîrful unghiului drept pe Oy și cu un vîrf pe Ox. Se cere :

a) Să se afle locul geometric al celuilalt vîrf al triunghiului.

b) Să se construiască locul geometric cînd triunghiul se află în fiecare din cele patru cadrane.

Gh. N. Rizescu, profesor București

7656. Să se determine o funcție $f(x)$ astfel ca

$$\int f(x)\, dx = [f(x)]^3$$

C. Ionescu-Țiu

7657. Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = \frac{\sin 3x}{\cos x}$$

și să se calculeze aria cuprinsă între curbă și axa xx' în intervalul

$$\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$$

C. Herling, inginer București

7658. Fiind date cantitățile : $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, să se arate că există relația :

$$\Sigma x_i^3 - 3\Sigma x_i x_j x_k = (\Sigma x_i)(\Sigma x_i^2 - \Sigma x_i x_j).$$

(În legătură cu articolul din G.M.—B, 1965, pag. 340).

Anastasie Petrescu, Craiova

7659. Să se rezolve sistemul :

$$4x + 5y - 2z = 0\,;\ 7x - 10y - 41z = 0\,;\ 11x^5 - 5y^5 - 43z^5 = 2790$$

Corneliu N. Popescu

7660. Să se afle valorile lui x' pentru care

$$|1 - \operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x| - |1 - \operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x| = \frac{4}{3}\cdot$$

C. Ionescu-Țiu

7661. Se dau un cilindru de rotație de generatoare G și un punct M mobil într-un plan exterinr cilindrului paralel cu bazele, la distanța d de baza superioară. Dacă notăm cu d_1 și d_2 distanțele lui M la doi diametri paraleli ai bazelor cilindrului, iar cu m_1 și m_2 distanțele lui M la extremitățile uneia din generatoarele respective, avem relațiile

$$d_2^2 - d_1^2 = m_2^2 - m_1^2 = G(G + 2d).$$

M. I. Focșeneanu

7662. Să se arate că :

$\operatorname{tg} 9° + \operatorname{tg} 45° + \operatorname{tg} 81° + \operatorname{tg} 117° + \operatorname{tg} 153° = 5.$

$\sec^2 15 + \sec^2 75° = 16.$

C. Ionescu-Țiu

7663. Se dă ecuația :

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

cu rădăcinile

$$x_1,\ x_2,\ x_3$$

și cu coeficienții a, b, c raționali.

Se cere să se calculeze în funcție de a, b, c expresia

$$E = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_1} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \frac{x_1}{x_3}$$

și să se arate că dacă $E + 3$ este un pătrat perfect, atunci și produsul abc este un pătrat perfect.

Dan Boboc, student București

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PENTRU CLASELE V–VIII*)

E : 2528. Pentru 3 m stofă și 7 m pînză s-a plătit 506 lei. Pentru 7 m stofă și 3 m pînză s-a plătit 1074. lei. Cît costă un metru din fiecare material?

I. Mangu, profesor Gilort

E : 2529. Să se efectueze

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{3\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{3}{109}\cdot 327}{2\frac{1}{2}:1\frac{1}{4}+1\frac{1}{15}\cdot 45}\right)\right]\right\}+\frac{75}{256}\cdot 3\frac{1}{5}$$

A. Corlan, Gilort

E : 2530. O fabrică de încălțăminte a produs într-o lună 5438 perechi de pantofi : de 112 lei perechea, de 170 lei și 298 lei perechea, în valoare totală de 909 440 lei.

Numărul de perechi de pantofi de 170 și 298 lei luați împreună întrece cu 418 perechi numărul celor de 112 lei perechea.

Să se afle cîte perechi de pantofi s-au produs : de 112, 170 și 298 lei?

Nelu I. Dobre, Merei-Buzău

E : 2531. În 1965 s-au produs 549 000 aparate de radio, televizoare și frigidere la un loc. Să se afle cîte aparate de radio, televizoare și frigidere s-au produs știind că numărul frigiderelor întrece pe cel al televizoarelor cu 24 000 iar al aparatelor de radio pe cel al frigiderelor cu 198 000.

Gh. Grosu, Botoșani

E : 2532. Să se verifice egalitatea

$$1_2 + 12_3 + 123_4 + 1234_5 + 12345_6 = 6006_7 + 22_8 + 11_9,$$

unde indicii arată bazele sistemelor de numerație folosite.

C. Băluță, elev Filiași

---

*V (E : 2528–2532) ; VI (E : 2533–2535) ; VII (E : 2536–2539) ; VIII (E : 2540–2544). Soluțiile se primesc pînă la 15 octombrie 1966. Problemele pentru cl. VII și VIII sînt indicate și pentru școli profesionale și pedagogice.

E : 2533. Suprafața unei C.A.P. este de 1728 ha. În 14 zile 6 tractoare (cu aceiași medie zilnică de lucru) ară $\frac{7}{12}$ din suprafață. În cîte zile se va termina aratul suprafeței rămase, dacă 2 tractoare sînt luate pentru alte munci de primăvară.

I. Corneşcian, profesor Sighetul Marmației

E : 2534. Două echipe de muncitori lucrînd împreună ar putea să facă o lucrare în 24 de zile. După ce au lucrat împreună 16 zile, una dintre echipe a fost mutată la altă lucrare și a rămas numai a doua care a terminat lucrarea în 14 zile. Să se afle în cîte zile ar fi putut executa lucrarea fiecare echipă?

D. Mîrzan, profesor Bujoreni, R. Vîlcea

E : 2535. : Să se calauleze

$$\frac{\left(0{,}25+\frac{1}{3}+17{,}5\cdot\frac{3}{5}\right):\left(\frac{5}{7}-3\frac{2}{3}:3\frac{4}{5}+2\frac{1}{7}\cdot 1{,}4\right)-1\frac{137}{4\,388}}{\left(\frac{\overline{125}}{2}\cdot 0{,}4+\frac{4}{9}\cdot 4{,}5-\sqrt{0{,}36}\right):1{,}6-1}$$

D. Preda, Topoloveni, Argeș

E : 2536. Prin mijlocul A' al ipotenuzei BC a unui triunghi dreptunghic ABC să se ducă o dreaptă care să taie laturile AB și AC respectiv în D și E, astfel încît patrulaterul $BDCE$ să fie inscriptibil.

E. Boiarschi, Botoșani

E : 2537. Într-un trapez isoscel $ABCD$ se dă diagonala $BD = 10$ cm, înălțimea $h = 6$ cm și $BD \perp BC$. Să se arate că :

$BC = 7{,}5$ cm ; $CD = 12{,}5$ cm ; $AB = 3{,}5$ cm ; $\frac{BO}{OC} = 0{,}28$,

unde O este intersecția diagonalelor.

Al. Țigănoiu, Timișoara

E : 2538. În luna mai a anului curent două secții de la o uzină constructoare de mașini aveau de efectuat, după plan, 5 000 de piese. Cele două secții s-au angajat în întrecerea socialistă în cadrul căreia prima secție depășește planul cu 15%, iar a doua cu 11%. După patru luni de la începerea întrecerilor secția a doua va produce cu 2 312 piese mai mult decît prima. Să se determine :

a) Numărul de piese planificat inițial pentru fiecare secție.

b) Numărul de piese efectuat peste planul lunar de către fiecare secție.

Gh. Climescu, profesor Brașov

E : 2539. O dreaptă oarecare taie laturile AB, BC, CD și DA ale unui dreptunghi respectiv în E, F, G și H. Să se demonstreze că :

$$\left(\frac{AE}{HE}\right)^2+\left(\frac{CF}{GF}\right)^2=\left(\frac{AH}{HE}\right)^2+\left(\frac{CG}{CF}\right)^2=1$$

Stelian Lambă, Constanța

E : 2540. Un număr de școlari au făcut o excursie cu autocarele O.N.T. care ar fi trebuit să coste 3 600 lei. La plecare în excursie s-au prezentat în plus 6 elevi și din această cauză excursia a costat în plus 48 lei, iar fiecare școlar a plătit 2 lei mai puțin față de costul fixat inițial. Să se calculeze cît trebuia să plătească inițial fiecare școlar și cîți școlari au luat parte la excursie.

I. Munteanu, profesor Vaslui

E : 2541. Se consideră trapezul isoscel ortodiagonal $ABCD$ $(AB \| CD)$. Să se arate că între laturile sale există relația :

$$2AD^2 = AB^2 + CD^2.$$

Gh. Călugăriță, București

E : 2542. Să se rezolve sistemul

$$(x + 1{,}5)^2 - (y + 2x)(y - 2x) - (y + 1)^2 + 27 = 5(x + 0{,}5)^2 - 2(y - 1)^2,$$

$$\frac{2x - y}{3} - \frac{3y - 4x}{4} = \frac{1}{3} - \frac{y}{8}.$$

La admitere în clasa a IX, Ploiești

E : 2543. Raportul dintre diagonala unei prisme patrulatere regulate și latura bazei este k. Să se arate că valoarea raportului dintre volumul prismei și aria secțiunii diagonale nu depinde de k.

I. Cojocaru, Orodel

E : 2544. S se arate că ecuațiile

$$x + 0{,}5 = \sqrt{1 + x},$$

$$x - 0{,}5 = \sqrt{1 - x}$$

au aceleași rădăcini. Să se verifice soluțiile găsite.

C. Ionescu-Țiu

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME *

Soluții bune primite pînă la 1 aprilie 1966 (urmare).

TECUCI. *S.g. 6* — cl. VI. Popescu Dorel (2410, 2, 6, 7, 34, 8, 9, 55, 6), Seulescu Mircea (2411, 3, 30, 1, 4, 8, 9, 50, 3), *S.g. 3* cl. VIII Nicoară Liliana (2410—3, 5, 7, 9, 21, 30—4, 8—9, 41, 2, 6), *S.g. 9* cl. VII Popa Victor (3431, 4, 5, 8, 41, 50, 2, 3), cl. VIII Budu Sorin (2411—3, 7—9, 21, 8, 38, 9, 41), Costache Ion (2413, 8, 9, 21, 4, 5, 31), 2, 8, 9), Giușcă Dana (2410, 2, 3, 6—8, 24, 30, 2, 3, 41, 2, 4, 6), *Liceul 1*, cl. IX. Olteanu Anișoara (2427, 8, 45—7, 60, 2, 7286, 7, 325, 6, 8), cl. XI. Baniță Mihai (7216, 9, 20, 2—4, 6, 36,66, 78, 82, 4, 5), Ifrim Vasile (7216, 7, 21—4, 6, 45, 7, 50, 66, 78, 82, 73, 20), *Liceul* 6. cl. VII

* *Evidențiații ca rezolvitori de probleme sînt scriși cu litere cursive.*

Palade Florentin (2411, 2, 3, 32, 4, 3, 41, 2), cl. VIII. Taşcă Eugenia (2411, 2, 3, 22, 4, 32, 4, 8, 9, 44, 53, 60), cl. IX. Păunescu Liviu Doru (2424, 6—8, 44, 7284—8, 326, 8), cl. XI. Pădure Constantin (7216, 20,, 2—4, 6, 36, 47, 66, 78, 82, 5),

TINCA (Crişana). cl. X Boroş Iuliu (7216, 20, 3, 4, 45, 76, 89, 92, 300, 17, 25), Ioan Colţea (7216, 20, 2, 45, 72, 6, 90, 300, 17, 25, 6, 8).

TIMIŞOARA. *S.g. 10.* cl. VII Goldstein Gabriel (2410, 2, 7, 8, 28, 31, 4, 44, 53), *Liceul 1* cl. VII. Dolga Marcela (2416—8, 28, 31, 8, 41, 2), Mărcuţ Marin (2398, 9, 406, 10—3, 32), Negruţiu Mircea (2410—3, 6—9), Toma Cornelia (2396—8, 9, 410—3, 18, 31, 2), *Liceul* 2 cl. IV Dordea Doina (2395, 6, 8, 400—2, 12, 13), cl. VIII Ciupală Rucsandra (2412, 7, 9, 21, 3, 32, 41, 2), Demeter Hildegard (2412, 3, 9, 23, 32, 4, 8, 41), Diamant Teodor (2410—3, 31, 2, 4, 41, 2), Glonţ Florentin (2411, 3, 7, 8, 31, 2, 4, 8), Keller Ingrid (2411—3, 23, 31—4, 8), Lauer Horst (2413, 8, 9, 21, 3, 8, 32, 4, 9, 41), Mugescu Liliana (2431, 2, 8, 9, 41, 2, 7326, 8), Popovici Radu (2418, 21, 3, 4, 8, 31, 4, 48), Răduş Adrian (2412, 7, 9, 21, 3, 30, ,1, 4, 40), Renate Lovasz (2413, 21, 3, 31, 8, 9, 41, 2), Rigo Walter (2419, 21, 3, 31, 2, 4, 8, 9, 41, 2), Sebi Hans (2421, 3, 31, 2, 4, 8, 41, 2), Varga Gabriela (2413, 9, 21, 8, 32; 4, 9, 41, 2), Winand Michael (2413, 9, 21, 3, 32, 4, 8, 41, 2), Wissinger Petlu (2411—3, 23, 32, 4, 8, 42), cl. IX. Gross Gabriel (2424—8, 45, 6, 9, 7285—7, 325, 6),

Raţiu Tudor (2407, 9, 24—8, 7222, 32—5, 84—8), *Liceul 3* cl. XI Popa Andreia (7216—8, 21—4, 85, 300, 2, 20, 35, 43), *Liceul 7* cl. VI Guban Ana (2410—3, 32, 8, 9, 41, 2, 54, 5), *Liceul 10* cl. XI Chernolatecz Rudolf (7282, 3, 311, 20, 56, 62, 4, 73, 6, 7, 84, 94).

TÎRGOVIŞTE. *S.g. 6* cl. VIII Chivăran Laura (2394—8, 400—2, 4—6, 9), *Liceul 1*, cl. VIII Jitcoiu ¡Cornel (2421, 3, 4, 8, 30—2, 4, 8, 40—2, 4—7, 50, 3—5, 60, 2, 8, 18, 25, 8), cl. IX Tătaru Gheorghe (2427, 8, 46, 7, 60, 2, 7, 284, 6—8, 325, 6), cl. X Huiu Dan (7284—9, 91, 5, 7, 300, 25, 6), *Liceul* 2. cl. X Florea Ion (7224, 76, 83, 300, 7, 8, 22, 3, 5, 6, 8), Soare Nicolae (7216, 20—4, 76, 84—8, 317, 22, 5, 6), cl. cl. IX. *Enache Gheorghe* (7263, 6—8, 76, 9, 82—4, 7—9, 90—3, 5, 6, 8, 9, 300—4, 12—5, 7, 8, 20, 1, 3—7, 32—5, 7, 42, 3, 5, 8, 9, 51, 4), *Pîrvu Constantin* (7285—7, 9, 3, 5, 6, 9, 300, 3, 4, 12—4 7, 8, 20—4, 6, 8, 34, 5, 7, 9, 42, 3, 72—5, 7, 84, 98).

TÎRGU CĂRBUNEŞTI. *Liceu* cl. X. Jianu Romel (7284—9, 91, 2, 9, 300, 17, 26), Preda Petre 7284—7, 92, 9, 300, 17, 22, 3, 5, 6).

TÎRGU JIU. *Liceul 1* cl. X Berculescu Dan (7282—4, 8, 304, 12, 4, 21, 3, 5, 6, 35, 9, 43), Budianu Dumitru (7216—921—3, 34, 84, 5, 7, 8), cl. XI. Bratu Traian (7251, 63, 76, 84, 90, 2, 6, 8, 300, 1, 8), *Liceul 6.* cl. IX Dijmărescu Ion (2425, 6, 8, 45, 60—2, 7284—8), cl. XI Tivig Ignat (7317, 8, 72, 3, 6, 7—9, 80—3, 5).

TÎRGU LAPUS. *Liceu* cl. X Bogza Liviu (7216, 20, 4, 84—8, 99, 300, 25, 6, 8), Meseşan Ştefan (7217, 21—4, 47, 84, 6—8), 99, 300, 17, 8, 25—8), Pojar Iom (7216, 19, 20—4, 85—8, 99, 300, 14, 8, 8, 28), Ropan Gavril (7216, 23, 4, 9, 84—8, 317, 8, 24), Santa Viorel (7216, 7, 9, 21—3, 34, 5, 40, 76, 84—7).

TÎRGU MUREŞ. *Liceu* cl. V. Sălăgeanu Nicolae (2395, 8, 404, 10—3), cl. VI. Palavits Elisabeta (2397, 401, 10, 2, 3, 17, 31, 4, 8, 41, 2, 50, 3, 5), Vaida Iancu (2395. 404, 11—3, 32, 4, 8), Vamoş Călin (2410, 1, 3, 30, 1, 9, 41, 2), cl. VII Mincovici Crina (2404, 19, 20, 8, 3, 41, 2), Muscă Dan (2417, 9, 23, 5, 7, 8, 34, 9), Poliac Marius (2413, 9, 24, 6, 8, 30, 4, 7—9, 41, 2, 4, 5), Sonnernfeld Gabriel (2411, 3, 6—9, 24—6, 8, 7284), cl. IX. Vamoş Vasile (2424, 7, 8, 44—6, 60, 2, 4, 6, 7), cl. X. Pasat Gheorghe (7216, 7, 9, 20, 2—5, 34—6, 40, 84—8, 91—3, 99, 300), cl. XI. Pasat Mihaela (7216, 7, 9, 20, 2, 4, 20, 2, 4, 36, 84—8, 92, 3, 9, 301).

TG. NEAMŢ. *S..g.* cl. VIII Axinte Marta (2429—32, 4, 8—42, 4, 6).

TÎRNĂVENI. *S.g. 1.* cl. VIII Gruia Doina (2430—2, 4, 8, 9, 41, 2, 5), *Liceul 1* cl. IX. Chinişan Dumitru (2425, 7, 8, 44—7, 84, 5, 7, 9, 325), Todoran Gheorghe (2409, 25—8, 7129—23, 84, 6, 7), cl. X. Gruia Căin (7286, 8, 91, 2, 9, 301, 14, 8, 27, 8, 73, 7, 9, 98, 9, 402), Oproiescu Dan (7287, 9, 900, 17, 23, 5, 6, 8, 79, 98, 98, 9, 5418).

TITEŞTI (Argeş) *S.g.* cl. VIII Dobrin Mielu (2419, 21, 3—5, 7, 8, 31, 8, 9, 41, 2, 5, 8), Feţeană Mihai (2419, 21, 3—8, 29, 31, 2, 4, 8, 41, 2, 4, 25, 6, 8).

TITU (Bucureşti). *S.g.* cl. VIII Sandu Dumitru (2410—4, 7—9, 21, 3, 5, 8).

TISĂU (Buzău). *S.g.* cl. VIII Micu Maria (2411—4, 9—31, 4), Negulescu Eugenia (2411—4, 9—31, 4).

TOPLIŢA (Mureş Aut. Maghiară) *S.g.* cl. VII Tifrea Livia (2430, 2—8, 41—3).

TULCEA. *Liceul 1* cl. IX. Găşman Eugen (2425—8, 4,6 62, 84—8, 25, 6, 8), Vasilescu Marian (2424—8, 46, 7, 9, 7284—8, 328).

TURDA (Cluj). *S.g. 6* cl. VIII Toma Adela (2396—8, 400—4, 11—3, 6, 20, 1), *Liceul 6* cl. IX Creţu Mihai (2423, 5, 6, 8, 46—8, 60—2, 7284, 5, 326), Fanea Mircea (2426, 8, 44—8, 7284, 5, 8, 317, 8, 25, 6, 8), cl. X. Şerban Viorel (7216, 7, 9—27, 31, 4, 5, 40, 3, 7).

TURNU MĂGURELE. *Liceu* cl. X. Glogojan Tudora (7221, 2, 8, 84—8, 93, 6, 300, 7, 8, 22, 5, 6, 8).

TURNU SEVERIN. *S.g. 1* cl. VII Burtea Dan (2410—3, 6, 8, 28, 31, 9, 41, 7235), Lupu Florin (2411, 3, 28, 32, 4, 8, 9, 41, 53), Stocker Marina (2410—4, 7, 8, 24, 8, 31, 21), cl. VIII Bădescu Iulian (2395—405, 10 —3, 7, 8, 21, 4, 8), *S.g. 9* cl. VIII Calafeteanu Mariana (2419, 21, 4, 5, 41—3, 61, 2), cl. IX. Cristescu Sorin) 2425, 8, 45, 6, 62, 84, 5, 7, 8, 325, 8, 85). Goergescu Radu (2426—8, 46, 7, 9, 7284—8, 318, 25, 6, 8), Gărgălie Maria (2423, 4, 6, 8, 46, 41, 61, 2, 3, 7298, 3, 26, 8), Servici Constantin (2424—8, 45, 7, 9, 76, 84—6, 8, 91, 6, 8), Stocker Elena (2424—8, 44—6, 7284—8, 317, 24—6, 8).

TRUSEȘTI. *Liceu* cl. X. *Nedelcu Nicolae* (6927—32, 6, 31—3, 6, 9, 50, 63, 89, 97, 7000, 2, 3, 62, 6, 70, 3, 8, 81, 120, 2, 34—6, 85, 216, 22—4, 6, 34, 5, 8, 45, 86, 7, 96, 300, 26, cl. XI *Aionesei Ioan* (7142, 4, 72, 5—7, 28, 9, 31, 4, 9, 40, 6, 50, 63, 63, 6—73, 81—92, 5—304, 6, 8, 9, 11—18, 20—3, 5—31, 3—7, 39—43), Buneanu Emil (7216—8, 20, 3—6, 45, 66—8, 83, 6, 7, 98, 9, 301, 3, 4, 12, 4, 7, 8, 20, 8, 39).

URIȘOR (Oradea). *Liceu* cl. IX Săplăcam Gavril (2425.8, 49—7, 76, 84, 5, 7, 8, 325, 6).

UȘUREI (Argeș) cl. VIII Pietraru Ana (2411—4, 7—9, 23—5, 8).

VALEA CU APĂ. *S.g.* cl. VIII Tudoran Ortanța (2410, 1, 19, 21, 3, 4, 31, 2, 4—6).

VALEA STANCIULUI, absolventă. Cismaru Corneliu (7314, 7, 8, 23, 6, 8, 9, 411, 2, 67, 72—5, 7, 83).

VĂLENI. *S.g.* cl. VII *Zălinescu Constantin* (2410—26, 8—49, 7284, 5, 8, 325), cl. VIII Tuns Gavril (2411—3, 7—9, 21, 3, 5, 7, 32, 4, 3, 41—3, 9).

VASLUI. *Liceul 1* cl. VI Cohn Isac (2412—4, 6—8, 28, 33—6, 8, 9, 41—3), cl. VII Gold Iulian (2395, 6, 8, 400—2, 4, 11—3, 7, 8), cl. VIII Doru Zozuleac (2410, 2, 1, 23, 34, 44, 5, 9, 54, 9, 62).

VATRA DORNEI. Fodorea Mihail (7278, 82—4, 6, 7, 91—3, 300, 4, 7, 8, 21, 6, 7).

VEREȘTI (Suceava) Huțanu Gheorghe (2429—32, 4, 8, 8, 42).

VÎCOV DE SUS. *Liceu* cl. IX Balmean Constantin (2409, 25, 6, 44—6, 56, 84, 6—8, 325, 6, 8), Bodnar Viorel (2425—8, 45, 5—7, 7286—8, 325, 6, 8), Chichineim Goergeta (2424—6, 8, 45—7, 7236—8, 325, 6, 8), Juravle Vasile (2425, 6, 8, 44—7, 67236, 86—8, 325, 6, 8,), Nițu Constantin (2409, 24—6, 8, 44—6, 8, 86, 7, 326, 8, 525), Popovici Lucia (2424, 8, 44—7, 86, 7236, 87, 8, 326, 8, 426), Somiac Livia (2425, 6, 8, 45—7, 86—8, 7226, 36, 8), *Țugui Vasile* (2424, 8, 44—7, 7236, 87, 8, 325, 6, 8).

VÎRTOAPELE DE SUS *S.g.* cl. VIII. Nedelea Stanca (2410—7, 9, 23, 7, 8).

ZALĂU. *Liceul 1.* cl. X Lungu Ioan (7272, 6, 89, 91—3, 5—300, 8), Szöcs Coloman (7300, 1, 7, 8, 22, 3, 7, 8, 33, 5, 8, 42, 73, 5, 8).

ZLATĂREI (Argeș)—*Liceu* cl. IX. Ivan Gheorghe (2425—8, 45, 6, 9, 7284—8, 3, 5, 6, 8).

ZLATNA (Hunedoara) *Liceu* cl. X Perța Vladimir (7272, 6, 8, 84—8, 91—3, 8, 300, 1, 17, 8, 23—6, 8, 33, 5).

Soluții bune primite pînă la 30 aprilie 1966.

ADJUD (Bacău). *S.g.* cl. VII Maftei Gh. (E : 2411, 2, 6—9, 21, 4, 8, 32, 4, 9, 42), *L. 1* cl. IX. Apostol Constantin (E : 2444—7, 9, 61—3 ; 7325, 6, 8, 97, 7), Dragomir Luminița (E : 2425, 6, 8, 44—6, 62 ; 7284, 5, 8, 325, 8), Grigore Gh. (E : 2424—8, 60, 2 ; 7286, 7, 325, 8, 98), cl. X. Gurmultă Dănuț (7284—8, 90, 300, 5, 17, 25, 6, 8, 77, 9, 87, 91), Știucă Romulus (7284—9, 91, 300, 17, 25, 6, 8).

AIUD (Cluj. *S. g.* cl. VII Maftei Doina (E : 2411—3, 8, 24—6, 8—30, 41), Pojan Radu (E : 2413, 23, 9—32, 8, 9, 45), cl. VIII Cornel (E : 2430—2, 4, 8—42, 5, 62).

ALBENI. *S. g.* cl. VIII Belega Viorica (2411—3, 7—9, 24, 5, 8).

ANINA. *S. g. 1* cl. VIII Nicola Alexandru (E : 2413, 9, 21, 3, 7, 31, 2, 8, 9, 41, 2, 62), Toma Marius (R : 2412, 3, 9, 21—7).

ABRUD (Maramureș). *L. 1* cl. VIII Aman Ghizela (E : 2423—8, 60, 2), Löchlu Ileana (E : 2423—8, 60, 2).

ARAD. *L. 1* cl. IX Boșcaiu Voicu (E : 2444—7, 9 ; 7267, 9, 72, 6, 85, 95, 314, 7, 8), Nădrău Dorin (E : 2424, 7, 8, 44—7, 9, 61, 2 ; 7387, 326, 8), Pătru Ionel (E : 2444—6, 8, 9, 90—2 ; 7317, 8, 25—8), Simanda Gh. (E : 2425—8, 44—7, 50—3) 7284, 5), Vinoza Iuliu (E : 2425, 7, 8, 44, 6, 9 ; 7284—7, 325, 6), cl. X Bola Ioan (7264, 7, 72, 8, 82—6, 8, 9,91—8, 5—7, 300, 9), Volintir Petru (7284—6, 7, 8, 317, 8, 21, 2, 5, 6, 8), *L. 2.* cl. V Ududee Liana (E : 2450—4, 6, 7, 28), cl. VI Dan Rodica (E : 2410—4, 6—8, 28), Padia Delia (E : 2413, 24, 8, 38, 9, 42, 53, 9), cl. VII Constanța Nițâ (E : 2413, 8, 20, 4, 5, 30, 1, 4, 8, 9, 44), *L. 4* cl. IX Hornoiu Titus (E : 2425—8, 44, 6, 8 ; 7284—8, 325, 6), *Grup șc. U.V.A.* cl. I Hotăran Petru (E : 2412, 20, 1, 5, 6, 31, 45 ; 7285, 8, 325).

BACĂU. *S. g. 5* cl. VI Iliescu Dan (E : 2450—5, 7, 8, 28, 30—2) cl. VIII Sveț Daniel (E : 2429, 30, 2, 8, 9, 41, 2, 4), *L. 8* cl. VII Andarache Gabriela (E : 2410, 2, 4, 7, 8, 28,

32, 8—42), Cîrlan Carman (E : 2410, 4, 5, 7, 8, 28, 32, 8, 9, 41), Cociorvei Victor (E : 2410, 4, 5, 7, 8, 28, 32, 8, 9, 41—3, 5), cl. VIII Afloarei Eugenia (E : 2410, 1, 3, 7—9, 21, 4, 7, 32, 41), Balaş Elena (2410, 1, 3, 7—9, 23, 4, 31, 2, 8, 9, 41, 5), Mondi Luminiţa (E : 2410—4, 7—9, 23, 4, 31, 2, 8, 9, 41, 5), Rotaru Constantin (E : 2411, 3, 24, 31, 2, 8, 9, 41, 2), *L. 1* cl. VI Knoll Mina (E : 2411—9, 25), cl. VII Vais Poliana (E : 2411—3, 8, 30, 1, 4, 44), Wenger David (E : 2410—7, 25, 8), cl. IX Knoll Fredy (E : 2425—8, 44—7; 7284—6, 8, 91), Ţarălungă D. Mihai (E : 2428, 44—7, 60, 2 ; 7284, 5, 7, 325, 8), cl. X Băncilă Costel (7286—8, 93, 317, 8, 23, 5, 6, 8, 85, 7), Cumpărencu Mircea (7284, 6—9, 91—4, 7—301, 9, 98, 402, 5), Paraschiv Alexandru (7283, 7, 314, 7, 8, 20, 3, 5, 6, 8, 66, 73, 7), *L. 2* cl. X Iurea Vasile (7282, 3, 91, 300, 17, 8. 20, 2, 5, 6, 8, 35), *L. 4* cl. X Macovei Costică (7284—8, 93, 300, 13, 7, 8, 23, 5, 6, 8).

BAIA MARE. *S. g. 1.* cl. VIII Fried Livia (E : 2419, 21, 8, 39, 41, 5, 53, 4, 60—3 ; 7284, 326), *S. g. 2* cl. VI Bond Ioan (E : 2410—4, 7—9, 21, 2, 4, 5, 8), *S. g. 3* cl. VII Ardeleanu Gh. (E : 2410—3, 30, 1, 4, 9, 41), cl. VIII Sint Elisabeta (E : 2410—3, 19, 21, 3, 4), *S. g. 8* cl. V Papp Katalin (E : 2410—6, 28), *L. 1* cl. IX Lazăr Andrei (E : 2424, 6—8, 44—7 ; 7284, 6, 91, 326, 8), Mureşan Valeriu (E : 2424, 6—8, 45, 6, 63 ; 7286, 7, 325, 6, 8), Opriş Rodica (E : 2424, 5, 8, 45, 6, 62 ; 7284, 5, 8, 325, 6, 8,) Pop Gheorghe (E : 2424—8, 44—6, 61 ; 7284, 6—8, 326, 8), *L. 3* cl. VIII Graur Călin (E : 2411, 3, 6—9, 21, 3, 4, 6, 7), Marincescu Dorin (E : 2431, 4, 9, 41, 50, 1, 3, 5, 62), cl. X Grosfeld Mihai (E : 7284—95, 7—9). *Apşan Dan* (7267, 82—8, 91, 2, 4—7, 1, 9, 13, 4, 7, 8, 20—8, 30, 2, 3, 5, 64, 73, 5, 7, 9, 82, 5, 95, 7, 404, 5, 32, 37, P.N.).

BĂICOI (Ploieşti). *L. 1* cl. IX Coman Ion (E : 2424—8, 44—7, 9, 60, 2 ; 7284—8), Comşa Georgeta (E : 2424—8, 44—7, 7284—8), cl. X Constantinescu Aurel (7283,—8, 320, 3, 68, 9, 77, 406, 11), Stadler Petre (7282—5, 317, 8, 20, 5, 6, 75, 7, 9).

BEIUŞ (Crişana). *L. 1* cl. VII Böttger Adrian (E : 2410, 1, 3, 7, 8, 29, 32, 4, 8, 41), Covaci Iosif (E : 2410, 1, 3, 5, 7—9, 24, 8—32, 4), Laslău Ioan (E : 2410—3, 6—9, 24, 6, 8, 9, 32), cl. VIII Zare Viorica (E : 2411—3, 5, 8, 9, 21, 8, 31, 4, 44, 9), cl. X Gavruţa Pascu (7276, 84—93, 5—301, 8, 9).

BERTEA (Ploieşti). *S. .g. 2* cl. VII Costache Constantin (E : 2411, 3, 24, 32, 4, 8, 9, 41, 2, 54, 5), cl. VIII Bunescu Maria (E : 2411—3, 5, 7, 9, 21, 3, 4, 7, 8, 38, 9, 41, 54, 5, 60, 2).

BISTRIŢA. Absolvent Verveagă T. (7278. 83—8, 91—3, 97, 300, 4, 18, 25, 26, 8), *L. 1* cl. IX Drăgan Viorica (E : 2425—8, 45—62, 3 ; 7284, 6, 7, 357—, 21), Pop Eugen (E : 2424—8, 44, 6 ; 7284, 5, 7, 8, 3, 8), *L. 1* cl. VII Bucşa Viorica (E : 2410—3, 6—8, 24, 5, 8, 32), cl. VIII Fett Adrian (E : 2411, 2, 4, 6—9, 21, 5, 8), cl. IX Petri Adriana (E : 2424, 7, 8, 60, 2, 3 ; 7284—8, 32, 8).

BICU (Iaşi). *S. g.* cl. VIII Dascălu Viorica (E : 2429, 31, 2, 38, 40—2, 4, 7, 9).

BIRCA (Oltenia). Absolvent Popa Ştefan (E : 2411, 4, 7, 8, 21, 31, 4 ; 7222, 3, 35).

BÂRLAD. *L. 2* cl. VIII Pălimaru Virginica (E : 2413, 4, 9, 21, 30, 1, 4, 8, 40, 4, 5, 61), Vrabie Dorel (E : 2413, 8, 9, 21, 3, 32, 4, 8, 41, 61, 2), cl. IX Dumitru Corina (E : 2428, 44—6, 9, 60—3 ; 7286, 7, 325), Mînza Sorin (E : 2425, 6, 8, 45, 6, 62 7284—7, 325, 6, 8), Roescu Luiza (E : 2425, 6, 8, 44, 9 ; 7286, 7, 325, 6, 8, 30), Stoica Emil (E : 2425—8, 44—6, 62 ; 7284, 7, 8, 325, 6, 8), cl. X Horez Consanti n(7284, 6, 8, 9, 91, 2, 5, 300, 25, 6, 39, 402, 5), *L. 3* cl. VII Carp Ruxandra (E : 2431, 4, 8, 9, 41, 2, 50, 3—5), Tabără Felicia (E : 2429, 31, 2, 4, 8, 9, 41, 2, 50, 3—5), cl. VIII Hodorogea Emilia (E : 2411—4, 6, 7, 9, 28).

BOLDEŞTI. *S. g. 1* cl. VII Bilciurescu Olga (E : 2429—31, 4, 5, 8, 9, 40, 1, 4).

BOLINTIN DEAL (Bucureşti). *S. g.* cl. VII Niculaie Ion (2413, 9, 20, 30, 1, 4, 41, 61).

BORÓAIA. *S. g.* cl. VIII Petrescu Viorica (E : 2410—4, 7—9, 21, 8 ; 7284, 8).

BOTOŞANI. *S. g. 2* cl. VIII Miliţeanu Filip (E : 2431, 2, 4, 8, 9, 41—3), *S. g. 3* cl. VIII Cojocaru Chivu (E : 2419, 21, 38, 9, 50, 60—2), *L. 1* cl. IX Ignat Dumitru (E : 2425—8 44—6, 60, 2, 3 ; 7325, 6), *L. 2* cl. VIII Alupoaiei Dorin (E : 2410, 2, 39, 21, 3, 7, 50), Sonohat Maria (E : 2410, 1, 4, 7—9, 23, 31), cl. IX Ghiţă Alexandru (E : 2424 —8, 7267, 84—8, 317, 8, 25, 6, 8), cl. X Vecsler Nadia (7286, 7, 93, 9, 300, 18, 23, 6, 8, 33, 7, 51), 64, 72, 35, 5, 7, 9, 95, 400, 2, 3), *S. arte plastice* cl. VI Băjenaru Constantin (E : 2410—3, 28, 32, 4, 8—41), Condriuc Liviu (E : 2410—3, 18, 24, 8—31, 4, 41), cl. VIII Munteanu Mircea (E : 2410—9, 21, 3, 5, 7, 8).

BOZOVICI (Banat). *L. 1* cl. VI Jura Ileana (E : 2410—8), cl. VIII Ciosa Ana (E : 2413, 9, 21, 39, 41, 7, 54, 5 ; 7326), Piescu Călina (E : 2450, 2—5, 60—3).

BRAD (Hunedoara). *S. g.* cl. VIII Năstăsoiu Lidia (E : 2411—4, 7—9, 21, 3—5, 8—32, 4, 8, 40—2, 5—7, 50, 2—5, 60—2), *S. g.* 2 cl. VII Trufoşiu Dan (E : 2410—3, 7, 8, 20, 5, 8, 30—2, 4, 8, 9, 41, 2, 4, 5, 50, 3, 5, 6).

BRANIŞTEA (Bucureşti). *S. g.* cl. VI Giugiucă Mariana (E : 2450—6, 62).

BRAŞOV. *S. g. 2* cl. VIII Ionaşcu Ligia (E : 2416—9, 21, 3, 7, 8, 32, 8, 9, 215—9), *S. g. 5* cl. VIII Grama Luciana (E : 2417—9, 21, 3, 6—8), *S. g. 6* cl. VIII Runcanu Elena (E : 2419, 24, 5, 8, 31, 2, 44, 5), Zsido Eva (E : 2410—21), *S. g. 8* cl. VIII Oancea Maria (E : 2431, 2, 4, 8, 9, 41, 5, 9, 50, 2, 5, 60, 2), *S. g. 13* cl. VI Ittu Marcela (E : 2429—31, 4, 8, 9, 41, 2, 53), *L. 1.* cl. XI Caminschi C. Lucian (7282, 4, 6, 7, 91, 2, 5, 9—301, 3, 4, 8, 17, 20, 1, 3, 5, 6, 8, 35, 9, 42, 6, 7, 64, 95, 9), *L. 4* cl. VII Anghel Stelian (E : 2410—2, 7, 8, 28, 30—2, 4, 40, 5), Constantinescu Silvia (E : 2410, 2, 7, 31, 2, 4, 42, 5), Teodorescu Florin (E : 2431, 2, 4, 5, 8, 9, 41, 2), cl. VIII Başag Georgeta (E : 2411—3, 5, 9, 28, 32, 9, 41), Deac Georgeta (E : 2411, 3, 7, 9, 28, 30—2, 9, 41, 2), cl. VIII Grigoraş Viorica (E : 2419, 31, 2, 44—6, 8, 9), Stan Adriana (E : 2410, 1, 3, 5, 7, 9, 28, 31, 2, 9, 41, 2, 5), cl. XI Cotora Gh. (7272, 6, 87, 9, 91, 2, 5—7, 9—302, 4), Stavilă Ioan (7286, 7, 300, 1, 14, 7, 8, 20, 3, 5, 6, 8, 30, 5, 42, 3).

BRĂILA. *S. g. 4* cl. VIII Ciocla Valeriu (E : 2410—2, 7, 9, 23, 4, 5), *S. g. 7* cl. VI Borsai Lucia (E : 2410, 1, 32, 4, 8, 50, 3, 5), Dendrino Artemisa (E : 2410—3, 32, 4, 8, 53), Dumitru Eduard (E : 2411—3, 32, 4, 9, 41, 54, 5), Monşa Pericle (E : 2411—3, 31, 3, 4, 9, 41, 2), Nederuţ Florin (E : 2411—3, 8, 30—4, 53), Plopeanu Mihaela (E : 2410, 2, 3, 34, 9, 41, 2, 55), Savin Mircea (E : 2410—2, 32, 4, 9, 41, 53), Zamfir Mihaela (E : 2411—3, 30, 2, 4, 8, 9, 41, 2), cl. VII Epure Marinela (E : 2413, 8, 21, 2, 4, 8, 39, 41—4), Sgîrcitu Georgeta (E : 2411—4, 9—32, 4, 8), cl. VIII Braunestein Camelia (E : 2411—3, 8, 9, 23, 5, 7), *S. g. 10* cl. VI Florescu Liliana (E : 2410—6, 8, 28), *S. g. 18* cl. VII Vintilă Tiberiu (E : 2411, 4, 6—8, 25, 8, 9), *S. g. 22* cl. VIII Dragomir Gh. (E : 2410, 1, 3, 4, 6—25, 7—32, 4, 6, 8—36, 8, 9, 54, 5, 60, 2), *L. 3* cl. IX Corbu Titus (E : 2424, 8, 45, 6, 9, 60, 23 ; 7286, 7, 325, 6, 8).

BREAZA (Ploieşti). *L. 1* cl. IX Apostol Ion (E : 2425—8, 94—7, 9, 60 ; 7284, 5, 8, 325, 6, 8), cl. X Iernuţan Eugen (7284, 5, 7—9, 91, 2, 6, 9, 300, 17, 30, 2, 3, 5, 51, 77, 402, 13, 6), Tăleamu Constantin (7371—8, 87, 91, 7—400, 2—5, 10, 8).

BREBINA (Bucureşti). *S. g.* cl. VIII Neacşu Lucian (E : 2410—2, 4, 7—9, 5, 8, 50, 2—5, 62, 3).

BUCIUMENI (Ploieşti). *S. g.* cl. VIII Cilişteanu Ana (E : 2429—32, 4, 8, 9, 41, 2, 4, 5, 7, 9).

BUCOV (Ploieşti), *S. g. 31* Bratu Elena (E : 2410, 2, 3, 23, 8, 38, 9, 41).

BUCUREŞTI *S. g. 3* cl. VII Etru Gabriela (E : 2450—3, 7, 8, 2, 25, 8), cl. VIII Anton Iosif (E : 241, 1, 3, 4, 9, 21, 3—8), Paraschiv Monica (E : 2431, 2, 4, 40, 4—7, 50, 2, 3, 60, 2), Stoiciu Gh. (E : 2434, 40, 5, 6, 8, 50, 2, 3, 5, 62), *S. g. 4* cl. VI Udrea Bogdan (E : 2429—32, 4, 8, 9, 41, 2, 5), *S. g. 5* cl. V Bade Silvian (E : 2410—4, 6, 7, 24, 8 ; 7284). Lazăr Anca (E : 2410—4, 6, 8, 8), cl. VI Mag Tania (E : 2410—3, 8, 32, 8, 9, 41), Streja Dan (E : 2410—4, 17, 8, 24, 8), cl. VII Avram Mihaela (E : 2410—3, 7, 8, 28, 34, 8, 41), Ciureş Ileana (E : 2410—3, 6—8, 25, 43), Dascălu Dan (E : 2410—4, 7, 8, 20, 5, 6, 8), *S. g. 24* cl. VII Eftimie Călin (E : 2429—32, 4, 5, 7, 40, 4), *S. g.* 26 cl. VIII Berca Florin (E : 2410, 1, 4, 5, 7—9, 21, 3, 5, 7, 8), Mareş Rozvan (E : 2410—4, 7—9, 21, 3, 8), Rovenţa Daniela (E : 2419, 21, 3, 7, 8, 50, 2—4, 61, 2), Ştefănescu Florin (E : 2430, 1, 4, 8, 40, 4, 5, 54, 62), *S. g. 42* cl. V Becheanu Maria (E : 2410, 2, 3, 29—31, 4, 50, 3), Diaconu Viorica (E : 2410—3, 29, 31, 50, 3), Dumitru Maria (E : 2410, 2, 3, 30, 1, 4, 50, 3), ... Tudora (E : 2410—4, 30, 1, 4, 50, 3), Popa Rodica (E : 2410—3, 31, 9, 50, 3), Ristocke Gabriela (E : 2410—4, 30, 1, 53), Scarlat Ana (E : 2410, 2, 3, 20, 4, 5, 50), Şerban Victoria (E : 2410—4, 29, 31, 50, 3), *S. g. 50* cl. V Tutungiu Iancu (E : 2410—3, 29—32, 50, 3), cl. VII Ianuş Gh. (E : 2415, 6, 9, 23—7, 9, 30, 41, 2), *S. g. 51* cl. VII Petrache Adrian (E : 2429—32, 4, 5, 41, 2, 4—7), *S. g. 56* cl. VIII Manciu Adrian (E : 2414—20, 5—8), Piperea Gabriel) (E : 2410—4, 6—9, 22, 3, 5, 6, 8), *S. g. 76* cl. VIII Anghel Dorel (E : 2431, 2, 4, 8—41, 4—6, 50, 2—6, 60, 2), *S. g. 81* cl. VII Brădişteanu Sanda (E : 2430—2, 4, 8, 41—3, 5), *S. g. 92* cl. V Froda Sorana Maria (E : 2430, 2, 50, 3, 64—7), *S. g. 100* cl. VIII Nicolae Cristina (E : 2422—8 ; 7287), *S. g. 122* cl. VII Brătescu St. Anca (E : 2416—8, 25, 8—34, 8, 40—2, 4—6, 8, 50, 3), Floricâ Georgiana (E : 2410—4, 8, 25, 8, 59), Ştefănescu Dan (E : 2410—3, 8, 24, 30—2, 41, 54), cl. VIII Nistor Irina (E : 2410—5, 7—9, 22, 3, 5, 7, 8), Rădeanu Corina (E : 2411, 3, 4, 7, 23, 8, 31, 39, 53), *S. g. 124* cl. VIII Gheorghiu Anca (E : 2434, 8, 9, 41, 2, 60—3), *S. g.128* cl. V Dragu Gabriel (E : 2410—6, 28, 31), Mioriu Doina (E : 2410—4, 6, 28, 31), Mîrsanu Constantin, Rogobete Nicolina, Sava Angela, Sima Adrian, Tutunaru Mira (E : 2410—6, 28, 31), cl. VI Matei Cornel (E : 2410—4, 24, 8, 31), Popa Mihaela (E : 2410—7), cl. VIII Bivolaru Nicoleta (E : 2410—3, 7, 8, 23, 8), *S. g. 128* cl. VIII Ciontea Mariana, Ciora Mihaela (2410—9, 21, 3, 5, 6, 8, 30—2, 4, 8, 9, 42, 5, 7, 52, 3, 5, 6, 60, 2, 3), Gruia Vladimir (2410—4, 6—9, 28), Ştefănescu Gilda (2410—3, 7, 8, 23, 8), *S. g. 141* cl. VIII Zaharia Vlad (E : 2410, 3, 4, 7—9, 21, 3, 5, 8), *S. g. 145*, cl. VIII Candidab Liviu (E : 2419, 21, 3, 9—32, 4, 5, 7—9, 412, 4—7, 54, 60), *S. g. 146* cl. VIII Bădescu S. (E : 2410—2, 4—28 ; 7284—8),

Petrescu Gh. (E : 2410—4, 6—9, 21, 3, 5, 7, 8), *S. g. 150* cl. VIII Biță Mircea (E : 2421, 7, 8, 46, 6, 60, 2, 3 ; 7318), *S. g. 166* cl. VII Cernescu Gabriela (E : 2410—5, 7—9, 6, 8—32, 4, 5, 8, 41, 4), cl. VII Hila Mihaela (E : 2410, 3, 4, 7, 8, 24—6, 8), Hoisescu Niculae (E : 2410—4, 6—8, 22, 6, 8), cl. VIII Vasilescu Adriana (E : 2410—4, 7—9, 23, 4, 8), *Vijelie Luminița* (E : 2410—23, 5—8, 32, 8, 9, 41 ; 7272, 6, 84—9, 91, 2, 5—9, 301), *S. g. 173* cl. VI Andrievici Bogdan (E : 2410—4, 6—8), *S. g. V. Alecsandri* cl. VI Croitoru Olga (E : 2416, 6—8, 34—9, 50, 4, 5). *L. 1. N. Bălcescu* cl. IX *Biță Dan* (E : 2415—6, 8, 44—7, 9, 60—3 ; 7267, 84—8, 96, 317, 8, 21, 2, 5, 6, 8, 30, 382, 97, 401, 6, 18, 22), Gross Petre (E : 2245—8, 44—9, 60—3 ; 7284—8, 317, 21, 5, 6, 8, 418), Simionescu Radu (E : 2425, 8, 44—7 ; 7284, 5, 8, 325, 8), Varade Petre (E : 2425—8, 44—9, 60—3 ; 7284—8, 314, 7, 8, 21, 5, 6, 8, 39, 45, 82, 5, 97, 9, 401, 6, 9, 18), cl. X *Adrian Sorin* (7314, 7, 8, 20, 2, 3, 5—8, 30, 3, 4, 7, 41, 7, 9, 51, 2, 60, 72—5, 7—9, 82, 5, 92, 3, 7, 9, 400, 2, 3, 5, 8, 10, 8, 22), Andrei Aurel (7283—6, 8—92, 6, 9, 300, 6, 20, 3, 5—7, 35, 7, 47, 79, 82, 5, 97—9, 405), *Croitoru Sibina* (7272, 6, 8, 82—9, 3, 5, 9—401, 14, 7, 8, 20—8, 33, 5, 7, 48, 60, 4, 72—9, 82, 5, 91, 4, 8, 9, 400, 2, 5), Hahn Radu (7272, 6, 82—9, 91, 2, 300), Tromaru Aurelian (7276, 82, 3, 9m 92, 8, 317, 8, 20—2, 8, 35, 75, 7, 8, 402), Udrea Mircea (7299, 324, 38, 9, 42, 73, 5—7, 9, 85, 7, 91, 402), cl. XI Boișanu Liviu (7284, 6, 7, 300, 17, 8, 25, 6, 8, 72, 5, 9), Jiletovici Iulian (7282, 3, 301, 3, 4, 312, 14, 5, 7, 8, 20, 3, 39, 43, 5), Mihai Valeriu (7283) 6, 7, 92, 6, 300, 1, 17, 8, 20, 3, 5, 6, 8), Rițiu Florin (7884, 5, 8, 9, 91, 5, 9, 300, 2—4, 9), *L. 3* cl. VIII Rosner Ștefan (E : 2412, 3, 7—9, 21, 5, 31, 4, 40, 4, 50, 2, 3, 62), cl. XI, Gănescu Octavian (7318, 20, 3, 30, 40, 72—8, 90), Popescu Mihail (7283—9, 95, 300, 17, 18, 20, 5, 6, 8, 39, 43, 72, 3, 5, 7, 8). *L. 5* cl. VI Ilea Cristina (E : 2431, 2, 4, 8, 9, 41, 4, 50, 4, 5), Maliță Mihaela (E : 2431, 2, 4, 8, 9, 41, 2, 50), *L. 6* cl. VIII Weiner Irina (E: 2410—28), cl. XI Amaricăi Richard (E : 2636—74, 6, 8, 81—9, 91, 2), Vuică Victor (7266—70 2—4, 6, 79, 91—6, 93), *L. 7* cl. VIII Agent Dan (E : 2410—3, 7—9, 21, 3, 7, 8), Niculescu, Irina (E : 2410—4, 6—9, 21, 3—8), Timon Alexandru (E : 2410, 1, 4, 6—9, 21, 3, 4, 7, 9—31, 4, 9—41, 4—7, 9, 52, 3, 7, 62), cl. IX Nicolae Iosif (E : 2425—8, 44—9, 60—2 ; 7284, 6—8, 325 ; 6, 8, 30, 7), cl. X Cornescu Mihail (7296, 9, 300, 3, 87, 22, 3, 33, 4, 64, 73, 5, 6, 82, 5, 7, 99, 402), *L. 8* cl. VI Adler Tamara (E : 2410—4, 6—8, 28), Cazimirschi Anca (E : 2410—4, 6—8, 28), Constantinescu Dan (E : 2410—4, 6—8, 28), Dincă Adrian (E : 2410—4, 6—9, 28), Marmaziu Bogdan (E : 2410—4, 6—8, 24, 8), Țințăreanu Zosim (E : 2410—4, 6—8, 28), cl. VII Floreanu Ilinca (E : 2413, 29—32, 8, 9, 41, 2), Sacerdoțeanu— Gereanu Dan (E : 2410—4, 6—8, 24, 8), cl. IX Brăcăcescu Cristian (E : 2424—6, 8 ; 7276, 84—8, 91, 6, 9—301), Montanea Daniela (E : 2425—8, 49 ; 7276, 85—8, 91, 6, 9) Nemeș Ana (E : 2424—8, 46 ; 7284, 5, 8, 325, 6, 8), Tabre Camelia (E : 2424—8, 46 ; 7284, 5, 8, 96, 9, 325, 6, 8), cl. XI Leroy Roger (7272, 6, 83—8, 91—3, 6, 9, 300, 18, 28), *L. 8* cl. XI Mihăilescu Vlad (7263, 72, 6, 82—8, 91, 2, 6, 7, 9—301), Toma Mihai (7272, 6, 83—8, 92—3, 300, 23, 5, 6, 8), *L. 10* cl. VII Brateș Nanu (E : 2410, 4, 7, 8, 24, 8, 9, 53 ; 7325) Bordei Carmen (7315, 7, 8, 9, 43, 59, 72, 3, 6—8, 81, 3—5), Pătringeanu Victor (E : 2414, 22, 4, 32, 8, 44, 53, 5), *L. 11* cl. IX Alexandru Ion (E : 2425—8, 49 ; 7267, 84—7, 317, 21, 6, 8), Andrei Viorel (E : 2427, 8, 39, 41, 4, 6, 62 ; 7285—7, 325, 6), Anton Paul (E : 2426—8, 45—7, 9 ; 7284—8, 325, 6, 8), Constantinescu Dan (E : 2425—8, 45—7, 9, 63, 8 ; 7284—8, 321, 5, 6, 8), Constantinescu Victor (2444—6, 9, 62 ; 7284—7, 325, 6, 8), Drăghici Vasile (2428, 44—6, 602, 6 ; 7284—7, 325, 6, 8), Georgescu T. (2424, 8, 44—6, 62 ; 7284—7, 325, 6, 8), Nuța Alexandru (E : 2424—8, 46 ; 7284, 6—8, 326, 8), Popescu Sorin (2424—6, 8, 62 ; 7284—7, 321, 6, 8),Popovici Mugur (E : 2424—8, 45—7, ; 7284—8, 325, 6, 8), Șaraga Dan (E : 2425, 6, 8, 46, 62 ; 7284, 5, 7, 8, 321, 5, 6, 8), Sasu Alexandru (E : 2424—8, 45, 6 ; 7284—6, 8, 366), Tudor Mauriciu (E : 2424—8, 46, 7, 9 ; 7284—8, 317), Vladu Adrian (E : 2424—6, 8, 45 ; 7284—8, 317, 21, 5, 6, 8), cl. X Baraschi Ion (7300, 57, 20, 3, 6, 8, 35, 7, 73, 77, 9, 403), Bădescu Constantin (7283—8, 99, 301, 17, 8, 20, 3, 5, 8, 30, 7), Boiu Monica (7300, 17, 8, 20, 3, 6, 8, 35, 73, 5, 7, 9), Crochina Mirela (7313, 4, 7, 8, 20, 1, 3, 6, 8, 49, 75, 6), Codreanu Constantin (7313, 8, 20, 3, 5, 6, 75, 7, 87, 402, 5, 6), Constantin Elena (7284, 7, 300, 17, 8, 20, 3, 8, 35, 7, 73, 7, 9), Constantinescu Adrian (7284—8, 300, 17, 8, 22, 3, 5, 75), Cornea Tudor (7283—8, 90, 3, 317, 8, 20, 2, 3, 5, 6, 33, 60, 6, 72—5, 7, 9, 403, 6), Dănilă Filofteia (7317, 8, 23, 8, 72, 3, 7, 9, 72, 3, 5, 9), Dinescu Liliana (7314, 7, 8, 20, 3, 6, 35, 66, 78—4, 7, 9, 402), Duțulescu Mihaela (7350, 20, 3, 6, 8, 33, 5, 77, 9, 85, 7, 92, 3, 5), Grigorescu Veta (7317, 8, 23, 6, 8, 35, 72, 3, 5, 7, 9, 402), Levardă Elena (7300, 17, 8, 20, 3, 6, 8, 35, 72, 3, 5, 7, 9, 402), Marican Ovidiu (7300, 12, 20, 3, 6, 8, 35, 7, 73, 9, 99, 403), Marodescu Mircea (7276, 8, 86, 317, 20, 2, 3, 5, 6, 75, 7, 9, 87, 402, 5), Mihăilescu Gh. Mircea (7276, 83—8, 300, 17, 22, 3, 5, 75), Motanu Mihai (7287, 317, 8, 20, 2, 3, 5, 6, 8, 75, 9, 402, 5), Müller Mariana (7284, 6, 300, 8, 23, 6, 8 ,372, 3, 5, 7—9), Persiceanu Ioana (7317—9, 23, 6, 8, 35, 72, 3, 5, 7, 9, 402), Poiană Cristina (7283, 6, 7, 300, 35, 6, 8, 72, 3, 5, 7, 9, 403), Popa Morica (7317, 8, 23, 6, 8, 35, 72, 3, 5, 7, 9, 402), Popescu Constantin (7317, 8, 20, 2,

3, 5, 6, 8, 34—6, 72, 4, 5, 7), Popescu Cristian (7286, 7, 300, 6, 8, 35, 7, 73, 7, 9, 403), Postaşu Iosefina (7317, 8, 23, 6, 8, 35, 72, 3, 5, 7, 9, 420) Preda Otilia (7300, 17, 8, 20, 3, 6, 8, 35, 7, 73, 7, 9), Rădulescu Dan (7300, 17, 20, 3, 6, 8, 35, 7, 73, 7, 9, 403), Rentea Ion (7276, 85, 317, 8, 20, 2, 3, 6, 8, 35, 77, 87, 97, 405, 6), Sporea Dan (7283-9, 300, 17, 8, 21, 3, 5, 6, 8, 72, 3, 5, 8, 9, 91, 402), Stoica Alexandru (7276, 8, 86, 314, 7, 8, 20, 2, 3, 5, 6, 35, 77, 402, 5), Şerban Lucian (7283, 6, 7, 317, 8, 20, 2, 3, 5, 6, 72, 7, 9), Sîrbescu Mihai (7283—8, 300, 57, 8, 23, 5, 75), Trandafir Constantin (7278, 86, 7, 317, 8, 20, 2, 3, 6, 35, 402, 5, 77, 9), Tudorache Victoria (7300, 57, 8, 20, 3, 6, 8, 35, 72, 3, 5, 7, 9, 402), Vasiliu Anca (7300, 17, 8, 20, 3, 6, 72, 3, 5, 7, 9, 402), cl. XI, Lutaşu Marius (7266, 8, 82, 303, 13, 4, 7, 21, 8, 24, 3, 7, 59, 62, 4, 7, 73—5, 7, 8, 84—8, 90—2, 7—402, 4, 5, 13, 8), *Teodorescu Valentin* (9326—8, 30—3, 5, 9, 40, 2—7, 56—9, 62, 4, 7—70, 2—5, 7, 8, 82—8, 90—2, 6—405, 9, 11, 3, 5—8), *L. 12.* cl. X Munteanu Constanţa (7276, 83, 6, 317, 8, 20, 3, 8, 35, 72, 7, 87, 97, 405), *L. 13* cl. XI *Petrescu D. Andrei* (6988—91, 5—7005 20, 2, 45, 50, 9, 60, 1, 6, 9, 70, 3, 7, 80, 1, 91, 119—22, 7, 9, 30, 216, 7, 9—26, 35, 7, 72, 6, 3—5, 9, 90, 1, 5, 300) P) Cl. XI Badiu (7263—72, 6, 8, 9, 81—9, 91, 301), Barbu Tănase (7284, 5 8, 317, 25—8, 39, 66, 72, 5, 7), Căpraru Valentin (7283, 5, 6, 8, 92, 300, 18, 21, 3, 5, 6, 8, 72, 3, 5, 70), Coşereanu Liliana (7284, 5, 8, 92, 317, 8, 22, 3, 5, 6, 8, 35), Hobincu Mihaela (7284, 6, 7, 93, 300, 17, 8, 23, 5—7, 75), Lupuşor Horia (7313, 37, 9, 76, 8, 97—400, 2, 5, 58, 22), Popescu Lucian (7284, 5, 7, 8, 92, 5, 300, 25, 6, 8, 33, 5, 85), *L. 15* cl. V Cernica Ruxandra (E : 2410—4, 7, 24, 8), l. IX Marinescu Nicolae (E : 2427—8, 44—7, 9, 61, 2; 7284—8, 326, 8), *L. 18* cl. X Musceleanu Ion (7266—9, 72, 4, 5, 97, 315, 20, 42, 60, 72—5, 9, 82, 5, 92, 3), Scheiu D. Alexandru (7267, 72, 6, 82—9, 91—3, 7—301), Stoicescu Titus (7267, 76, 82—8, 91—3, 7—301, 14, 7, 8, 21—6, 8, 30, 5, 9, 74, 5, 87, 92, 3, 7, 409), *L. 16* f. f. cl. VIII Drăguşin Alex. (E : 2410—4, 6—9, 22, 3, 5—8; 7272, 6, 84, 7, 9, 91, 300), *L. 21.* cl. VII Guţu Ileana (E : 2431, 2, 4, 8, 9, 41, 2, 4) cl. X Voiculescu Dan (7129, 31, 7, 42, 3, 6, 8, 53, 88, 90, 2, 5, 211, 5, P.N.) *L. 22* cl. IX Atanasiu Tr. Dragu (E : 2425—6, 45, 6, 62; 7284, 5, 7, 8, 90, 89, 300, 8, 28), Gavrilescu Ionel (E : 2425—8, 45—7, 9; 7284—7, 325, 6, 8), Sergiescu Vlad (E : 2423—8; 7267, 72, 6, 80, 4—91, 5, 6, 8—301, 8, 10), cl. XI Georgescu mihai (7263, 70—3, 6, 81—9, 91—3, 5, 9—301, 12—5, 7, 8, 20, 2, 5, 6, 30, 4, 5, 9, 42), Merlan Mihai (7263, 71—3, 4, 6, 82, 5, 9, 301) Strujan Vladimir (7267, 76, 87—93, 6, 9—3001, 13, 4, 21—3, 6, 7, 33—5, 7, 58, 60, 6, 73, 4, 97—400, 2, 4), *L. 23* cl. XI Băluţă Tudor (7267, 83, 4, 6—9, 92, 6, 302, 13—5, 7, 8, 20, 3, 5, 6, 8), Zaharia Dragoş (7272, 6, 82—8, 91, 2, 300, 1, 3, 4), *L. 24.* cl. VI Alexandrescu Silvia (E : 2450, 1, 3, 4, 6—8, 24), cl. VIII Ceauşescu Nicuşor (E : 2410, 9, 45—7, 50, 2—6, 60—3), Frişov Puşa (E : 2410, 4, 8, 21, 8, 30, 1, 4, 41, 2, 50, 5), Ilies Andrei (E : 2419, 21, 5, 9—32, 4, 8—41, 4—6, 8, 50, 2, 3, 5), cl. IX Constandache Doina (E : 2426—8, 45—7; 7284—8, 325, 6, 8), cl. IX Lutaşu Liliana (E : 2424—8, 45—7, 9; 7284, 6—8, 325, 6, 8), Sava Ion (E : 2426, 8, 44—6, 60, 2, 3; 7286, 7, 35, 6), Thaler Mara (E : 2428, 44—6, 9, 60—2; 7286, 7, 325, 6), *L. 25* cl. X Odobescu Grigore (7284—8, 300, 17, 8, 20, 3, 5, 6, 8, 35), *L. 28.* cl. VIII Arsene Vladimir (E : 2410, 1, 7, 9, 23, 4, 6—8), Stroe Marian (E : 2410—4, 7—9, 21, 2, 5, 8; 7285, 6—8), cl. IX Florescu Ion (E : 2424—6, 8, 44, 6; 7284—8, 325, 6, 8), cl. IX Grigorescu Romulus (E : 2425—8, 44—7, 9, 60, 2, 3; 7284—7, 325, 6, 8), Mîrza Constantin (E : 2425—8, 45, 6, 61, 2; 7284, 5, 7, 8, 325, 6), cl. XI Mănescu Vlad (E : 7276, 82, 3 5, 8, 91, 300, 20, 3, 6, 75, 7, 87, 91—3), *L. 32* cl. VII Celenti Dan (E : 2429—32, 4, 8—42, 5—7, 9), Popoviciu Liviu (E : 2410—21, 3—8; 7284, 5, 91), Săndoiu Mihai (E : 2410, 1, 3, 7—9, 21, 3, 7, 8; 7289), *L. 33* cl. VII Negoescu Gabriela (E : 2410, 1, 3, 7, 30, 1, 4, 9, 450, 3, 4), *L. 34* cl. VII Geaolete Petrişor (E : 2424—34, 8, 40, 1 4, 5, 50, 1, 3, 6, 7, 61), cl. IX Meteş Mircea (E : 2425—8, 55—9, 60—3; 7284—8, 325, 6, 8), *L. 36.* cl. VII A. *Logofătu C. Anca* (7284, 5, 8, 335, E : 2410—19, 21, 3—5, 7—32, 4, 8—42, 5, 6, 8, 50, 2, 3, 5, 62) cl. IX Georgescu Radu (E : 2444—9, 60—33; 7314, 7, 8, 25, 6, 8), *L. 39.* cl. VIII Guidea Cristian (2414, 9, 21—3, 5—8, 84, 7), cl. IX Vrejoiu Vlad (E : 2424, 6—8, 45, 6, 9; 7267, 84—8, 318, 25, 6, 8), *L. 40* cl. VI Constantin Radu (E : 2410, 2, 6, 7, 29—32, 4, 40), cl. IX Constantin Cornel (E : 2424—6, 8, 5, 6, 62, 3; 7284, 8, 39), *L. 42.* cl. VI Ursache Octavian (E : 2415—8, 34, 8, 9, 54—6), Cl. IX Grigoraş Stelian (E : 2425—8, 44—8; 7385, 7, 8, 326).

BUHUŞI (Bacău). *L. 1.* cl. VI Aciobăniţei Maria (E : 2454, 7, 8, 29, 31, 2, 8, 9, 41).

BUSAG (Baia Mare). *Ş. g. 20* cl. VIII Gita Cornel (E : 2412, 9, 23—5, 8, 30—4, 8, 9, 41, 4, 50, 3).

BUŞTENI (Ploieşti). *Ş. p.* cl. I Pîrlog Nicolae (E : 2429—31, 4, 40, 5, 6, 52), L. 1 cl. X Dimitriu Anton (7284—8, 92, 3, 6, 300, 25, 6, 8).

BUZĂU. *L. 1.* cl. VIII Burloi Maria (E : 2430—2, 4, 8—42), Mirea Vasile (E : 2412, 20, 3, 6, 30, 1, 4, 9, 40), Trifu Maria (E : 2431, 2, 4, 8, 9, 41—4, 8, 53—5, 60, 2), Vasilescu Paul (E : 2430—2, 4, 9, 40, 4—6), cl. IX Dăneţ Nicolae (E : 2424—8, 49; 7284—8, 3, 26) Cl. X. *Gavrilă Şerban* 7278, 82—7, 91, 3, 5, 6, 9—301, 8, 13, 7, 9, 20—6, 8, 30, 3—5, 9, 42,

64, 6, 72—5, 6—8, 82, 7, 91, 5) cl. XI Marin Ion (7282—5, 8, 92, 9, 300, 20, 3, 6, 5, 8, 39, 42, 73), cl. IX seral Murgeanu Gh. (E : 2425—8, 44—7, 62 ; 7325, 6, 8), cl. X Sararu Aurel (7267, 9, 82—9, 92, 6, 7, 9, 300, 17, 8, 22, 3, 6, 8), cl. XI Manea Nicolae (7272, 6, 8, 82—4, 95, 6, 8, 300—4, 12, 4, 7, 8, 20, 2, 3, 5, 6, 8, 37, 9, 50, 3, 3, 5), *L. 2* cl. IX Boldișteanu Tatiana (E : 2424—8, 44—7, 9, 62 ; 7284—8, 325, 6, 501), cl. X Grosmaș Laura (7282, 4—8, 91, 300, 17, 8, 23, 5, 6, 8),

BUZIAȘ (Banat). *L. 1* cl. VI Antonescu Mirela (E : 2450—4, 7, 8, 27), Drăgan Viorel (E : 2410—18, 27).

CARACAL. *L. 2.* cl. IX. Andrei Octavian (E : 2246, 7, 9, 60, 2, 7267, 86, 7, 318, 82, 85).

CARANSEBEȘ. *L. 1.* cl. VI Kelner Ștefan (2429—32, 4, 8, 9, 41, 2, 53—6), Poiană Dinu (E : 2412, 6—8, 29, 30, 2, 9, 41, 2, 50, 2, 4, 5), Vonica Alexandru (E : 2410, 3—9, 22, 8—32, 4, 40, 2, 5), cl. VII Poiană Zoe (E : 2410, 2—4, 7, 8, 20, 8, 30—2, 4, 41, 2, 4, 5), Romanescu Adrian (E : 2411, 29—32, 4, 41, 51), cl. X Geană Nistor (7278, 84, 6, 8, 300, 8, 25, 6, 8, 77, 94, 402, 4, 5), Mura Ion (7272, 6, 83—8, 91, 3, 300, 8, 9), Ștefănescu Mircea (7264, 5, 7, 89, 90, 2, 302, 8, 22, 32, 3, 6—8, 42, 47, 8, 51, 60, 2, 4, 72, 9, 5, 7, 9, 85, 91, 5, 8, 400, 2, 4, 5, 7, 8, 176).

L. 2 cl. X Bartolf Freed (727, 6, 84—9, 92, 3, 5, 6, 8, 300, 13, 4, 7, 8, 21—3, 5—8, 35, 8, 64, 6, 72, 4, 6—8, 25, 7, 97—400, 2, 4, 5), cl. XI Brebu Ion (7217, 8, 25, 8, 39, 72—4, 7, 83—5, 90).

CALAN (Hunedoara), *L. 1* cl. VIII Schikerle Gerlinde (E : 2432, 4, 8, 41, 2, 52, 5, 62). cl. XI Pally Edelh (7282, 3, 6, 6, 7, 317, 8, 20, 5, 6, 8, 37, 9, 45, 72, 3, 5, 7, 8, 82, 5), Cubineț (7264—6, 8, 78, 9, 81, 9, 302, 8, 13, 22—4, 36, 7, 43), 62, 4, 72—5, 7, 83, 4, 7, 91, 2, 5, 8, 400, 2, 4, 5).

CĂLĂRAȘI (București). *Ș. g. 1* cl. VII Horth Cristiana (E : 2410—3, 5, 7, 8, 29, 31, 2, 8, 9, 41, 2). cl. VIII Becheranu Lucian (E : 2410, 1, 21, 3, 6—8 ; 7287). *L. 1.* cl. IX Gaciclevici Mihaela (E : 2425, 6, 8, 44—9, 60—3 ; 7284, 5, 7, 8, 325, 6, 8), Gănciulescu Constantin (E : 2425,—8, 44—6, 60—3 ; 7326, 7), L. 2 cl IX Ștefănescu Radu (E : 2444—7, 9, 50—3 ; 7325, 6, 8, 30, 9, 97, 9), cl. X Oancea Constantin (7284—8, 317, 8, 22, 5, 6, 66).

CĂLIMĂNEȘTI (Argeș). *L. 1* Sandu Marian (E : 2419, 21, 3—5, 7, 8, 44—6), cl. IX Budulaci Ioana (E : 2425, 8, 45, 5—6 ; 7284—8, 325, 6, 8), Zgavarogea Mihai (E : 2425, 7, 8, 45, 6 ; 7284—8, 325, 6), cl. XI Taloș Anca (7263, 7, 82, 3, 301, 3, 14, 7, 8, 20, 3, 42), Tamcencu Alex. (7263, 6—9, 71, 3, 82, 3, 96, 303, 13—5, 7, 8, 20, 3, 37, 42).

CĂLUGĂRENII VECHI. *Ș. g.* cl. VIII Cartoș Olga (E : 2410, 1, 3, 9, 21, 7, 31, 2).

CELARU (Oltenia). *Ș. g.* cl. VI Petcu Marian (E : 2412, 28, 32, 8, 9, 42, 50, 3—5) cl. VII Marcu Elena (E : 2410—3, 8, 32, 8, 9, 41), Păuna Gh. (E : 2410—3, 18, 25, 31, 2, 4, 8), Popa Victor (E : 2410—3, 8, 34, 8, 41, 2), Tudor Marin (E : 2411, 3, 32, 4, 8, 9, 41, 2), cl. VIII Ghiță Tache (E : 2410—3, 8, 31, 4, 8, 9, 42).

CEICA (Crișana). *Ș. g.* cl. VII Coita Vasile (E : 2430, 1, 9, 41, 4, 5, 50, 3, 5).

CHIȘINĂU — CRIȘ — (Crișana). *Ș. g* cl. VI Nedelcu Radu (E : 2424—32, 4, 8, 9, 41, 2, 4).

CIOLĂNEȘTI (București) *Ș. g.* cl. VIII Dîrnă Constantin (E : 2410, 1, 3, 7—9, 23, 7, 8, 45, 6).

CISNĂDIE (Sibiu). *L. 1.* l.cl. IX Neagu Tudor (E : 2426—8, 44—7, 9, 60, 2 ; 7325, 6, 8).

CÎMPENI (Cluj) *Ș. g.* cl. VIII Miheț Gh. (E : 2425, 8, 45—7 ; 7284, 5, 325, 6, 8), L. 1 D. Traian (7263, 6, 82, 3—7, 9, 91, 3, 300, 1, 3, 4, 8, 17, 8, 20—3, 5, 7, 35, 9, 40, 3, 5).

CÎMPIA TURZII. *Ș. g. 14* cl. VII Brudan Ana (E : 2432, 8, 9, 41, 2, 50, 3—5), Suciu Mariana (E : 2432, 8, 9, 41, 2, 50, 3—6), Ungureanu C. Vasile (E : 2432, 8, 9, 41, 2, 50, 3—5), L. 3 cl. X Moraru Ilie (7283, 7, 91, 9, 300, 18, 22, 3, 75, 7, 402, 5), Selegeanu Horia (7283—8, 92, 314, 8, 20, 2, 5, 6, 8, 35, 75, 85, 7).

CÎMPINA. *L. 1.* cl. VI Albinescu Cristina (E : 2411, 3, 5, 29, 31, 2, 9, 43), Cernat Adriana, Chivu Eugen, Frîncu Constantin, Istrate Radu, Manta Cristinel, Manu Adrian, Spătaru Florica, Stelian Leonard (2410—3, 299—31, 4), Stoican Aurel (E : 2410—3, 29—31, 4, 9, 41), cl. VIII Ionescu George (E : 2429—2, 4, 8, 40, 4, 5). cl. Androne Tudor (2425, 7, 8, 44—7, 60, 2 ; 7284—8, 300, 17, 8, 21, 3, 5, 6, 8), Moraru Ion (E : 2425, 7, 8, 44, 5, 7, 62 ; 7285, 7, 8, 325, 6), Sădeanu Mihai (E : 2428, 46, 7, 60, 2 ; 7284, 5, 7, 8, 318, 26, 8), cl. X Ivașcu Florin (7283, 8, 92, 5, 308, 13, 7, 8, 21—3, 5, 6, 32, 4, 5). L. 2 cl. IX Căpranu Marian (E : 2426, 8, 44—7, 9, 60—3 ; 7284—7, 57, 21, 4—6, 8), Dochia Aurelian (E : 2424, 5, 8, 45—7, 62 ; 7284, 5, 8, 32, 8, 385), Matei Alexandru (E : 2424—6, 8, 44—7 ; 7284, 5, 8, 327), cl. X Ungureanu I. Emil (7284—8, 300, 17, 8, 20, 1, 3, 5, 6, 8, 79, 97, 8, 402). >

CÎMPULUNG MOLDOVENESC. *Ş.g. 3* cl. VIII Nichiteanu Carmen (E : 2429, 32, 8, 40, 1, 5—7), *L. 1* cl. IX Tătaru Florin (E : 24—6, 8, 44—6, 61 ; 7285, 8, 325, 8), cl. X Ciobanu Mihai (7283—8, 92, 3, 300, 17, 8, 23, 6, 33), Dragotă Stelian (7312, 4, 7, 8, 20—2, 5—7, 32, 52), Popescu Ovidiu (7812, 4, 7, 8, 20—8, 30, 2, 3, 5, 9, 41, 52, 64), Scfhörf Solomon (7287—8, 91, 3, 300, 23, 25, 6, 8, 85, 7), L. militar cl. X Ciulea Victor (7234—8, 300, 18, 23, 5, 6, 8, 35, 75, 7), Florea Vasile (7272, 6, 83, 5, 92, 9, 300, 1, 9, 17, 8, 22, 3, 5, 6, 8), Niță Gică (7276, 99, 300, 20, 3, 72—8, 9, 91), Sabau Titan (7266, 93, 301, 12, 4, 7, 8, 20, 3, 5—8, 31, 5, 7, 9, 42, 8, 60, 4, 62—9, 87, 91, 5, 8—400, 2—5,), Ștefan Constantin (7272, 6, 83, 6, 7, 92, 8—300, 18, 23, 5, 6, 8), Turcu Anghel (7283—7, 99, 317, 8, 25, 8, 35, 7), Ungureanu Dragoș (7263, 82, 8, 92, 3, 9—301, 3, 4, 26, 8, 42), cl. XI Ciopoaia Vasile (7284—8, 92, 3, 8—301, 3, 8, 13, 4, 7, 8, 20, 2, 3, 5, 6, 8, 35, 9, 42), Crișan Theodor (7263, 83, 5, 300, 3, 17, 8, 20, 5, 39, 72—5, 7, 84, 5), Mototolea Fănică (7266, 82—7, 91—2, 300, 1, 14, 7, 8, 20, 3—6, 8, 35, 7, 42, 3, 8, 64, 72, 3, 5, 77, 8, 83, 4, 9—91, 402, 3), Tcaciuc Gh. (7266, 84, 5, 7, 95, 6, 325, 6, 8, 39, 72, 3, 5, 6, 9).

CÎMPULUNG MUSCEL. L. 2. cl. X Olteanu Dumitru (7284—8, 300, 25, 6, 8, 9, 72, 3), cl. XI Filipoiu I. Dan (7276, 82, 3, 6, 7, 92, 3, 5, 9, 300, 9, 26, 8, 35, 77, 8, 82, 5).

CLUJ. S. *g. 2* cl. VII Fulfer Carmen (E : 2419—3, 6, 40—2), cl. VIII Comănescu Sorin (E : 2410—4, 6—21, 3—8), *L. 1* cl. VIII Mureșan Alexandru (E : 2413, 4, 7, 9, 21, 4, 8, 31, 2, 4, 9—41, 5, 50, 5, 62), cl. IX Sava Petru (E : 2425—8, 45, 9 ; 7284—8, 325, 8), *L. M. Eminescu* cl. X Weisz Teodor (7278, 83—5, 8, 320, 3, 4, 72, 5—8, 87, 91), L. G. Mariției cl. V Berceanu Dorin (E : 2410—4, 29, 31, 2), Rădulescu Mircea (E : 2411—3, 5, 28—30, 4, 50, 3), Rădulescu Șerban (E : 2411, 3, 21, 3, 8, 30—2, 4, 9, 41, 52, 5), *L 4* cl. V Rădulescu Rodică (E : 2410—4, 32, 50, 3—5), cl. VIII Bota Rodica (E : 2411—3, 7—9, 28—31, 4, 8—41), Mureșan Felicia (E : 2412, 31, 2, 8, 9, 41, 2, 55), Totoescu Monica (E : 2430—2, 4, 8, 9, 41, 2, 4), *L. 5* cl. VI Băjănică Stela (2429—32, 4, 40, 4, 5), cl. IX Berceanu Cornelia (E : 2425, 8, 44—9, 62 ; 7284, 325, 8), *L. 8* cl. V Popescu Mircea (E : 2410—3, 24, 9,—31, 4), cl. VI Grigore L. Rodica (E : 2411—3, 6, 31, 2, 4, 8), Stamate Mircea (E : 2417, 24, 32, 8, 41, 3, 54, 5), Toma Tit. Liviu (E : 2411—3, 24, 5, 31, 4, 41), Zamfir Felicia (E : 2411—4, 7, 8, 34, 9), cl. VII Gräf Ladislau (E : 2419—23, 5, 40—2), Kaitar Maia (E : 2410—9, 21—6, 8), Orgă Horea (E : 2411—3, 7, 8, 30—2, 8, 9, 41, 2, 50, 3—5), cl. VIII Miclescu Lucia (E : 2431, 9—41, 50, 3—5, 62), Sempronia Filipoi (E : 2419, 28, 38, 9, 41, 5, 50, 3, 5, 62), Vasiliu Liviu (E : 2430—2, 8, 9, 41, 2, 50, 2, 5, 62), cl. IX Cadar Ileana (E : 2425, 6, 8, 44—6, 60, 2, 3 ; 7286—8, 325), Chețianu Radu (E : 2425, 7, 8, 45, 7, 62 ; 7286—8, 318, 26, 8), Fischer Mariana (E : 2425, 6, 8, 44—6, 9, 62 ; 7286, 7, 325, 8), Răcășan Liviu (E : 2428, 44, 5, 7, 60, 2 ; 7287, 317, 25, 6, 8, 39), Stadler Elisabeta (E : 2427, 8, 44, 62 ; 7286, 7, 325, 6, 8, 39), cl. X Damian Dorin (7284, 5, 8, 92, 317, 8, 22, 3, 5, 6, 8, 35), cl. XI Scurei Stelian (7266—73, 5, 6, 8, 82, 3, 91, 2), *L. 10* cl. VIII Szitran Vasile (E : 2425—8, 44—9), Iusan Vasile (E : 2425—8, 44—9), *L. 11* lcl. VII Sagyebó Ladislau (E : 2410—3, 7, 8, 22, 6), cl. IX Getri Klara (E : 2424—8 ; 7267, 72, 6, 84—8), Kalmoș Katalin (E : 2424—8 ; 7276, 84—8, 91, 5), Pap Catalin (E : 2427, 8, 44—6, 9 ; 7287, 8, 91, 325, 6, 8), cl. XI Szácz Unige (7267, 9, 72, 6, 82—9, 91, 2, 5, 9, 300), *L. 12* Vitcă Gavril (7278, 83, 4, 7, 8, 90, 6, 9, 301, 8, 17, 26, 8), *L. 14* Făgărășan Mihail (E : 2410—3, 5, 29, 31, 2), *L. 15* cl. VII Petroșanu Rodica (E : 2412, 3, 24—6, 8, 50, 2—7), cl. VIII Iancău Marian (E : 2411—3, 7—9, 24, 5, 8, 30—2, 4, 8, 40, 1, 5), cl. IX Moldoveanu Mariana (E : 2425, 7, 8, 44—7, 60, 2 ; 7288, 325, 8).

COGEALIC (Dobrogea). *L. 1* cl. IX Negulescu Adriana (E : 2424—8, 44—6 ; 7284—8).

CONSTANȚA. *Ș. g. 4* cl. VIII Tones Zisu (2430—3, 4, 8—41, 5—9), *Ș. g. 24* cl. VII Busuioc Roman (E : 2430—2, 4, 40, 50, 3, 61), Drăghici Dumitru (E : 2430—2, 4, 9, 53—5), Drapol Mircea (E : 2429—32, 4, 8, 9, 41, 2), Vilcu Al. Iulian (E : 2429—31, 4, 9—42, 50, 3), Nazarie Cristian (E : 2430—2, 4, 8, 9, 41, 54, 5), L. 1. Anghel Elena (E : 2429—31, 4, 8, 9, 41, 2, 50, 2, 3, 5), cl. VII Dongan Mihaela (E : 2411—4, 6—8, 28, 32, 8, 9, 41), cl. IX Cîndea Doina (E : 2425, 6, 8, 45—7, 61, 2 ; 7284, 5, 8, 325, 64, 99), Farcaș Constanța (E : 2425—8 ; 7276, 81, 4, 5, 7, 8, 96, 317, 25), cl. X Chiriac Călin (7265, 82—6, 8, 9, 93, 7, 8, 300), Letea Alexandru (7292, 317, 8, 22, 3, 6, 8, 301, 33, 4, 7, 78), cl. X Mîndruță Rodica (7272, 8, 314, 34, 60, 4, 6, 72—5, 7), Ștefănescu Radu (7284, 7, 90, 2, 300, 23, 5, 6, 33, 4, 74, 84, 403) *L. 4* cl. X Nițu Nicolae (7276, 84—9, 93, 5, 300, 1, 25, 6), Vasilescu Smaranda (7272, 6, 83, 4—9, 93, 5, 9—301).

CORABIA (Oltenia). *L. 1* cl. IX Belu Vasile (E : 2424, 5, 7, 8, 54—7 ; 7284, 5,325, 6, 8), cl. X Dinulescu Alex. (7283, 6, 8, 9, 92, 9, 317, 8, 20, 2, 3, 5, 6, 8, 35, 73), 5, 7, 8, 91, 405), Filip Nicolae (7266, 78, 83—5, 96, 300, 1, 4, 12, 4, 7, 8, 20, 2, 3, 5, 72, 83).

CORBENI (Argeș). *L. 1* cl. X Vlaicu Elena (7291, 2, 5—301, 8, 23, 32, 4, 5, 42, 72, 4, 85).

COSTEȘTI (Argeș). S. *g.* cl. VIII Stoica Marinela (E : 2432, 6, 8, 41, 2, 6, 7, 50, 2—5, 60—2).

COSTISA (Bacău), S. *g.* cl. VIII Stan Ion (E : 2410—3, 7, 9, 21, 9, 31, 2).

CRAIOVA, S. *g. 9* cl. VII Voicu Eugen (2410, 1, 3, 6—8, 24, 8), S. g. 21 Petruț Sofia (E : 2413, 7, 8, 21, 8, 30, 4, 50), d. r. 24 cl. VII Epingeac Liviu (E : 2429—32, 7, 9, 41, 2, 53—5), Absolventă Teodorescu Ligia (7264, 79, 82, 6, 7, 303, 20, 2, 3, 64, 6, 7, 72, 3), *L. 1* cl. VII Pogonaru Florin (E : 2410—3, 6, 8, 28, 9), cl. IX Sotropa Dan (E : 2444—6, 61—3, 76, 8 ; 7325, 8, 37, 8), Teica Constanța (E : 2425—8, 46 ; 7281—8, 325, 6, 8), cl. X Bantă Valeriu (7272, 6, 82—301, 8), Damian Viorel (7272, 82—9, 92, 3, 5, 6, 8—301), Diamandescu Aurel (7272, 6, 8, 82—93, 95, 6, 9—301), Neagu Gabriel (7269, 72, 6, 82—93, 6, 9, 301), Pănaiu (7282—7, 9—93, 65, 6, 9, 300), Popescu Adrian (7272, 83—93, 5, 6, 9—301, 8), Popescu Leonard (7272, 6, 8, 82—9, 91—3, 5, 9, 300, 14, 7, 20—2, 5, 6, 28, 42), Sprincenatu Constantin (7283, 4, 6—9, 91, 300, 1, 18, 20, 3, 5, 6), *Tutunea Ion* (7263, 6, 78, 82—8, 91, 9, 300, 1, 3, 4, 17, 8, 20—3, 5, 6, 35, 9, 40, 5, 6, 9, 60, 2, 72, 3, 5—8, 83, 4, 99, 402, 9, 16, 22), Turcu Ilie (7272, 6, 82—7, 9—91, 3—5, 7, 301, 5, 8, 13, 4, 7, 8, 22, 26, 30, 5, 42), Tepuș Nicolae (7269, 72, 82, 3, 7, 8, 90, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 301), cl. XI Dediu Luminița (7213, 7, 8, 20, 72—7, 9, 82, 4), Pascu Doina (7292, 301, 3, 17, 8, 20, 2, 3, 6, 8, 39, 43). *L. 2* cl. IX Căldăraru Florin (E : 2424—8, 45—7, 9 ; 7276, 84—8, 317, 8, 21, 25, 6, 8), Petrescu Luiza (E : 2424—6, 8, 44—6, 62 ; 7284—8, 326, 8), Pîrvu Lucreția (E : 2425, 8, 45, 6, 9 ; 7284, 325, 6), Pîrvulescu Tiberiu (E : 2427, 8, 45—7, 9 ; 7284—8, 4325, 6, 8), Predescu Virgil (E : 2425, 7, 8, 45, 6, 60, 2 ; 7285—8, 328), Pretorian G. D. (E : 2426—6, 35—8, 9 ; 7276, 86, 7, 317, 26, 8), Rada Constantin (E : 2425—8, 45—6, 60—2 ; 7286, 7, 317), cl. X Guran Tiberiu (7267, 9, 76, 82—8, 91, 2, 5, 9, 1, 17, 8, 20, 2, 3, 5—8, 33, 5, 7, 8, 42, 64, 72, 3, 5, 7, 9, 98, 400, 2, 5, 10), cl. XI Bușe Gabriela (7290, 6, 8, 300, 3, 4, 17, 8, 20, 3, 5, 6, 8, 39), *L. 3* cl. VIII Călinescu Liliana (E : 2431, 2, 4, 7—9, 41, 2, 4, 6, 7, 9), Marinescu Rodica (E : 2411—3, 9, 21, 38, 9, 41, 2, 5, 52—5, 7, 9, 62), cl. IX Dinulescu Ioana (E : 2424—8, 45, 6, 62 ; 7284 — 8), cl. X Alexandru Marian (7226—8, 92, 7, 9, 301, 17, 23, 5, 8, 64), Bădescu Georgeta (7283, 5, 6, 8, 92, 300, 18, 21, 3, 5, 6, 8, 72, 5, 7, 9), Bălan Adamis (7283—8, 92, 317, 8, 21—3, 5, 6, 8, 66, 72, 7), Brătoi Oon (7283—8, 92, 317, 8, 22, 3, 5, 6), Burnea Ileana (7282, 43, 5, 7, 8, 317, 8, 216, 8, 373, 7, 91), Dincă Aneta (7283, 4, 6—8, 92, 300, 14, 7, 8, 21—3, 6, 8, 72, 3, 5, 7, 9), Donciu Mircea (7283, 7, 92, 9, 300, 18, 20, 3, 5, 6, 8, 77), cl. X Calciu Georgeta (7279, 86, 7, 92, 301, 3, 6, 28, 32, 3, 5, 77), Grigore Marcel (7283, 6, 7, 92, 9, 318, 20, 3, 5, 6, 64, 77, 9), Popa Ion (7283, 3, 6, 97, 301, 17, 8, 20, 3, 5, 6, 8, 42), Popescu Monica (7283, 300, 20, 2, 3, 8, 64, 6, 73, 5, 7, 9), Teodorescu Dalila (7283, 314, 7, 22, 3, 6, 64, 72, 3, 5, 7—9), Vaneica Oprea (7283—8, 92, 314, 7, 21, 3, 6, 66, 72, 5, 7), cl. XI Călinescu Mignola (7268, 72, 6, 82, 9, 91, 7, 9, 339, 73, 5, 7), Paveliu Florica (7278, 83, 7, 9, 92, 5, 7, 9—301, 6, 14, 7, 20, 2, 3, 6, 8, 30, 5, 9, 42, 52, 6, 62, 72, 3, 5—7, 82, 4, 94), Zlătian Radu (7265, 6, 8, 82, 4—7, 9, 92, 5, 8—300, 1, 2, 4, 8,), L. 4 cl. IX Dobrescu Ecaterina (E : 2425, 8, 44—7 ; 7284, 6—8, 325, 8), Mușat Petre (E : 2425, 8, 44—6 ; 7284, 5, 7, 8, 325, 6, 8), Trifu Ioana (E : 2409 25, 8, 44—6 ; 7284, 6 — 8, 326, 8), Vasilescu Valeria (E : 2425, 8, 44—7, 7284, 6—8, 326, 8), cl. X Cioc Pia (7216, 7, 22—4, 83—5, 8, 300, 14, 20), *L. 5* c. X Mareș Tatiana (7284—7, 91, 300, 1, 21, 23, 5, 6, 8), Dincu Alexandra (7272, 6, 82, 3, 5, 6, 8, 91, 2, 5, 9, 300, 17, 8, 20, 2, 3, 5—8, 35, 7, 49, 64, 72, 3, 5, 8, 9, 405, 10).

CRICOV (Ploiești) S. *g.* Aldea Constantin (2430, 1 4, 8—41, 5, 52).

CUDALBI (Galați) Absolventă Tatu Victor (E : 2410, 1, 4, 7, 20, 2, 9, 31, 4,4 6. 53), S. *g. 1* cl. VIII Savo Sanda (E : 2411—4,7, 8, 20, 4, 31, 4, 53), Vitănescu Maria (E : 2411, 2, 6, 6—8 m, 20, 2, 4, 9, 31, 2).

CUT (Hunedoara). S. *g.* cl. VII Bitui Vasile (E : 2412, 3, 24, 8, 31, 4, 9, 41, 2), Vasiu Rafila (E : 2412, 3, 32, 4, 8, 9, 41, 2).

DABOENI (Oltenia). *L. 1* cl. IX Negruțoiu Mișu (E : 2425—8, 44—6, 62 ; 7286—8, 328, 39).

DĂBULENI (Oltenia). *L. 1* cl. X Dinu Nicolae (7272, 6, 82, 3, 95, 9, 300, 17, 20, 3, 5, 8, 35, 72, 3, 5, 9, 98, 9, 402).

DEJ. S. *g. 1* cl. VIII Vaida Liviu (E : 2410—3, 7, 8, 21, 5, 8), S. *g. 2* cl. VIII Pop Dorin (E : 2419, 21, 3, 5, 8, 44, 5, 63), *L, 1,* cl. VIII Aczél Margareta (E : 2410, 1, 3, 4, 9, 23, 7, 8), Incze Janoș, (E : 2410—4, 7—9, 21, 8), Szilagi A. (E : 2410, 2, 3, 4, 7—9, 21, 8), Vary Istvan (E : 2410—4, 7—9, 21, 8), Varha Lajoș (E : 2410—4, 7—9, 21), cl. IX Gruia Lucian (E : 2424, 5, 7, 8, 45, 9, 63 ; 7284—7, 326), Matis Ștefan (E : 2424, 6—8 ; 7—272, 6, 84—8, 91), cl. X Giurgea Laurențiu (E : 7283—8, 317, 8, 20, 2, 3, 5, 6, 8, 35, 402), L. 2 cl. VIII Morariu Marcel (E : 2430—2, 4, 8, 40—2, 5, 6), Rusu Ioan (E : 2410, 2—4, 8), 9, 21, 3, 5, 6, 30—2, 4, 41, 55, 60, 2), Teneș Nicolae (E : 2426—8, 45, 6, 9, 62, 3 ; 7284—7 326), cl. XI Smărăndescu Cecilia (7266, 8, 75, 8, 83—7, 91, 30, 20, 5, 6, 36).

DETA. *L. 1* cl. V Fettich Iosif (E : 2410—4, 30—2), Roth Mariana (E : 2410—4, 30, 1, 50).

DEVA. *L. 1* cl. IX Mihăiță Nicolae (E : 2445—9, 60—3; 7267, 84—8, 91, 300, 17, 8, 20, 4—8, 37, 73, 7, 85, 7, 97—400, 18, 22).

DOLHASCA (Suceava). *L. 4* cl. X Iosubescu Dan (7278, 82, 3, 7, 93, 5, 300, 17, 20, 3, 5, 6, 8, 37, 72, 3, 5—8, 403).

DOROHOI. S. *g. 1* cl. V Lovric Elena (E : 2410, 1, 3, 4, 24, 30—2), Leizorovici (E : 2410—3, 5, 6, 24, 5), cl. VI Beloșică Aurel (E : 2410—3, 17, 8, 20, 8), Celineagră Gabriela (E : 2410—8, 28), Mocuc Veronica (E : 2410—3, 6—8, 28), Păvăloaie Silvia (E : 2410—3, 3, 7, 8, 28), cl. VIII Corniciuc Dumitru (E : 2430, 1, 8, 41, 2, 50, 3, 61, 2; 7328), Manoleasa Dumitru (E : 2410—4, 7, 8, 20, 1, 7, 8), Rosenberg Hermina (E : 2410, 1, 3, 4, 7, 8, 20, 21, 3, 7, 8), Toma Emil (E : 2410—4, 7—21, 7, 8), Ungurean Dan, Vavaru Silvia, Vătămanu Gh. (E : 2410—4, 7—21, 7, 8), S. *g. 2* cl. VIII Avram Ghidi (E : 2413, 9, 21, 3, 8, 31, 2, 41, 2, 53, 62), Davidsoki Jeni (E : 2411—3, 28, 31, 2, 89, 41, 54, 5), Mirea Mihaela (E : 2411, 3, 21, 38, 52, 4, 5, 62), cl. VIII Scheib Etich (E : 2430—2, 8—41, 5, 50, 2—5, 60, 2), cl. IX Jalulia Petru (E : 2424—8, 49, 60, 2, 3; 7284—8, 326).

DRĂGANU (Argeș). S. *g.* cl. VIII Diaconescu Natalia (E : 2410—4, 6—9, 23—5, 8, 50, 3—5, 60, 2).

DRĂGĂNEȘTI OLT. *Ș. g.* cl. VI Mihalache Florica (E : 2429, 31, 2, 4, 39, 41, 2, 4), cl. VII Băzăvan Constantin (E : 2429—32, 4, 8, 41, 2, 4, 5, 53), cl. IX Ionescu Dumitru (E : 2426—8, 46; 7284—8, 325, 6, 8).

DRĂGĂNEȘTI DE VALE (București) S. *g.* cl. VIII Stancu Marian (E : 2411, 3, 5, 8—21, 4—6, 8).

DRĂGĂȘANI (Argeș). S. *g. 2* Boiangiu Doina (E : 2410—4, 6—8), *L. 1* cl. IX Popescu Mircea (E : 2425—8, 45—7; 7284—8, 328), cl. X Gurta Dan (7283—4, 6—8, 91, 2, 5, 300, 17, 23, 5, 6, 8, 72, 5, 7), Mărgineanu Gh. (7284—8, 91, 2, 300, 22, 3, 5, 6, 8), Szănescu Gh. (7283—8, 92, 3, 6, 300, 1, 18, 23, 4, 6, 8, 72, 7—9), Tîrca C. (7318, 21—3, 65, 6, 8, 64, 73—5, 8—400).

DUMBRĂVENI (Oltenia) S. *g.* cl. VI Gheorghe Marieta (E : 2428, 9, 31, 2, 8, 41, 53, 4), cl. VII Ciucă Ion (E : 3411, 3, 7, 8, 31, 2, 4, 8, 9, 44, 5), Drăgan Cornelia (E : 2412, 3, 28, 9, 32, 4, 8, 9, 41, 2, 4), Edu Cornelia (E : 2410, 3, 7, 32, 4, 8, 9, 41, 2, 4), Popescu Valentina (E : 2412, 3, 28, 32, 4, 8, 9, 41, 2, 4; 7325), Vulpe Veronica (E : 2412, 3, 24, 9, 31, 2, 4, 8, 9, 41, 2; 7235), clcl. VIII Ciucu Ionia (E : 2413, 7, 9, 23, 4, 32, 9, 45; 7326, 8), Morancea Aristel (E : 2412, 3, 9, 23, 7, 31, 2, 4, 9, 4; 7287, 226), cl. X Teodorescu Marilena (7286—301, 17, 8, 26, 8, 75, 7, 9, 98, 400).

FĂGĂRAȘ. *L. 1* cl. VIII Laschescu Dorin (E : 2410—4, 6—9, 21, 3, 8), cl. X Sajin Gh. (7282—5, 8, 91, 4, 300, 17, 8, 22, 5), cl. XI *Ortocol Gheeorghe* (7359, 60, 4, 6, 9, 72, 3, 5, 7, 8, 80, 4, 5, 9, 91, 5, 8, 9, 402—4, 6, 9, 10, 6, 23—8, 30, 23, 3, 49, 50, 2, 5, 65 p.)).

FĂLTICENI. *L. 2* cl. IX Mihăilescu Gh. (E : 2425—8, 44, 6, 62; 7284—7, 6, 8), Popa Gh. (7314, 22, 35, 9, 43, 5, 56, 73, 5—9, 83—5, 90, 421), Sitaru Mihai (7267, 7, 8, 84, 6, 7, 9, 92, 5, 9—301, 3, 4, 2, 4, 20, 3, 6, 8, 4, 5), cl. XI Podaprigora Nicolae (7263, 6, 82, 3, 6, 7, 91, 2, 9—302, 4, 11, 2, 4, 5, 7, 8, 22, 3, 6—8, 33, 5, 8, 9, 43, 3), Gorovei Sorin (E : 2418——20, 3, 5—8; 7216—8, 22—4, 84, 5, 8, 91, 2).

FETEȘTI (București). *L. 1* cl. IX Bratu Elena (E : 2428, 44—7, 9, 62; 7286—8, 325, 8), cl. XI Marinache Ion (7283, 94, 300, 3, 4, 39, 60, 72, 3, 7, 8, 408, 11, 2).

FETEȘTI-GARĂ. *L. 1.* cl. X Negreanu Tache (7283—8, 90—301, 7313, 17, 8, 20—3, 5—8, 33—5, 7, 48).

FIENI. S. *g.* cl. VI Holban Cristiana (E : 2412, 5, 6, 8, 22, 8, 30—2, 7, 9, 41, 2), Jipescu Liliana (E : 2412, 30—2, 8, 9, 41, 2), *L. 1* cl. IX Fisiteanu Liviu (E : 2426, 8, 44—6, 9, 61, 2; 7284—7, 326, 8), Mircescu Gh. (E : 2426, 44—7, 9; 7284, 5, 91, 357, 8, 21, 5, 6, 8, 39), Sencovici Gabriela (7267, 85—8, 325, 6, 8; 2444—9), cl. X Zarioiu Gh. (7314, 7, 8, 25, 6, 8, 30, 2, 5, 6, 61, 72, 7).

FILIAȘI (Oltenia) Cl. X *Băluță Constantin* (7267, 72, 5, 6, 8, 82—93, 5—301, 5, 9, 11—14, 17—39, 42, 6, 7, 51, 2, p) Abs. Păunescu Viorel (7287, 8, 301, 26—8, 32, 3, 5, 7, 42, 3, 9, 405),S. *g.* cl. VII Oprescu Irinel (E : 2410—3, 24, 9, 30—2, 4, 8, 9, 42, 51).

FOCȘANI. *L. 1* cl. VII Nour Lucian (E : 2412, 3, 31, 2, 4, 8, 53—5), cl. VIII Baner Alexandru (E : 2410, 1, 4, 5, 7—9, 23, 5, 6, 8, 30—2, 4, 8, 9, 41, 2, 4, 8, 52, 3, 60, 2).

FRINCEȘTI (Argeș) *Ș. g.* cl. VII Paraschiv Dumitru (E : 2410—3, 6—8, 20, 2, 4).

FRUNTIȘENI (Bîrlad). S. *g. 16* cl. VI Anton Georgeta, Patrichi Anica (2410—3, 5, 6, 28, 32), cl. VII Baciu Tasia, Chirica Gh., Onel Alexandru, Savin Aneta. Spiridon Elena (2410—3, 5—7, 28).

GĂIEȘTI (Argeș). S. *g.* cl. VIII. Sova Teofil (2410—5, 7—9, 21, 3, 6, 7), *L. 1* cl. IX Constantinescu Constantin (2425, 8, 45, 6, 9, 62, 3, 7284—8, 325—6), cl. XI *Prodan Ion*

(7282, 4—8, 91, 2, 5, 7, 9, 300, 1, 4, 12—4, 7, 8, 20, 2, 3, 6, 8, 35, 9, 40, 2, 60, 2, 72, 3, 5, 8, 9, 85), Prundeanu Valentin (7266, 8, 84, 8, 92, 5, 9, 312—5, 7, 8, 20, 2, 3, 6—8, 35, 9, 40, 2, 5, 60, 2, 72—9, 82—5, 7—9, 414),

GELARU (Oltenia) *Ş. g.* cl. VI Răduică Ecaterina (2410—3, 8, 32, 4, 8, 9, 41, 2).

GHERLA. *L. 1.* cl. X Baumgarten Alexandru (7272, 6, 84—8, 91—3, 5, 6, 9, 300). Lollai Martin (7284—9, 11, 300, 1, 23, 5, 8), Sipoş Ioan (7320, 2, 3, 5—8, 33—5, 38, 42).

GHIJOSA DE SUS (Braşov), S. *g.* cl. VIII Pîrvu Maria (2499, 30, 4, 8, 9, 41, 2, 4, 53, 60, 2).

GHIZDARU (Bucureşti) *Ş. g.* cl. VII Coată Ion (2429—32, 38, 9, 41, 2). Păduraru Dumitru (2429—32, 4, 8, 8, 41, 2).

GALAŢI S. *g. 21* cl. VII Beldie Carmen (2410—4, 7, 31, 9, 41), Vîrlan Maria (2429—32, 4, 8, 9, 41, 2), cl. VIII Costin Elena (2432, 4, 8, 9, 41, 2, 4—7, 50, 4, 5, 62). Mocanu Florică (2429, 31, 2, 4, 8, 9, 41, 2, 55, 60, 2), S. *g.* 23 Dinu Dumitru (2429—32, 4, 8, 9, 41—3, 50, 2—4), S. *g. 24* cl. VII Botea Mioara (2430—4, 8 , 9, 41, 2, 4), Sacter Victoria (2411, 3, 30, 2, 4, 8, 9, 41), Sofronie Vasile (2410, 2, 3, 30—2, 4, 8, 9, 41,) S. *g. 25* cl. VI Chiriac Constantin (2412, 3, 8, 31, 2, 4, 8, 9, 41, 2, 5, 54), S. *g. 26* cl. VII Buiuca Monica (2410—8, 20, 4—6), Constantinescu Mihail (2411—3, 29—31, 4, 8, 9, 41), cl. VIII Dăscălescu Luminiţa (2411, 3, 4, 7—9, 21, 3, 4, 8), S. *g. 28* cl. VII Claude Cristian (2430, 1, 4, 8, 9, 41, 2, 54, 5), cl. VIII Budu Nicolae (2410—5, 7—9, 21, 7284), Hodos Ionel (2411—3, 9, 29—31, 4, 9m 41, 60), L. 1 cl. IX Coja Mircea (2424, 5, 7, 8, 46, 61, 2, 7284, 5, 7, 8, 325, 6, 8), Katz Marian (2427, 8, 46, 9, 61, 2, 72, 84—7, 318, 28, 85), Enache Nicuşor (2326, 423, 5—7, 45, 6, 9, 62, 85—7, 328), Soră Ion (2425, 6, 8, 45, 9, 61, 2, 7284—8, 326, 8), *L. 2* cl. X Coloianu Lucia (7284—8, 93, 300, 23, 5, 6, 8, 75), Iosivoni Doina (7276, 93, 300, 6, 20, 82—8), cl. XI Coloianu Maria (7217, 8, 20, 1, 3, 5, 6, 8, 37, 9, 73, 5, 7, 83), Pascu Constantin (7286, 7, 317, 8, 20, 3, 6, 8, 39, 75, 7, 418), *L, 3* cl. IX Cărăbaţ Cornelia (2425, 6, 8, (45—7, 9, 62, 84, 5, 8, 325, 6), Tunsu Ionel (2425—7, 418, 45, 7, 60, 2, 85—7, 326), *L. 4* cl. X Tiribegea Maricel (7272, 6, 82—7, 9, 92, 3, 5—7, *L. 5* cl. IX Hariton Ionela (2417—9, 21, 3—8, 45, 60, 2, 84—8), Polu Cătălina (2411—4, 6—21, 3, 5, 8, 7286, 9, 398, 404), *L. 6* cl. VIII Grimberg Anton (2410—32, 38—42, 4—6, 52—6), *L. 7* cl. IX Cutică Doina (2424, 5, 7, 8, 44—6, 48, 61, 2, 7285, 325, 6, 8).

GIURGIU. S. *g. 4* cl. VI Măcăneaţă Cristian (2429, 31—4, 8, 9, 41, 2, 54), *L. 1* cl. IX Călinescu Mihail (2424—6, 8, 44—6, 8, 85—8, 318, 26), Popescu Ionel (2424—6, 8, 44—6, 8, 7285—8), cl. X Mărăcinescu Eugen (7280—8, 91—3, 5—7, 9—11, 3, 4, 7, 8, 21—3, 5—8, 33, 5, 42, 6, 73—5, 7, 87). cl. XI Coporan Emil (7266—8, 76, 82—8, 92, 300—4), Marinescu Stelian (7263—6,—8, 76, 82—8, 92, 300—4), *L. 2* cl. X Bolborici Marian (7272, 6, 83—6, 7, 8, 91, 6, 318, 22, 5, 6), Păţurcă Georgeta (7266, 72, 8, 83, 9, 98—301, 8, 9), Pitulice Daniel (7282, 5—7, 9, 317, 8, 20, 5, 64, 72, 3, 403), Voicu Paul (7289, 84, 5, 8, 303, 17, 22, 5, 32, 43, 62, 74, 5, 7, 9, 400, 3, 13), cl. IX Voicu Ion (7284, 301, 18, 20, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 42, 3, 62).

GOGOŞU (Oltenia) S. *g.* cl. V Mitroi Dan (2410, 1, 3, 4).

GOLEŞTI (Argeş) S. *g.* cl. VII Ionescu Emil (2410—3, 7—21, 3—5), cl. VIII Stoican Viorel (2410, 1, 3, 5, 7, 21, 3, 31, 9, 41, 5, 7, 7284, 8, 326).

GORANU (Argeş) S. *g.* cl. VII Tănase Vasile (2418—21, 3, 7, 8, 43).

GURABARZA (Hunedoara) Maschek Florin (2423, 5—8, 7284—8, 325—7).

GURA HUMORULUI (Suceava). S. *g.* cl. VIII Grosu Ion (2313, 9, 21, 3, 7, 32, 8, 9, 41—3).

HALEŞ (Ploieşti) S. *g.* cl. VII Marinescu Elena (2410, 5, 26, 9, 32, 4, 9, 45), Motora Ioana (2411—3, 8, 32, 8, 9, 41), cl. VIII Bratoşin Angela (2410, 2, 3, 5, 7, 8, 24, 5, 8), Dogaru Vasilica (2418, 21, 5—7, 9, 31, 2, 8, 40), Panait Aurelia (2419, 32, 9, 41, 5—7, 62), Voicilă Ioana (2410, 5, 8, 9, 21, 3, 6, 8—32).

HĂNEŞTI (Suceava) S. *g.* cl. VII Foină Angela (2410—3, 21, 8, 32, 8, 1, 41, 2), Garos Rodica (2410—3, 21, 8, 32, 8, 9, 41).

HAŢEG *L.* cl. X Maftei Nicolae (7283—5, 8, 91, 300, 17, 8, 20, 2, 5, 6), cl. XI *Marton Virgil* (7264—9, 71—4, 6, 82—92, 95, 9, 300—4, 11, 8).

HÎRLĂU (Iaşi), *L.* cl. IX Ciubotaru Dan (2424—6, 8, 95, 6, 8, 9, 7284—7, 325, 6).

HOREZU (Argeş), *L.* cl. X Costescu Ştefan (7876, 72, 3, 95, 6, 9, 317, 8, 21—3, 5—8, 64, 73, 5, 7, 87, 95, 402, 18), Tănăsescu Ion (7284, 5, 7, 8, 300, 7, 8, 25, 6, 98, 8, 400), Terteci Dan (7284—92, 6, 312—4, 7, 8, 21—3).

HUNEDOARA. *L. 1.* cl. IX Iacob Teodor (2424—6, 8, 44—7, 7296, 7, 326, 8), cl. X Ciotescu Ion (7267, 9, 72, 6, 82—8, 91—3, 8, 14, 20, 2, 3, 5, 6, 8, 35, 7, 8, 42, 60, 4, 72—9, 82, 5, 8, 91, 5, 7—400, 2—4, 18), Drăghici George (7284, 6—8, 300, 18, 22, 3, 6, 8, 30, 75, 6, 9, 85), Lup Iosif (7267, 9, 82—300, 4, 17, 8, 20, 2, 3, 5—7, 60, 4, 72—5, 7—9, 82, 8, 97—9, 417), Pop Radu (7267, 9, 83—8, 300, 17, 8, 23, 5, 6, 8, 42, 60, 4, 72, 3, 8, 9, 98, 406),

L. 2. cl. VIII Nicorescu Rodica (2430, 2, 4, 8, 9, 41, 2, 4), cl. X Mehedinţu Marian (7294—8, 93, 300, 23, 5, 6, 8, 75, 85, 97, 406).

IARA (Cluj), *L.* cl. IX Ileană Minerva (2425, 6, 8, 45—7, 9, 62, 84, 5, 7, 321, 5, 62).

IAŞI. S. *g.* cl. VII Lencu Elisabeta (2419, 21, 3, 34, 8, 9, 4, 2, 54, 5), S. *g. 7* cl. VI Bercovici Zina (2411—3, 24, 30, 1, 2, 4, 8, 47), Davideanu Ion (2430—2, 4, 8, 9, 41—3, 50—5). Goldstein Margit (2410—4, 7, 8, 24, 9, 51, 2, 8), Horvitz Sergiu (2411, 2, 6—8, 20, 8, 30, 1, 4, 53), Moscovici Sorin (2419, 1, 7, 8, 28, 32, 6, 9, 41, 2, 50, 2). Petrăchioaie Eugen (2381—5, 94—8, 400, 11—3, 24, 30—2). cl. VII Berbec Gela (2430—4, 6, 41, 50, 2—5), Bratu Lucian (2410—3, 5, 8, 24, 8, 30, 4, 6, 9, 41) , Calinov George (2412, 3, 31, 2, 4, 8, 41—3, 50, 4, 5), Ciobanu Dorel (2411, 30—2, 4, 9, 31, 50, 4, 5), Goldstein Claudel (2411, 3, 30, 1, 2, 4, 8, 9, 50, 4, 5), Hagianu Doru (2411, 3, 31, 2, 4, 8, 41, 5, 50, 4, 5), Iancu Rizel (2410—4, 8, 24, 8, 9), Panfelescu Victor (2410—3, 5, 8, 24, 8, 32, 41, 2), Smochină Mihai (2430—2, 4, 9, 41, 6, 54), Stavrachi Mioara (2411, 3, 7, 24m 38, 9, 41, 55, 60), Tănăsachi Dragoş (2410, 1, 4, 5, 7, 8, 24, 8, 61, 2, 4, 9), cl. VIII Acatrinei Ion (2400—3, 7, 9, 21, 3—6), Bilanca Rodica (2432, 3, 6—9, 41—3, 54, 5, 60), Drăgan Gheorghe (2410—4, 7—9, 21, 3—6, 8), Groapă Ioana (2411, 9, 24, 7,, 30, 8, 31, 4, 40, 4, 5), Petrochioaie Dorin (2410—3, 5, 7—9, 21, 4, 5, 30, 1, 2, 4), Radu Drişca (2413, 34, 7—9, 21, 3—5, 8—31, 4, 9), S. *g.* lcl. VIII Aron Solomon (2429, 38—42, 4, 5) S. *g. 14* cl. VII Petrea Paul (2410—2, 4, 8, 24, 30—2, 4, 8, 9), Poroşnicu Gabriela (2412, 5—7, 20, 2, 4, 5, 7, 9, 30—2) Roteriuc Maria (2412—4, 24—7, 32, 8, 9, 41, 2), cl. VIII Joldescu Mitică (2412, 5, 7, 8, 50, 2, 3, 62), Stancu Viorel (2427, 30—2, 4, 8—47, 9, 50, 2, 6, 62, 7284—8, 325), *L. 1* cl. VIII Budui Liviu (2432, 7, 41, 53—5, 62, 3), Iosip Simion (2410—5, 7—9, 28, 7284, 6, 7, 326), Mistreanu Gabriela (2391, 2, 92, 5, 40â, 19, 21, 32, 9, 41), *L. 2* cl. VII Iftimescu Radu (2410—4, 6—8, 31, 2) cl. VIII Polcovnicu Mircea (2412, 4, 7, 9, 24, 5, 8, 41), *L. 3.* cl. V Iacob Georgică (2411—4, 31, 2, 50, 3), cl. VI Marinescu Florentina (2370—2, 94—102, 10, 2, 3), Lupescu Silvia (2410—9, 23, 8), cl. VIII Armeanul Neculai (2430, 8, 9, 41. 2, 54, 65, 4, 60, 2), Cleju Ion (2410, 1, 3, 4, 6—9, 21, 5, 8), Vescan Robert (2411, 3, 4, 7—9, 21—3, 5, 8), cl. IX Rudeanu Mihai (2426, 61, 2, 7284—8, 91, 325, 6, 8), Linde Radu (2423, 4, 7, 8, 45, 6, 62, 7284—8, 325), cl. X Iacob Florin (7276, 78, 83—93, 5—301, 5, 8, 3, 4, 7, 8, 20—3, 5, 6, 8, 30, 5, 42,) *Popa Eugen* (7296, 303, 5, 8, 20, 25, 28, 31, 36, 39, 45, 79, 77, 91, 4—6, 409, 16) Ţirdea Ioan (7283—8, 91, 2, 300, 17, 20, 50, 5, 8, 37), *L. 4* cl. V V. Wechsler Nadia (2410—3, 29—32, 52, 3), cl. VIII Pavelescu Ilonila (2419, 21, 32, 8, 41—3, 60, 2, 3), cl. IX Iliescu Brinduşa (2427, 45—7, 9, 61, 2, 7284—7), *L. 6.* cl. VI Vaisman Julien (2410—8, 20), cl. IX Caufman Claudia (2424, 5, 7, 84, 5, 7, 45, 7, 9, 60—3, 7325, 6), *L. 7* cl. VII Anoniescu Carmen (2412, 3, 7, 25, 6, 8, 31, 41, 2, 53), Bălan Valerica (2411—3, 7, 8, 31, 4, 8, 41), Bratu Lucian (2417, 31, 2, 4, 8, 42, 5, 50, 2—5), Burlacu Călin (2410—3, 7, 8, 22, 8, 32, 7, 8, 41. 2), Cehan Mihaela (2410—3, 7, 20, 6, 8, 31, 2, 4,) *Crulicovschi Adriana* (2410—21, 5, 6, 8—34, 6—9, 41, 2, 4, 5, 50, 2, 3—6), Doncilă Dumitru (2410—3, 8, 31, 4, 9, 41), *Dumitru Laurenţiu* (2410—8, 25, 6, 8 2, 4, 6—8, 50, 2—6) Jurca Octavian (2411, 30—2, 4, 45, 50—4), Laşbă Tudor (2410—3, 6—8, 28—32, 4, 8), Mardare Cornelia (2411,—3, 7, 24, 8, 9, 31, 2, 4, 8, 9), Păduraru Gabriela (2410—8, 20, 4—6, 8—34, 6—9, 41—5, 52—5), Psait Ecaterina (2411—3, 8—21, 8, 31, 8, 9, 41, 2, 5), Sireteanu George (2411—3, 7, 8, 26, 8, 31, 2), Timofte Rodica (2431, 2, 4, 8, 41, 5, 50, 2—5), Tură Cristian (2411, 30—4, 45, 50, 2, 3, 5), Vulpoiu Grigore (2395, 8—400, 2, 4, 11—3, 7, 8, 8, 9, 32, 4, 8, 9, 41, 2, 50—5), cl. VIII Bulancea Valentin (2412, 3, 9, 21, 4, 8, 30—2, 4, 8, 9, 41), Tătaru Virgil (2413, 9, 21, 30—2, 4, 9, 41, 2, 4, 5), cl. IX Barbă Georgeta (2424, 5, 8, 44, 6, 9, 60, 2, 3, 84, 6, 7, 328, 85), Garbită Horia (2412, 6—9, 25, 8, 41, 4, 5, 61, 2), Veisman Maias (2411, 3, 7—21, 3—5, 8), cl. X Gogoi Mihai (7293, 9, 300, 17, 8, 23, 6, 8, 33, 75, 402, 3), Lencu Georgică (7283, 9, 318, 20, 3, 6, 8, 37 m, 75 m 7—9), *Liceul de muzică şi arte plastice* (2410—4, 9m 21, 6), Fiterman Adrian (2410—3, 21, 8, 32, 8, 9, 41 .

ILIA (Hunedoara) S. *g.* cl. VIII Gherman Emil (2410—3, 6—9, 23, 5, 8).

JILAVA (Bucureşti) *L.* cl. X Teodorescu Sorin (7282, 3, 92, 3, 9, 300m 17, 8, 22, 35, 73, 5, 9).

JIMBOLIA (Banat) cl. VIII Henriette Giesser (2410—3, 7, 23, 31, 2, 4, 41), cl. X Elmer Peter (7276, 83—7, 92, 3, 325, 6,) 8, 9), Schuster Karl (7286—7, 92, 3, 300, 17, 25, 6, 8, 98).

Jupolnic (Banat) *L.* cl. IX Crişan Alexandru (2426, 8, 44—9, 7287, 325, 6, 8).

LĂPUŞUL ROMANESC (Maramureş), S. *g.* cl. VIII Buda Viorica (2411, 3, 4, 28, 31, 41, 2, 4, 6, 52, 4, 5, 60, 2), Toma Valeria (2419, 21, 31, 2, 8, 9, 41, 2, 54, 5, 60, 2).

LILIEŞTI (Ploieşti). Ioan Cornel (2411—3, 9, 21 3, 32, 4, 7, 9, 41, 2, 52, 5, 62).

LIPOVA (Banat). *L.* cl. VIII Hermut (2431, 9, 9, 41, 2, 5, 9, 50, 318), Wild Günther (2450, 2—5, 50—2).

LUGOJ S. *g. 2* cl. VIII Taras Cornelia (2413—5, 7—9, 21, 3, 7, 8), L. 1. cl. X Murariu Dorin (7272, 6, 83—9, 92, 5, 7, 9, 300), Preoteasa Viorel (7276—8, 90, 300, 9, 17, 8, 22, 3, 5—8),

L. 2 cl. VI Popovici Porfirie (2410—2, 32, 8, 9, 41, 42), cl. IX Blach Ivan (2423, 4,6—8, 45—7, 7283—8, 91, 313, 8, 25, 6, 8), Botoroagă Maria (2425, 45—7, 9, 62, 84, 325, 5, 8), Sorinca Claudiu (2425, 6, 8, 44—7, 9, 62, 85, 7325, 6, 8), Doba Laurenţiu (7276, 90—2, 5, 8, 300, 25, 6, 8, 30), cl. X Ripan Iosif (7284—8, 300, 7, 8, 22, 5, 6, 8, 9).

MACIN (Dobrogea) *L.* cl. XI Bînzar Nicolae (7272, 6, 83—9, 91—3, 5, 9, 300, 1, 17, 8, 80, 2, 3, 5, 6, 8), *Simion Andrei* (7263, 6—73, 5, 6, —93, 9—304, 8, 13, 3—5, 7, 8, 20—3, 5).

MĂNĂSTIRENI (Cluj) S. *g.* cl. VIII Ginză Mariana (2410, 1, 3, 7—9, 23, 5, 6, 8, 62).

MĂNEŞTI (Ploieşti) S. *g.* cl. VI Nicolae Ion (2430—5, 8, 9, 41—3).

MĂRĂŞEŞTI (Galaţi) *L.* cl. X Apostol Ovidiu (7282, 3, 5, 7, 9, 91, 6, 300, 17, 8, 22, 5, 6), Cazacu Mihail (7283, 87, 91—3, 5, 300, 12, 4, 7, 23, 35, 47), cl. XI Chiriţă Constantin (7266, 82—4, 6, 7, 91, 5, 300, 1, 12, 2, 7, 8, 20, 1, 3, 5, 6, 8, 30, 5, 9, 42, 3).

MORGA (Banat) *Ş. g.* cl. VIII Bogdan Nicolae (2429—31, 4, 44, 5, 50, 3, 60, 2, 7328).

MEHADIA (Banat) *L.* cl. X Chiriţă Ion (7284—8, 300, 17, 8, 25, 6, 8, 85, 7, 97, 9).

MARGHITA (Crişana), *L.* cl. IX Kovacs Ileana (2419, 21, 3, 5, 8, 84, 5, 7, 8, 91, 7325, 6).

MEDGIDIA. *L.* cl. IX Bărbat D-tru (2424—8, 44, 56, 60—3, 7284—8, 32, 5, 6), Haralambie Adriana (7284—8, 325, 6, 8, 30).

MEDIAŞ. *L.* cl. IX Rotaru Eremia (2428, 45, 6, 9, 60, 2, 3, 7286, 7, 325, 6, 8), cl. XI Dumitru Gheorghe (7263, 6, 8, 72—4, 8, 9, 81—8, 90—2, 5, 6, 8—304, 6, 9).

MIERCUREA. *L.* cl. IX Ludoşan Ioan (2426, 7, 46, 60—3, 7284—7, 325, 6, 8), cl. XI Staicovici Gh. (7303, 59, 60, 72—5, 7—9, 82—5, 95, 411).

MINDRULOC (Arad) S. *g.* cl. VIII Glogovicean Voichiţa (2430—2, 4, 8, 9, 41, 2, 53—5, 60, 2, 7318).

MÎRZĂNEŞTI. S. *g.* col. VIII Geolfan Floarea (2439, 41, 2, 52, 3, 5, 62, 3).

MÎRŞANI. *Ş. g.* cl. VII Dragomir Gh. Traian (2410—8, 20, 9—31, 4, 44).

MIZIL S. *g. 1* cl. VII Popescu Nicolae (2430, 2, 4, 5, 9, 41, 4, 50, 4), L. cl. VI Trifina Cornelia (2430—3, 8, 9, 41, 3).

MOGOŞANI. *Ş. g.* cl. VIII Badea Gheorghe (2412, 5, 27, 40, 9—50, 2—4, 6, 62, 7285—7). Postelnicu Ion (2410—9, 21, 3—8, 7284—8).

MĂNEŞTI (Ploieşti) S. *g.* Predescu Gheorghe (2394, 5, 7—9, 411, 13, 30, 1, 4).

MOLDOVA NOUĂ. *L.* cl. VII Tismănaru Anastasie (2382, 95, 411, 3, 9, 32, 42, 54, 5).

MORENI. *L.* cl. VI Ilie Daniela (2411—3, 29—34, 8, 9, 41, 2), Feldman Cristina (2410—8, 29—32, 4, 8, 9, 41, 2, 4), Samarin Cristina (2410—4, 6—8, 20), cl. VII Ionescu Maria (2410—4, 6—8, 20), cl. IX Cioceanu Constantin (2426, 8, 44, 5, 60, 7286, 7, 317, 25, 6, 8, 85), Nedelcu Constanton (7286, 7, 317, 21, 5, 6, 8).

MUŞETEŞTI. (Oltenia) S. *g.* cl. VII Tătaru Iordache (2395, 7, 9, 400, 31, 2, 8, 9, 41, 2, 5, 6).

NADLAG (Banat) *L.* cl. VIII Tiriac Ştefan (2410, 1, 3, 9, 21, 3, 5, 6, 31, 46, 50), cl. IX Iovanov Miodrag (2425, 7, 8, 85, 7284, 8, 318, 26, 8).

NADRAG. *L.* cl. IX Popescu Pavel (7284—7, 325—8).

NĂSĂUD. *L.* cl. X Scurtu Vasile (7283, 5, 8, 95, 7, 9, 317, 8, 22, 5, 6, 8, 33, 9, 73, 5, 6).

NEGRENI *Ş. g.* cl. VIII Cioantă Marin (2410—3, 9, 28, 30, 1, 4).

NEGREŞTI (Iaşi), *L.* cl. XI Ungureanu Ion (7314, 7, 8, 23, 6, 39, 42, 3, 5, 67, 72, 5, 7, 90, 8).

NEGRU VODĂ. *L.* cl. X cl. X Nelu Dobre (7278, 86—8, 90, 2, 6, 7, 300, 1, 9, 17, 22, 3, 5, 6, 8, 42, 73, 5, 9, 400).

NEGULEŞTI (Bacău). *Ş. g.* cl. VIII Strat Ion (2411—14, 7, 8, 21, 5, 6, 8).

NOVACI (Oltenia), *L.* cl. VI Bădescu Elena (2410—3, 5, 7, 8, 24,7), cl. VIII Bălaşa Maria (2410—3, 7—9, 25), Ciorogaru Nicolae (2411—3, 7—9, 21, 5), Comănescu Valentin (2410—3, 7—9, 21, 3—5, 8) Porumbel Ion (2410—3, 7—21), Toader Ion (2410—3, 7—9, 21, 4, 5).

OLANU (Argeş) S. *g.* cl. VIII Serăraru Constantin (2429—32, 8—842, 4—6).

OLTENIŢA. *L.* cl. X Ulmeanu Vasile (7276, 82, 7—8, 93, 9, 300, 1, 18, 20, 3, 5, 6, 8, 30, 5—7, 75—7, 87, 402, 5), Vasilian Mihai (7267, 72, 6, 8, 83—9, 95, 7, 300), cl. XI Vlăsceanu Stan (7276, 82, 3, 6, 7, 93, 9— 303, 20, 3, 5, 6, 8, 30, 5, 6, 40, 2, 73—9, 402, 5, 8, 3, 8).

ORADEA. *Ş. g. 4* cl. VII Mierlaţiu Mircea (2411—3, 7, 8, 20, 8—30, 3, 40, 4, 5,3), *L. 1* cl. IX Marin Ioan (2425, 7, 8, 45, 6, 84—8, 325, 6, 8), Sturz Eugenia (2424, 8, 326, 8, 7285—8), cl. XI Bara Gheorghe (7282, 3, 6, 7,300, 1, 3, 4, 8, 11, 3, 4, 7, 8, 20, 6, 8, 39, 42, 3, 5, 72—80, 403, 12, 4, 8), *L. 4* cl. X Brădău Florian (7272, 5, 9, 317, 64, 6, 75, 7, 9, 8, 402, 4), cl. XI Neer Petru (7263, 6—9, 72, 5, 6, 8, 81—93, 9, 300—4), *L. 5* cl. XI Herman

Gheorghe (7263, 8, 93, 300, 4, 39, 72, 3, 5, 7, 8), Şc. pedagogică cl. VII Mateiaş Ervin (2412, 3, 24, 30—4, 6—9, 4ş), Méhész Ana (2383—5, 9, 95, 400, 11, 2, 3, 6).

OR. PETRU GROZA *L.* cl. IX Török Arpad 2424—8, 67, 76, 84—8).

ORĂŞTIE (Hunedoara) *L.* cl. V Cociorvă Rodica (2411, 3, 31, 2, 4, 8, 9, 41, 2), cl. VII Istrate Luminiţa (2411—3, 7—9, 32, 4, 41).

ORLEŞTI (Argeş) cl. VII Florescu Constantin (2414, 30—2, 4, 8, 9, 41, 2, 4, 5, 53).

ORŞOVA, *L.* cl. VII Beck Walter (2410—4, 8, 24, 6), Bireescu Pavel (2410—4, 8, 30—2), Schimek Beatrice (2410, 2, 8, 32, 8, 9, 41, 2), cl. X Erimescu Ion (7272, 6, 83—5, 8, 9, 97, 300, 7, 8, 25, 6, 8).

OŢELUL ROŞU *L.* cl. VI Avram Mihai (2430, 2, 4, 6—8, 41, 2, 4), cl. VI Jula Gheorghe (2429—32, 4, 9, 40—2), cl. VIII Sîrbu Maria (2419, 21, 3—6, 8, 32, 8, 9, 41, 2, 5), Tăroată Anghel (2410, 1, 3, 7—9, 21, 3, 7, 8), cl. IX Chioariu Maria (2424—8, 44—6, 9, 7284—7, 325, 6, 8), Tăroată Gheorghe (2424—8, 45, 6, 84—8, 325, 8). n

OVSELU (Oltenia) *L.* cl.) Chiriţă Angela (2410—3, 29—32), cl. X Preda Ion (7276, 83, 5, 8, 9, 92, 5, 300, 1, 22, 5, 7).

PANCIU. *L.* cl. VI Drăgan Eugen (2413, 31, 2, 4, 8, 9, 41, 4, 54, 5), Seciu Romeo (2411—3, 30, 1, 4, 9, 41, 4, 55), cl. VIII Drăgan Diana (2410—4, 6—23, 5, 6, 8—32 m, 4, 8—48, 52—5, 60), cl. IX Mihăiuc Vasile (2423, 4, 7, 8, 44, 9, 60, 3, 7287, 326, 8, 98), Mînea Gheorghe (7272, 6, 83, 9, 90—2, 6, 7, 300, 1, 1, 17, 8, 22, 3, 32, 3, 5, 64, 74, 5, 7, 72, 7, 402, 5, 6), Absolvent Ion Gh. Fătu (7263, 87, 9, 890, 6, 300—3, 17—20, 3, 5—8, 30, 3, 5, 9, 42, 71—9).

PARVA (Cluj) *L* cl. VIII Rus Anton (2410, 4, 7, 9, 21, 8, 31, 2, 8, 9, 41—3).

PĂTIRLAGELE (Ploieşti) *L.* cl. VII Anghel Pompiliu, (2410, 1, 3, 5,7—9, 21, 3, 8, 30, 1). Mircescu C. Nicolae (2413, 5, 7, 249, 31, 4, 41, 2), 2 cl. IX Olteanu D. Nicolae (2425, 7, 8, 44—7, 61, 2, 7284—8, 326—8), Podoreanu N. Aurel (7317, 8, 25, 6, 8, 40, 4—7, 9, 60—3). cl. X Porrea Dumitru (7272, 6, 84, 5, 8, 95, 300, 17, 8, 23, 5, 6, 8, 74), Ştefan I. Ion (7272, 6, 84—8, 95, 300, 7, 8, 25, 6, 8, 30), *Toma Veronel* (7272, 4—6, 8, 83—301, 8, 14, 7, 20, 2, 3, 5—8, 33—5), cl. XI Bîrjoveanu Constantin (7265, 72, 6, 82—7, 91, 300, 1), Hirzescu Vasile (7263, 8, 72, 6, 82—8, 91, 2, 9, 300, 1), *Poşoiu Constantin* (7263, 8 72, 6, 9, 81—97, 9, 301, 3, 5, 8, 9, 12, 7, 20, 3, 9, 35, 7—8, 42, 3), Toma Florin (7272, 4—6, 8, 82—92, 9).

PĂUNEŞTI *Ş. g.* cl. VII Berbece Ileana (2413, 6, 28, 34, 7, 8, 9, 41, 2). Gheorghiu Mihai (2429, 30, 2, 8, 9, 41, 2, 4, 5), Neagu Viorica (2412, 7, 8, 21, 8, 9, 32, 4, 9, 40), Novac Maria (2412, 25, 9, 33, 8, 43, 53).

PĂUŞEŞTI (Argeş), *L. 1* cl. IX Dinu Constantin (2424—6, 44—7, 9 m 7283, 5, 8, 325, 6, 8).

PECIUL NOU (Banat) *L.* cl. XI *Stoianovici Radislav* (7266, 76, 83—5, 8, 9, 91, 300, 1, 2, 4, 7, 8, 20, 5, 6, 8, 30, 3, 9, 42, 3, 56, 9, 6a, 72, 5, 8, 84, 5, 91, 400).

PETROŞENI (Hunedoara). *Ş. g. 1* cl. Butulescu Valeria (2410—5, p, 20, 8), cl. VII Duda Iordan (2423, 5—7, 30—2, 8, 9, 41, 2), cl. VIII Horvat Olga (2410—20, 3, 5, 6, 7), Marci Dorina (2410—28, 7284—6) Maschers Adelheid (2410—2, 4—28, 7284, 5), Semeti Ioan (2410, 1, 3—28, 7284, 5), Sternberg Margit (2410, 1, 3—33, 9—42 m 4—7, 7285—7) Suta Stela (2410—28, 7284—6).

PEŞTEANA Jiu (Oltenia) *L.* cl. X Teodorescu Aurel (7272, 6, 83—5, 7, 8, 92, 300, 9, 17, 20, 2, 3, 5, 6—8, 30, 1, 64, 72, 91).

PIATRA NEAMŢ. *L.* cl. VII Braunstein Eugen (2412, 4, 5, 7, 8, 28, 50, 2—5, 61), cl. IX Ciofoaia Ioan (2425—8, 45—9, 7285—9, 335, 9.

PITEŞTI, *Ş. g. 8* cl. VII Postelnicescu Mariana (2410, 1, 3, 6—8, 25, 89), *Ş. g. 10* cl. VII Dănescu V. Median (2410—2, 6—8, 25, 8—32, 4, 8, 9, 41, 50, 2, 3), Minduteanu Dan (2410—1, 3, 4, 6—22, 4—6, 8—32), Ţucă Dan (2410—3, 8—30, 3), Verescu Octavian (2413, 24, 31, 4, 8, 9, 41, 4), Romana Paşeval (2410—4, 6—21, 3, 5), *L. 1* cl. IX Obălaru Aurel (2424, 5, 8, 44—7, 7284, 5, 8, 318, 21, 6, 30) Ana? Florin (2425, 6, 8, 44—7, 7284—8, 325, 6, 8). Chirca Teodor (2425—8, 7284, 7, 8, 318, 21, 5, 8,), Cetta Emil (2460, 2, 92, 5, 300, 1, 18, 21—3, 5, 73, 5, 7), Dinu Horia (2424—8, 61, 2, 7284, 5, 7, 313, 21), Georgescu Cornelia (2425—8, 45—7, 9, 7284—8, 7326, 8), Joiţe N. Constatin (2425—8, 44—9, 7284—8, 31, 8, 21, 5, 8), Nedelea Gheorghe (2425, 45—7, 84, 8, 317, 25, 6, 8), cl. X Bişon Dan (7276, 82—5, 7, 9, 90—2, 6, 301, 6), *Dumitrache Ion* (7219, 21, 3, 7, 42, 4, 67, 9, 72, 5,, 6, 8, 82—301, 12, 7, 8, 20, 3), cl. XI Dobrescu Eugen (2467, 9, 83, 301, 7, 9, 20, 3 6 8, 42, 71—9, 85), Ioan Mariana (7267, 9, 84,, 5, 8, 91, 308, 17, 8, 23, 5, 9, 43), Opran Ştefan (7267, 82—5, 7, 92, 300, 1, 11, 7, 8, 20, 6, 6, 8, 73, 5—7, 83—5), Pietreanu Cristian, (7278—90, 2, 300, 1, 8, 12, 7, 8, 34, 9, 77, 91). *L. 2* cl. VIII Ionescu Radu (2410—31, 4 9, 40, 4—6, 50, 2, 3), cl. IX Predescu Mihaela (2444—7, 9, 60—3, 7284—8, 325, 6, 8), Tîrgu Monica (2446, 7, 60, 60—2, 7284—8, 325, 6), cl. 2 Perianu Marian (7284, 6—8,

96, 300, 7, 8, 22, 3, 5, 35). Voiculescu Ruxandra (7284, 6, 7, 9, 91, 3, 6, 300, 18, 22, 3, 6, 8), cl. XI Achim Virgil (7283, 5—7, 91—3, 6, 9, 300, 1, 17, 8, 22, 3, 5—8, 30, 3, 5, 9, 43, 91, 7, 400, 2). Braniște Dumitru (7314, 5, 7, 8, 23, 3, 7, 9. 42, 64, 72—9), L. 3 cl. XI Gheorghe Ion (7272, 5, 6, 83—8, 90, 2, 3, 5, 6—301, 8).

PINCOTA (Banat). *Ș. g.* cl. VIII Chelebeu Rodica (2410—5, 7—9, 23, 5—8, 7284—7).

PLOIEȘTI. *Ș. g.* cl. VII Leibovici Alfred (2410—3, 31, 2, 4, 9, 41, 2), Nichifor Virginia (2419, 30—2, 4, 41, 4), Oprescu Constanța (2429—32, 4, 9, 41, 4). *Ș. g. 9* cl. VII Bercea Elena (2411—3, 7, 8, 20, 4, 5, 8), cl. VIII Aibenii Luminița (2410, 3, 7, 9, 21, 3, 4, 9, 60), *Ș. g.* cl. VII Dinu Ileana (2411, 3, 4, 7, 8, 24, 8, 53), Tiprigon Carmen (2412, 6, 32, 8, 42, 5, 50—5, 61), *Ș. g. 14* cl. VIII Manolescu Paul (2410—3, 31, 2, 8, 9, 42), *Ș. g. 17* cl. VIII Simion Eftimie (2410, 1, 3, 9, 21, 3, 6, 8, 9, 41, 60, 2). *Ș. g. 21* cl. VI (Gheorghiu Simona (2437, 41, 4, 6, 54, 5), cl. VII Munteanu Monica (2431, 7, 9, 41, 2, 4, 53, 5), cl. VIII Alexandrescu Alexandrina (2432, 8, 9, 41, 50, 2, 60, 2), Popa Norica (2434, 50, 2—5, 60, 2), Stoicescu Marian (2418—21, 50, 3—5, 60—2), Stoicescu Toma (2540, 1, 3, 4, 5, 9, 60—2), *Ș. g.* 23 cl. VIII Mamulea Elisabeta (2431, 2, 6, 8, 9, 41, 2, 54, 5, 62), *L. 1* cl. VI Bucheru Raluca (2410—3, 7, 8, 50, 3—5), Olteanu Horia 2410, 2, 3, 34, 8, 9, 41, 2, 5, 3), cl. VII Costache Dorin (2418, 9, 21, 5, 8, 41, 2, 5, 6), Florescu Radu (2410, 1, 3, 4, 6—8, 29, 30), Munteanu Dinu (2417, 24, 38, 9, 41, 2, 4—6), Popescu Valentina (2411—3, 8, 28, 30, 1, 4, 9, 41), cl. VIII Ciobanu Vasile (2431, 42, 4, 54, 5, 7, 61—3), Enescu Daniela (2431, 2, 8, 9, 41, 54, 5, 60, 2), Iliescu Sorin (2429, 31, 2, 4, 8, 9, 41, 2), Nistor Silviu (2410—4, 9, 21, 3, 4, 7), Olteanu Gh. (2432, 48, 9, 41—3, 9), Păun Ana (2412, 3, 7—9, 21, 3, 49, 32), Roilu Constantin (2429——32, ,4, 8, 9, 41, 2, 4, 9), Zamfir Cecilia (2429, 41, 54, 5, 60, 60—2, 7326, 8), cl. IX Ardeleanu Marta (2424—8, 44—6, 9, 7284—8, 326), Horoșa Dorin (2325, 424—8, 44, 6, 7, 9, 60, 2, 7284, 328), Militaru Gh. (2428, 44—8, 60, 23, 7285, 3225, 6, 8), Pană Ștefan (2424—8, 45—7, 7285—8, 318, 21, 5, 6). Peltea Constantin (2424—8, 44, 6, 7, 9, 60, 2, 84, 5, 325, 6, 8), Penea Gheorghe (2423, 5, 7, 8, 44—9, 7284, 5, 7, 8, 324, 5, 6), Sandu Petre (2424——8, 44, 6, 7, 9, 60, 2, 7284—6, 325, 8), Stan Gheorghe (2426, 8, 44, 5, 9, 60, 2, 84, 7325, 6, 8), cl. X *Botoșanu Lidia* (7282—8, 91, 5, 6, 300, 1, 13, 7, 8, 20, 2, 3, 5, 6, 8, 35, 8, 9, 60, 4, 6, 72—9), Coman Constantin (7282—4, 6—8, 91, 3, 300, 7, 8, 20, 2, 3, 5, 39, 66, 72—5, 91), Dragomirescu Cezar (7278, 82—8, 91, 5, 6, 300, 1, 13, 7, 8, 22, 3, 5, 6, 8, 30), Nicolescu Amelia (7285—8, 300, 7, 8, 23, 5, 6, 8, 75, 7, 404), Rusu Ion (7284—8, 90, 300, 18, 25, 6, 8, 85, 7), cl. XI Bizu Marius (7120, 7, 30, 1, 3, 4, 67, 88, 90, 210, 1, 6, 7, 24, 34, 43, 7, 63. 6, 82—8, 91, 6, 9, 300—4, 25, 6, 8), Dumitrescu Gheorghe (7285. 6, 317, 8, 20, 1, 3, 5—8, 30, 3, 5, 7, 42, 64, 75), Ganea Gabriel (7282—8, 300, 12, 23, 5, 6, 8, 27, 43), Petrescu Mircea (7317, 8, 20, 1, 3, 5—8, 30, 3, 5, 7, 9,42, 3, 64, 75), *Reghină Vasile* (7178, 9, 81, 93, 4, 6, 211, 2, 6—27, 34, 9, 63, 6, 82—8, 92, 5, 6, 9—304, 11, 2, 4, 7, 8, 20, 2, 3, 5, 30, 5, 7), Stan Ion (7272, 6, 82—93, 5—304, 8, 9, 20, 3,6—8, 30, 2, 5, 78). *Stănescu I. Dan* (7185, 8—90,3—204, 10—3, 5—27, 9, 31—33,5—7,8, 42, 3, 6, 7, 9, 50—3, 7, 63, 5, 72, 6, 8, 9, 82—93, 5—304, 8, 9). Stete Marin (7317, 8, 20, 3, 5, 6—8, 30, 3, 5, 7, 9, 42, 3, 64, 75, 7, 400, 3), *L. 2* cl. V Rosenfeld Adriana (2410—3, 29—31, 50, 3), cl. VI Alecu Voica (2433, 4, 6—9, 54—6). Florescu Gheorghe (2412, 3, 5, 28, 7317, 46, 8, 53), Rădulescu Răzvan (2429—32, 4, 8, 50, 4, 5), cl. VII Coman Alexandru (2411—3, 7, 8, 34, 9, 41, 2), Grigore Elena (2395, 413, 20, 31, 2, 8, 9, 41, 2, 54), Matei Nicoleta (2430, 28, 9, 41, 50, 3, 5), Miron Alexandru (2410—4, 9, 21, 4—6), Pastia Alex. (2410—4, 7, 8, 25, a, 9, 30), cl. VIII Baulescu Daniel (2411, 2, 9, 31, 4, 40, 5, 50), Drăgoi Florin (2411, 3, 4, 9, 21, 9, 30, 1, 4, 40, 8). Iliescu Adrian (2431, 29, 45—7, 53, 4, 60, 2, 3), Nicolescu Traian (2410—4, 7—9, 21, 4), Teodorescu Paul (2410, 6, 7, 9, 21, 8—50, 53, 5 4 62). Ungureanu Gabriela (2412, 4, 7, 9, 21, 4, 5, 8, 30, 1, 40, 4—6). cl. IC Bucure Teofil (2424—8, 44—7, 9, 84—8, 317, 8, 21), Caranasan Gheorghe (2425, 7, 8, 44, 6, 7, 8, 7284—8, 3 5, 6), Ghinescu Elena (24-4—8, 44—7, 7284, 6—8), Duțescu Constantin (2425—8, 45—7, 7284—8, 3225, 8), Marinescu Mihaela (2425—8, 45—7, 62, 3, 7284—8, 385). Sorescu Gabriela (2425—8, 47, 7284, 6—8, 325, 6, 8), Stan Stelian (2424—8, 45—8, 7284—8, 4325). Soldan Maria (2425, 7, 8, 47, 9, 7284, 5, 7, 32. 6), Teodorescu N. Nicolae (2449, 7318, 21, 4—7, 39, 85, 7, 3, 401, 2, 5, 10), cl. X Mazăre Alex. (7272, 6, 8, 83—9, 91—5—7, 09, 301), *L. 3* cl. VII Iancu Marieta (2410—3, 7, 28—31, 4, 40), cl. X Spiegel Wilhelmin (7282—8, 91—3, 5—7, 9—301), *L. 4* cl. VI Dumitrache Ion (2410, 4, 7—20, 3), cl. VIII Grigore Rodica (2418—21, 32, 8, 9, 41—3), cl. X Ionescu Elena, (7283—8, 92, 301, 17, 8, 20, 5, 8, 35), Oroviceanu Maria (7284, 5, 7, 89, 91, 2, 300, 18, 25 6, 8, 35), Ștefan Roma (7283, 91, 2, 300, 1, 20, 3, 5, 6, 8, 325, 42), *L. 6* cl. IX Moraru Nicolae (2426—8, 45, 6, 7, 9, 62, 7284, 6, 7, 317, 25)), cl. X Fetter Liviu (7284—8, 93, 300, 18, 22, 3, 5, 6, 8, 77), Mihăilescu Florin (7292, 3, 6, 300, 17, 323, 33, 64, 74, 77, 8, 9), Poșircă Mircea (7269, 86, 7, 93, 300, 7,8, 22, 3, 5, 6, 8, 66, 77), Absolvent Minculescu Gheorghe (7211, 8, 51, 8, 82, 3, 4, 6, 7, 8, 93, 6—9, 300, 1, 5, 8, 9, 14, 7, 8, 20, 3, 5—8, 30, 5, 42, 61, 4171, 3, 5, 6, 7, 9, 85). Șc. de muzică cl. VII Földes Tamara (2411—4, 6—8, 22, 8).,

PLOPENI (Ploieşti). *L.* cl. XI *Moroiţă Dumitru* (7263, 7, 8, 76, 82—8, 91—93, 314 7, 8, 20, 2, 3, 5, 6, 42—5, 72—5, 7—9, 82—5, 99).

PODU TURCULUI (Bacău) *Ş. g.* cl. VIII Grigoraş Helga (2410—2, 9, 21, 5, 9, 31, 62).

POTCOAVA (Argeş) *L.* cl. X Bănică Maria (7216, 22—4, 36, 83—8, 92, 300, 7, 8, 25—8, 30, 87), Dinu Valeria (7216, 7, 22, 9, 32, 6, 83—8, 92, 300, 7, 20, 5, 8).

PRUNDUL BÎRGAULUI. *Ş. g.* cl. VI Baleu Costan (2413, 6, 29, 30—2, 4, 8, 9, 42) Galben Afriana (2411—,3, 29—32, 4, 8, 9, 41).

PUCHENII MOŞNENI (Ploieşti) *Ş. g.* cl. VI Georgescu Gheorghe (2431, 2, 4, 6—9, 41—3, 50, 4—6), Mîndrilă Mihail (2410, 3, 4, 29, 31, 2, 4, 8, 9, 41, 40, 3—5), cl. VII Petre Vasile (2410—4, 29—32, 53).

PUCIOASA *L.* cl. IX Teodoriu Valeriu (2424—8, 7284—8), Comănoia Maria (7278, 83, 4, 6, 7, 92, 6, 300, 7, 23, 5, 6, 8), Despa Ion (7272, 6, 8, 83—9, 91, 2, 5—301, 7, 8, 21—8, 30, 2, 9, 72, 3, 5, 7—9, 406), Diaconu Gheorghe (7231, 76, 83—9, 91, 2, 5—7, 300, 7, 21—3, 5—7, 33, 5), Miciu Ion (7284, 7, 9, 91, 2, 5, 8, 9, 323, 8, 32, 3, 75, 403), Pavel Cristian (7269, 72, 5, 6, 83, 9, 91, 2, 5, 300), Rotaru Silvia (7283—5, 8, 9, 96, 300, 3, 4, 7, 8, 20, 3), *Tabacu Ion* (7272, 6 8 83—9, 91, 2, 5—301, 11, 21—8, 30, 2, 5, 9, 72, 3, 5, 7, 8, 9, 91, 5, 400 5, 6).

RĂCARI. *L.* cl. IX Niţescu Alexandru (2425—44—6, 9, 62, 7284, 6, 7, 325, 6).

RĂDĂUŢI. *Ş. g.* cl. VII Hollinger Sergiu (2410—3, 7, 8, 28, 31, 34), *L. 1* cl. XI Fortună Lariu (7279, 86—8, 93, 300, 1, 3, 4, 17, 8, 20, 2, 8—39, 45), *L. 2* cl. VI Palamarin Brînduşa (2410—4, 8, 3, 2, 55), cl. VII Herand Ana (2417, 8, 34, 8, 9, 41, 2, 4, 52), Weinstein Bertha (2410—4, 7, 8, 29, 30—4, 8, 9, 41, 2, 50, 3—5), cl. X Călăraşu Doru (7217, 83, 83, 5—7, 96, 9, 318, 20, 5, 6, 8).

REŞIŢA. *Ş.g.* 2 cl V. Horvath Andrei (E : 2410—3, 28, 30, 1, 50, 3), cl. VIII Horvath Monica (2419, 21, 3—9, 7326, 8, 286, 7), L. 1 cl. XI Ioiart Ioan (7314—20, 3, 5 6 , 8, 32, 9, 40, 3, 5, 7, 51, 2).

R. SĂRAT. *L. 1.* cl. VII Răgăzeanu Dragoş (2429, 30, 2 4, 8, 9, 41, 4, 8, 53, 4, 5, 66), cl. IX Chiaburu Emil (7284—8, 301, 28, 2425, 6, 8, 44, 5), cl. X Ghiţă Mircea (7227, 34,41,,51, 64, 5, 72, 6, 8, 82, 3, 4, 6—92, 5—300, 5, 6, 8, 9, 23, 6, 7, 8), *Motaş Emil* (727g, 82—9, , 9 300, 1, 9, 1o, 8, 22, 3, 5—8, 33, 5, 42, 7, 9, 64, 6, 73, 5, 8, 9, 82, 9 , 7, 400, 2, 4, 6, 13, 17 22), cl. XI Apostol Ovidiu (7271, 2, 6, 82, 3—9, 92, 3, 5, 9, 300, 1, 9), *L.* 2 cl. X Alexandrescu Vasile 7276, 82—8, 92—5, 99, 300, 1, 9). Ciupercă Ioan (7276, 83, 91, 3, 300, 17, 22—5, 33,60, 87), Neagoie Valeriu (7284, 5, 91, 300, 17, 8, 21, 2,6, 8, 33, 66, 73, 87), Panait Tănase (7276, 8, 84, 9, 2, 300, 17, 22, 3, 5, 8, 33, 67, 87), Popescu Ioan (7272, 6, 83—7, 91 300, 1, 17 18, 22, 5, 6, 8), cl. XI Crintea Mişu (7325, 35, 60, 2,, 273—5, 77, 85, 7, 97—9, 402, 3, 5).

R. VÎLCEA. *Ş. g.* cl. VI Oschescu Mihai, (2438, 9, 41, 2, 4, 50, 52, 3), *Ş. g. 4* cl. VII Petre Mariana (2411—13, 17, 8, 20, 5, 32, 8), Petrescu Ioana (2410—4, 28, 50, 52, 53,) *Ş. g.* cl. V. Ciupercă Mariana (2410—3, 18, 30, 32, 5, 8), *L. 1.* cl. IX Andrei Nicolai (2425—8, 44—9, 7285—8, 7326, 8), Bărăscu Dumitru (2425 8, 45, 6, 7 84—8, 326, 8), Vladu Paul (2424, 5, 8, 44 7, 7284, 5, 8, g 5, 6, 8), Ivan Gheorghe (2401, 4, 21, 9, 3i, 2, 38, 9, 40—2, 4, 6, 9), Marinescu Nicolae (2424, 5, 7, 8, 44—7, 7284—8, 325—8), Popovici Pavel (2424—9, 44—7, 60—2, 7287, 9, 325, 6, 8), Renner Werrer (2424, 5, 7, 8, 44, 5, 6, 9, 60, 2, 7284, 5, 325, 6, 8), Rizoiu Mihail (2425, 6, 8 ,44, 5, 6 ,7, 7284, 7, 325—8), Totescu Ovidiu (2425—8, 44—6, 49, 62, 7284—8), Vintilescu Mihai (2445, 9, 7284—8, 7325—8), cl. XI *Popescu Constantin*) 7315, 22—7, 30—2, 39, 41, 3, 5, 55, 9, 62, 4, 71—8, 83—5, 91, 5, 7, 8, 402—6, 10, 3, 8, 22), *L. 6* cl. V Lazăr Valeriu (2411, 3, 4, 32, 8, 9, 32, 41, 2, 50, 2—4), cl. VI Alexandris Ioana (2439, 41, 50, 2—6), Eliescu Olt (2432, 4, 8, 9, 41, 2, 50—6), Lemenyi Laurenţiu (2411, 34, 39, 41, 2, 50, 2, 3, 5), Nadolu Mircea (2432, 4, 8, 41, 2, 50, 2, 3—6), Pistol Cristiana (2410—4, 29, 30, 1, 2, 9, 41, 2, 50, 2—6), Sbîrnea Gheorghe (2429, 30, 1, 1, 50, 2, 3, 4, 6), Stancu Marin (2413, 8, 38, 41, 2, 50, 2, 3, 6), Tapolovici Daniela (2432, 8, 41, 2, 50, 2—6), Vochiţu Elena (2438, 9, 41, 2, 50, 2—6), cl. XI Catargiu Virginia (7282——4, 6, 7, 93, 300, 17, 8, 20, 5, 6, 8, 72, 3, 76—9).

RÎUL ALB (Tîrgovişte) cl. VIII Pavel Elena (2431, 2, 4, 8, 9, 40, 1, 2, 5—7, 50, 3—5), Tubu Gheorghe (2412, 3, 8, 29, 30—2, 8, 9, 41, 2, 4).

ROMA (Botoşani). cl. VIII Abuziloaie Angela (2413, 9, 21, 3, 32, 8, 9, 62, 7328), Bucşe Ioan (2411, 3, 32, 8, 9, 41, 59, 62), Burăc Elena (2410—3, 23, 4, 38, 9, 41, 7328), Ciocan Ştefania (2413, 9, 31, 3, 4, 8, 9, 41, 62), Chiţanu Elena (2419, 32, 4, 8, 9, 41—3, 52—5, 62, 7328), Chiţanu Lucica (2417, 9, 23, 32, 38, 9, 41, 9, 62, 7328), Diaconu Mihai (2413, 21, 31 4, 8, 9, 41, 7326, 8), Felic Ion (2411, 3,4, 7, 8, 9, 23, 4, 8, 30—4, 39, 44), Humelnicu Constantin (2412 3, 30, 1, 2, 4, 41, 2, 4, 7328), Iacob Adela (2419, 32, 4, 7, 9, 41, 2, 54, 5, 62; 7326, 8), Andrei Iosif Niculina (2418, 9,½23, 32, 8, 9, 41, 2, 54, 5, 62, 7326, 8), Moruz Ilie (2411, 3, 9, 32, 8, 9, 41, 59, 62), Puiu Victoria (2413, 9, 21, 8, 32, 8, 9, 62), Suceveanu Ioan (2411, 3, 32, 8, 9, 41, 54, 62), Ciobănaşu Maria (2513, 9, 21, 4, 32, 4, 89, 31, 2, 54, 62, 7328).

ROMAN. *Liceu* cl. IX Diaconu Lucian (2426, 7, 8, 44—6, 9, 62, 86—87, 7326). cl. X Apostol Ioan (7283, 6, 7, 9, 300, 17, 25, 6, 8, 35, 98, 9, 7400, 5,), Balcan Adrian (7283, 6, 9, 300, 17, 25, 8, 35, 98, 9, 400, 5, 6), Dumitriu Liviu (7283, 6, 7, 9, 300, 25, 6, 7, 35, 98, 9, 405, 6), cl. XI Blumenfeld Mirel (7266, 72, 76, 84, 5, 8, 91, 300, 3, 4, 12, 14, 5, 7, 8, 20, 3, 5, 6, 8, 7333, 5, 9, 40, 30, 5, 59, 62, 71, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 80, 2, 3, 4, 5, 90, 1, 4, 418), cl. X Popovici Liviu (7283, 6, 7, 9, 300, 17, 25, 6, 8, 35, 98, 99, 400, 405), Sandu Petru (7283, 86, 7, 9, 500, 17, 25, 26, 8, 35, 98, 99, 400, 405).

ROŞIORI DE VEDE. *Şc. 8 ani 1* cl. VII Popescu Ştefan (2411, 2, 3, 4, 7, 8, 31, 50, 53, 55), cl. VIII Chivu Gabriela (2419, 31, 2, 9, 40, 9, 55, 60, 2), cl. IX *L. 1* Băceanu Aristiţa (2417, 19, 23, 28, 31, 39, 46, 60, 62, 89), Cristescu Eugeniu (2425, 2426, 28, 45, 6, 9, 62, 7284, 5, 6, 7, 8, 325, 6), Moka Viorica (2425—2428, 61, 62, 7284—88,325), Surpăţeanu Gh. (2424, 5, 6, 7, 8, 44, 5, 6, 7, 7284, 5, 6, 7, 327), Truică Ştefan (2425, 6, 7, 8, 45, 6, 7, 62, 7284, 5, 6, 7, 8, 7325), cl. X *L. 1* Andrei Vasile (7285, 6, 7, 300, 22, 25, 26, 28, 75, 79, 402, 406), Hagea Ştefan (7216, 19, 20, 21, 2, 3, 4, 83, 86, 87, 88, 300. 17, 18, 22, 25, 28, 7373, 78, 79,), Porumbescu Silvia (7284, 5, 6, 7, 8, 90, 300, 18, 25, 6, 8, 375, 406), *L.* 2 Ciortan Ioana (7267, 9, 84, 5, 8, 91, 300, 17, 8, 22, 5, 6, 8, 35), Dîrnă Ion (7267, 9, 5, 8, 9, 95, 300, 301, 17, 18, 25, 26, 28, 35), Popescu Theodor Dan (7367, 84—8, 92, 96, 300, 13, 4, 7, 8, 25, 6, 8, 33, 4, 58, 64, 6, 72, 3, 5—9, 92, 98, 9), Simion Florian-Paul (7284—8, 95, 300, 13, 4, 71, 8, 21—3, 5, 6, 8, 9).

SĂCUIENI (Tîrgovişte). *Ş. g.* cl. VI Grinelescu Georgeta (2410—13, 6, 8, 24, 30—2, 4, 7, 9, 41).

SALONTA (Crişana) *L.* cl. IX Haş Ivan (2423, 8, 44—7, 62, 7317, 8, 25, 26, 34, 85), Todincă Theodor (2423, 8, 44—6, 62, 7287, 8, 317, 25, 6, 34, 85), cl. XI Buta Flore (7314, 7 8 20, 3, 39—40, 3, 73, 5, 7, 84).

SALCIA (Tr. Măgurele) *L.* cl. IX Heşu Ionel (2425, 7, 8, 44—7, 60—3, 7288, 325, 6, 98), cl. X Vasile Nelu (7272, 6, 84—8, 91, 2, 5, 6, 300, 17, 8, 22, 3—5, 6, 8, 35).

SADOVA (Corabia) *Ş. g.* cl. VIII Drăgoi Costina (2429, 30, 2, 4, 8, 9, 41, 2, 6, 7, 9, 54, 5, 60—2).

SATU MARE *Ş. g. 1* cl. VII Primiş Rodica (2412, 3, 28, 32, 8, 9, 41, 2), cl. VIII Rozenbeck Ivan (2411, 13, 21, 4, 9, 30, 1, 2, 4, 9, 41, 2, 45, 50, 2—4, 6, 60). *Ş. g.* cl. VI Tatar Agneta (2411, 2, 3, 24, 8, 9, 31, 44, 45), cl. VII Crişan Marius (2430—5, 8, 41—3, 41, 5, 6), Klein Magdalena (2430—2, 4, 5, 8, 9, 41—3, 45, 6), cl. VII Görbe Mihai (2410, 1, 3, 4, 7—9, 22, 3, 8), *L. 1* cl. IX Andreica Maria (2424—8, 45, 6, 60, 2 ; 7296, 7, 67, 9, 326, 8), Bîdăran Ioan (2424—8, 44—7, 60, 2, 7286, 7, 7327), Cîmpeanu Victoria (2425, 8, 45, 6, 60, 2, 7286, 7, 325, 6, 8, 35, 418), Elefant Gavril (2425, 6, 8, 45, 6, 7, 9, 60, 2, 7284, 6, 7, 326, 401), Firtea Ernie (2427, 8, 44—8, 60, 2, 3, 7326, 7), Göez Eliza (2424—6, 8, 44—6, 9, 60, 2, 7284—8, 91, 317, 8, 25—8, 35, 64, 98), Iacob Margareta (2460—3, 7335, 64, 74, 82—5, 97, 8, 401, 18), Lupşa Mircea (2444, 6, 7, 9, 60—2, 7284, 326, 8, 35), Rochieru Adrian (2425, 6, 8, 47, 9, 60, 1, 7285—7, 326, 8, 64, 98), Todut Gheorghe (2426—6, 8, 45, 6, 44—6, 90, 2, 7237, 326, 8), Toşnadi Alex. (2484, 5, 7, 44, 5, 6, 9, 60, 2, 7287, 326, 8), Trufaşu Viorica (2425—8, 44—7, 9, 60—3, 7284, 6, 7, 91, 326, 8), cl. XI Dan Ioan (7132, 5, 46, 85, 216, 8, 9, 22, 3, 4, 8, 86, 87, 300, 23), Talog E. (7282—90, 96, 98—300, 303, 8), Tătaru Ştefan (7282, 4, 5, 6—9, 98, 9, 7303, 8, 7320).

SEBEŞ. *Ş. g. 1* cl. VII Cosma Popa Ilie (2410—2, 4, 28, 30—2, 38, 9), cl. VI Bortiş Elisabeta. (2410, 2—6, 8, 32, 8), cl. IX Borna Aurel (2425, 6, 7, 8, 46, 7, 9, 36, 62, 7286, 7, 8, 517, 8, 21, 26, 8), Prina Anamaria (2424—8, 44—6, 9, 62, 72, 86, 7, 7326, 8), cl. X Jurcă Ştefan (7285—90, 6, 300, 17, 23, 5, 6, 8, 64, 72, 5, 7, 9).

SELEUŞ. *Ş. g.* cl. VII Branc Gheorghe (2412, 3, 18, 29, 30, 1, 2, 950), Medrea Gh. (2412, 3, 5, 8, 9, 30, 1, 50).

SIBIU. *Ş. g. 3* cl. VIII Bălăşoiu Mircea (2410—3, 5, 7—9, 24, 5, 8), *Ş. g. 9* cl. VIII Şerbănuţ Ligia (2410—3, 8, 9, 21, 3—5, 8), *Ş. g. 7* cl. VIII Bîrză Petre (2419, 31, 2, 4, 8, 42, 50, 3, 5, 62), *Ş. g. 5* cl. VII Bădescu Gabriela (2414, 28, 30, 2, 8, 9, 41, 2, 53, 4), Dobrotă Dumitru (2412, 3, 30—2, 8, 9, 41, 2), Pascu Dorel (2412, 3, 30—2, 8, 9, 41, 2), l. VIII Gîlea Elena (2432—8, 9, 41, 3, 53—5, 62), Sederiag Florin (2412, 21, 3, 28, 30—2, 34, 8—42, 4—7, 9, 50, 2, 3, 5, 60—2 ; 7284—6, 7325), *Ş. g.* cl. VIII Niţă Alex. (2431, 4, 40, 1, 5, 6, 50, 2, 3), *Ş. g. 13* cl. VII Brantă Aurel (2410—1, 3, 4, 7, 9, 21, 31, 2, 4, 9, 45), cl. VII Măntescu Minerva (2395, 5, 62, 404, 12, 3, 32, 8), Păunescu Smaranda (2398, 9, 41, 402—4, 11, 3, 7, 20), *Ş. g. 19* cl. VIII Albu Ioan (2410—3, 8, 9, 25, 28, 31), Barcoş Mariana (2410—1, 3, 4, 7, 9, 9, 28, 31, 2, 4, 9, 45), Bălaşa Adriana (2419, 21, 31, 8, 9, 41, 54, 5, 62), Costea Victoriţa (2450, 3—5, 60—3), Drăg o. Alexandru (2450, 2—5, 9, 61, 2), Frum Dorina (2410, 1, 4, 7—9, 28, 34, 45, 6), Gligor Victor (2430—2, 4, 8—41, 45, 6, 50, 2—5, 62), Grecu Marina (2410, 1, 3, 7—9, 21, 28,), Ivaşcu Marcel (2410, 1, 9, 2, 3, 7, 8, 46, 61, 2), Moldovan Dan Florin (2429—31, 4, 45, 50, 2—4, 6, 60,2), Ocneriu Ilie (2450, 2—5, 9, 61, 2), Olănescu Elena Monica (2410, 1, 3, 7—9, 21, 8, 62), Pop Vasile (2450, 4, 5, 8, 60—3), Roată Mariana (2410, 1, 3, 7—9, 21, 8), Raţiu Tudor (2410—3, 7—5, 21, 28), Sasu Rodica (2411—4, 7, 9, 21, 8, 55, 62), Tîlvan Gheorghe (2413, 9, 21, 31, 2, 8, 41, 50),

2, 4, 8—41, 6, 7, 50, 2, 3, 6, 60—2), Capră Mariana (2439, 31, 40, 7, 8, 50, 2, 3, 5 ,6), Chiriță *Ș. g.* cl. V Ispas Ioan (3381—4, 95—8, 401, 3), cl. VIII Albu Victor Mircea (2410, 1, 3, 31, Trifu Tatiana (2429, 31, 3, 45, 6, 50, 2—4, 60, 2), Untaru Romică (2430, 31, 2, 4, 8—40, 45, 53), Marina (2431, 4, 8—41, 5, 6, 50,6), Kun Aurica (2431, 2, 4, 6, 412, 4—8), Macota Gheorge Lucian (2429, 31, 8, 40, 5, 50, 2, 3, 6, 60), Mihu Emilia (2431, 4, 8—41, 6, 50, 6), *Ș. g 15* cl. VI Ocheșel Elena (2410—8).

SIGHET. *Ș. g. 6* cl. VII Mateșan Gh. (2412, 3, 7, 8, 28, 30, 1, 4, 9, 41).

SIGHETUL MARMAȚIEI. *L. 1* cl. X Fornovald Gh. (7289, 91, 2, 4, 9, 300, 26—8, 30, 5, 7).

SIGHIȘOARA. *Ș. g. 6* cl. VIII Moraru Cristian (2429, 30—2, 4, 8, 9, 41, 2, 4 ,5, 6, 8), Vlăduțiu Anca (2410—25), *L. 1.* cl. IX Munteanu Viorica (2424—8, 44—7, 9, 60—2, 7267, 85, 6, 7, 317, 26, 8), Serachitopol Dan (2424, 8, 44—7, 60—2, 7267, 85—7, 317,26, 8), *L. 6* cl. X Pora Olimpiu (7283—5, 7, 8, 96, 300, 17, 18, 23, 5, 76, 98), *L. seral* cl. X Solomon Mihail (7279, 86, 9, 93, 300, 8, 28, 75, 78),

SILENI. *Ș. muzică* cl. IX Tătaru Constantin (2428, 44—6, 9, 62, 86—8, 7326—8), *L. 1* cl. IX Cătoni Ileana (2425—8, 85, 8, 44—6, 9, 62; 7285, 8, 326, 8), Iridon Maria (2425, 7, 8, 4, 44, 5, 6, 9, 62; 7285, 8, 326, 8), Popescu Radu (2426, 7, 8. 45—7, 61—3; 7286, 7, 32, 6, 8), Tudor Hariana (2424—8, 44—7, 45, 60—3; 7284—8, 32—8), cl. X Babeș Carmen (7251, 84, 5, 6, 9, 91, 2, 9, 300, 13, 17, 8, 23, 5, 8), *Brezoianu Mureș* (7278, 9, 83—9, 91—6, 99, 300, 1, 12, 3, 17, 8, 22, 3, 5, 6, 8, 33, 5, 8, 9, 72—5, 7, 8, 95, 7, 9, 402, 6), *L. 3* cl. IX Bogdan Roman (2424, 7, 60,2, 3; 7284, 8, 325, 6, 8, 85, 97, 8, 401), Balaș Cristian (2425, 6, 8, 45, 760, 2, 3, 84, 7; 7325, 6, 8), Marton Ladislau (2424—8, 46; 7284—8, 91). Pînșu Elena (2424, 7, 9, 8, 45, 6, 60, 2, 3; 7327. 85, 97, 8, 9, 401), Tatu Elena (2424, 7, 60, 2, 3, 83; 7327, 85, 97, 9, 401), cl. X Alexandru Adriana (7282—7, 9, 91, 3, 5, 6, 9, 300), Bratu Ecaterina (7282—6, 9, 91, 2, 3, 5, 6, 9), Ciontea Mariana (7283—9, 91, 6, 9, 325, 6), Cociotopu Margareta 7282—3, 5, 6, 7, 9, 91—3, 5, 6, 9, 300, 28), Chelefa Letiția (7282, 3, 7, 9, 91, 3, 6, 9, 300, 22, 3, 6), Chitic Elena (7283, 4, 7, 9, 91, 3, 5, 6, 9, 313, 8, 22, 3, 6), Dan Adreia Doina (7282, 3, 5, 6, 7, 9, 91—3, 5, 6, 9, 300, 23), Danciu Mariana (7282—5, 7, 9, 91, 3, 5, 6, 9, 323, 6), Danciu Virginia (7282—5, 7, 9, 91, 23, 5, 6, 9, 323, 6), Lungu Gherghica (7282—4, 6—9, 91, 3, 9, 300, 23, 5, 6), Mădan Valentin (7282—9, 91, 3, 5, 6, 9, 300, 23, 6), Maniu Dan (7282, 3, 5—7, 9, 91, 3, 6, 9, 300, 18, 23, 5, 6), Marcov Filofteia (7276, 82—4, 7—9, 91—3, 5, 6, 9), Naicu Cornel (7272, 6, 82, 3, 5, 7, 9, 91—3, 6, 9, 300), Sederiaș Florica (7272, 6, 82—9, 91—3, 6, 9, 300), Sfencoci Traian (7283—9, 91, 3, 6, 9, 300, 22, 5, 6, 8), Stroe Aurelia Veronica (7282—5, 7, 9 91, 3, 6, 9, 300, 22, 5, 6, 8), Stroe Aurelia Veronica (7282—5, 7, 9, 91, 3, 6, 9, 323, 6), Turcu Octavian (7282, 3 5, 6, 7, 9, 91—3, 6, 9, 300, 18, 23, 5, 6).

SIMERIA. *L. 1* cl. IX Paștei Gh. (7284—8, 325, 6, 8, 2424—6, 8, 44, 7, 91), cl. IX Samoilescu Alex. (2425—8, 45—7, 9, 7325, 6, 8, 84, 5, 6, 7).

SIRET. *L.* cl. VIII Breabăd Vasile (2410—3, 5, 6, 8, 27).

SINNICOLAUL MARE cl. IX Bach Iosif (2425, 6, 8, 44—6, 9, 61, 2, 7284, 8, 825), Voichița Doina (2424, 5, 7, 8, 44, 6, 72, 84—8, 7326), cl.IX Rudișteanu N. (2410—3, 5, 7, 9, 21, 3), Petruș Niculina (2424—8, 45—7, 84—8, 326, 8), Tumac Ene (2411, 4, 7, 9, 21, 3,5, 8).

SLATINA. *L. 1* cl. XI Gh, M. Ion (7267, 300, 11, 4, 7, 8, 20, 2, 3, 6, 8, 39, 42). *L. 6.* cl. X Stăncescu Stefan (7264, 7, 9, 78, 83—93, 5—301, 13, 4, 8, 20—8, 30, 2, 3, 5, 7, 42, 7, 51).

STANIE. *L.* cl. IX Cososchi Mariana (2425, 7, 8, 44, 5—7, 9, 60, 2, 7525, 6, 8), cl.XI Moraru Elie Gh. (7303, 14, 8, 23, 39, 42, 72, 3, 5—8, 91, 7405).

STEJARU. *Ș. g.* cl. VII Roșu Stelian (2429—34, 8, 9, 41, 2, 4, 50, 4, 5).

STOICULEȘTI *Ș. g.* cl. VIII Chineață Dumitru (2429, 32, 3, 6—43, 50—7, 9).

SOMCUTA MARE. *L.* cl. IX Buda Dan (2425, 6, 8, 45, 6, 7, 7284—8, 317, 8, 21, 5, 6, 8), cl. X Buhai Alexandru (2423—5, 8, 46, 7267, 7, 8, 321, 5, 6, 8), Cuceu Gh. ((7284—6, 9, 92, 301, 25, 6, 39, 75, 87, 97, 9), Dragoș Eugenia (7283—9, 91, 2, 7, 300, 1, 18, 87, 418), Mărica Doina (7283—9, 91, 2, 300, 22, 5—8), Rozmoș Florin (7267, 7, 91, 2, 7, 300, 1, 17, 8, 21, 2, 6, 8).

STEFĂNESTI (ARGEȘ) cl. VI Ceapă Adrian (2413, 7, 8, 24, 8, 30, 2, 4, 9, 41, 50, 3, 4), Portuzualis Costos (2411—3, 7, 8, 24, 5, 8, 301, 2, 4, 8, 9, 41, 2), cl. VII *Popescu Cristian* (2410—8, 22, 4—6, 8, 9, 30, 1—9, 41—6, 50—6), cl. VIII *Picol Gheorghe* (2394—402, 4—6, 8—28, 7276, 84, 5, 91).

SUCEAVA. *Ș. g. 3* cl. VIII Martiniuc Daniel (2419, 29—32, 4, 8, 9, 41, 2, 4—6, 54,5), *L. Ștefan cel Mare.* Tecuceanu Radu (2411—3, 7, 8, 30, 2, 4, 8, 9, 41, 2, 50, 3, 4, 5), Vatamaru Marieta (2430—4, 7, 8, 9), cl. IX Airoaie Doina (2424—8, 45, 6, 7284—8, 326, 8), Hergheliu Ortansa (2410—21, 3, 5, 8, 7284, 5, 7, 8), Turcu Elisabeta (2416—21, 5, 6, 8, 7284—8), Verciu Gh. (2426—8, 44—6, 9, 62, 7284, 6—8, 325, 6, 7, 8), cl. X Olaru Radu (7272, 7, 82—8, 91—3, 5, 6, 300, 1, 13, 4, 7, 8, 20, 2, 3, 5—8, 33, 5, 7, 60, 72—7, 85, 7, 91, 9, 402).

TĂLMACIU. cl. XI Veştemean Ion (7283, 83—4, 8, 301, 1, 15, 7, 8, 20, 2, 5, 6, 8 3.9, 42).

TAUTI-MAGHERĂUŞ. *Ş. g.* 20 cl. VII Dragomir Gheorghe (2412, 30—2, 4, 8, 9, 41, 2, 50, 3—5).

TECUCI. *Ş. g. 9* cl. VI Enache Vasile (2429—32, 4, 8, 9, 41, 42, 53—5), cl. VIII Cotigă Stefania (2410—4, 7—9, 21, 4, 8, 9, 31, 2, 4, 8, 9, 41, 2, 5. 50, 3, 5, 62), *S. g. 2* cl. VII Timofte Ion (2431, 2, 4, 8, 9, 41, 4, 5, 53—5, 61), cl. VIII Petică Ana-Maria (2410—2, 8, 9, 21, 38, 39, 41, 2), *L. 1* cl. IX Costea Constantin (2424, 5, 44—9, 60, 2, 7288, 385, 7, 99), cl. X Miron Alexandru (7284—8, 99, 300, 17, 8, 25, 6, 8, 72, 3, 7, 9). cl. XI Baniţă Mihai (7288, 313, 4, 7, 8, 20—2, 5, 6, 8, 39, 45, 64, 77, 83—5, 51), Pădure Constantin (7284, 8, 314—7, 8, 20—2, 5, 6, 8, 39, 45, 64, 77, 83—5, 91), L. 2 cl. V Cucu Sorin (2410—3, 29—32), Mîrza Mitrică (2410—5, 30, 1, 4, 53, 6), Popa Cecilia (2411—3, 30—2, 50, 3), cl. VII Floare Ion (2412, 3, 32, 8, 9, 41, 2), Gîrleanu Aurel (2413, 20, 3, 312, 4, 8, 9, 31), cl. IX Lazea Alice (2424, 5, 7, 9, 45—7, 9, 62, 7200, 84, 5, 8, 91, 326, 8), cl. XI Nicoară Ana-Maria (7283, 4, 6, 7, 8, 314, 7, 8, 20, 5, 6, 8, 72, 3, 5, 7, 83, 4).

TIMIŞOARA. *Ş. g.* 13 cl. VI Hirth Walter (2429, 32, 8, 9, 41, 2, 4, 50, 3—6), *Ş. g. 12* cl VII, Dobra Rodica (2411, 3, 7, 8, 28—31, 4, 8, 41, 4). cl.VIII Gheorman Mariana (2410—26, 8), Marinca Vasile (2410—5, 7—21, 3, 5—8), *L. 1* cl. VII Dolga Marcela (2425, 30, 2, 9, 40, 52—5), Schiopu Aurel (2411—3, 20, 9—32), Titerlea Constantin (2411—3, 8, 25, 8, 31, 2, 9, 41), cl. VIII Ispas Emil (2429, 31, 2, 5, 8, 42, 50, 3, 4), Menrie Ştefan (2410—3, 7—9, 1—4, 7, 8, 31, 2, 4, 9, 41, 5, 50, 2, 3), Ştefi Felicia (2411—3, 20, 31, 7, 8, 46), cl. X Antom Anton (7283—8, 90—3, 96, 300, 23), cl. XI Rogojan Dorina (7263, 76, 8—8, 99, 300, 3), Teleagă Petru (7263, 5—9, 72, 5, 6, 8, 81—8, 300, 3), cl. V Raţiu Ion (2410—4, 2429—32), L. 2. cl. VI Dordea Doina (2431, 2, 4, 9, 41, 3, 53—5), Tufan Adriana (2429, 31, 2, 7, 8, 9, 41—4), Voiculescu Oltea (2431, 2, 4, 8, 9, 41—3, 53, 54), cl. VIII Băcilă Diana (2410—14, 9, 21, 3, 6, 7), Costan Bagiu (2410—3, 17—21, 25, 28), Honga Victor (2412, 8, 9, 21, 3, 34, 41, 4), Mujescu Liliana (2419, 21, 3, 31, 49, 50, 4, 5, 60, 2), Răducanu Monica (2619, 21, 3, 38, 9, 41, 54, 5, 60, 2), Schuch Cristina (2413, 9, 21, 23, 4, 8, 2), cl. IX Breiten Iacob, (E : 2423, 5—8, 45, 6, 49, 60—2, 7286—8, 7325, 6), Igasag Mihai (E : 2423, 7, 8, 8, 45 6, 9, 60, 2 ; 7238, 85—8, 325, 6), Kellinger Mihai (E : 2425, 8, 44—6, 60—3 ; 7286—8, 326, 6, 8), Köhl Iosef (E : 2425—8, 45, 6, 60—2 ; 7286—8, 325, 6, 8), Lang Petru (E : 2425, 8, 44—6, 9, 60, 2, 4 ; 7284—8, 325, 6, 8), Lassel Raimund (E : 2423, 7, 8, 7, 8, 45, 6, 9, 60—2 ; 7286——8, 326, 8), Magen Iacob Hans (E : 2426—8, 45, 9, 60—2 ; 7286—8, 325, 6, 8), Scheen Iosif (E : 2425—8, 45, 6, 9, 61—3 ; 7286—8, 326, 8), *L.* 3 cl. V Aconstantinesei Doina (2410—3, 29—31, 50—3), Ancuşa Dan (2411—3, 28—31, 34, 53), Anderca Sorin (2410—4, 30, 1, 50—3), Cenda Elena (2410—3, 9—32, 50, 2, 3), Colescu Sanda (2410—3, 29—31, 5—03), Copăceanu Anca (2410, 2, 3, 29—32, 50—3), Dancău Marian (2410—4, 30, 1, 50, 1, 3), Dreichlinger Gabirel (2410—4, 30, 1, 50, 3), Racz Matei (2410—4, 30—2, 50, 1, 3), Severineanu Carmen (2410—3, 20—32, 50, 3, 6), cl. X Lipovan Monica (7272, 6, 89, 91, 2, 5—7, 9, 300, 8, 9, 26, 7, 30, 5, 9, 404), *L. 7* cl. VI Sădean Sorin (2410—4, 38, 9, 41, 50, 4, 5), cl. VIII Crişan Luminiţa Violeta (2429, 30—2, 4, 8, 9, 41, 6, 50, 3, 5, 60, 1). cl. IX Humiţa Ioan (2428, 45, 9, 60. 2, 3 ; 7288, 325, 6, 8), *L.610* cl. X Păcurariu Caius (7272, 6, 8, 83, 4, 6—9, 91, 2, 5, 6, 99, 300, 1).

TITU. *L.* cl. IX Dincă Marian (2424, 6, 8, 44—9, 60, 2, 3 ; 7284, 5, 7, 8, 91, 324—6, 97—9), cl. X Soare Gheorghe (7286, 7, 9, 92, 5, 8, 300, 1, 17, 8, 22, 5, 6, 7), cl. XI *Bărbu, Iescu Puiu* (7263, 72, 76, 82—8, 91—3, 5, 6, 8, 9, 300, 1, 3, 8, 20—3, 5, 33—5, 9, 40—3, 45, 64, 77, 99, 400—2, 5).

TÎRGOVIŞTE. *Ş. g. 1.* cl. VIII Milea Mihai (2431—4, 38—42, 45—7), *Ş. g.* cl. VI Mihai Eugen (2411, 3, 31, 7, 2, 8, 9, 52, 3, 5), cl. VIII Chivărău Laura (2410—14, 16—28), *L. 1* cl. IX Ionescu Marius ((2424—8, 44—7, 49 ; 7286, 7, 326, 8, 39), Pătraşcu Mircea (2423, 5—8, 45, 6 ; 7284, 5, 7, 8, 325), *L. 6.* cl. V Rădulescu Petre (7283—9, 72, 6, 91, 3, 6, 300, 23, 5, 6, 8), Soare Nicolae (7272, 8, 83, 9, 90, 1, 3, 5, 300, 8, 23, 72, 5, 9), cl. XI *Bănică Aurel* (7278, 85, 8, 92, 3, 303, 22, 5, 32, 7, 9, 45, 52, 6, 9, 60, 4, 72—9, 80—5, 90, 1, 8, 9, 400, 2, 4, 11, 3, 8, 22), Jica Dorin (7266, 8, 82, 4—8, 99, 303, 382—5, 404), Mihăilescu Maria (2463 ; 7272, 6, 96, 300, 3, 4, 73, 5, 7—9 87. 91, *L. 8* cl, XI Stanciu Virgil (7263, 6, 75, 82—5, 87i 8, 90—3, 5, 6, 9, 300, 1, 12—4, 17, 8, 20—3,5, 6, 8, 32, 3, 5, 7—9, 43, 3 6—8, 59, 60, 75, 7), Ştefănescu Călin (7263, 6, 72, 8, 83, 8, 92, 300, 2—4, 43).

TÎRGU BUJOR ((Galaţi) *L. 1* cl. VIII Rusu Otilia (2431, 2, 8, 9, 41, 2 ,55, 61, 2).

TÎRGU CĂRBUNESTI (Oltenia) *L.* cl. IX Buşneag Dumitru (2425, 8, 45, 7, 9, 61, 2 ; 7286, 8, 325, 6, 8).

TÎRGU JIU. *Ş. g.* cl. VIII Udrică Mioara (2411—3, 17—9, 21—3, 27, 8, cl. IX Cristea Horia Călin (2423, 5, 49, 60—3 ; 7317, 8, 20, 1, 6, 418), Popescu Anca (2425, 8, 45, 6, 9, 60—2 ; 7286—8, 326), cl. X Buzuru Valeria (7283—5, 7, 99, 309, 14, 7, 8, 25—8, 85, 7,

Ciocîrlie Valeriu (7272, 6, 83, 92, 5, 6, 314, 8, 20—2, 5—8, 75, 9, 97—9, 402), Pliga Gheorghe (7284, 5, 7, 8, 92, 6, 300, 1, 18, 22, 3, 5—8, 39, 42), Isac Constantin (7284—8, 92—6, 300, 1, 317, 18, 21—3, 5, 6, 8, 66, 85), Mălăiuş Ilie (7275, 83—8, 99, 300, 9, 17, 8, 20, 2, 5, 39, 66, 75, 9, 87), Niţoiu Gheorghe (7275, 84, 7, 300, 12, 4, 7, 8, 21—3, 75, 79), Zamfiroiu Constantin (7275, 84, 6, 7, 96, 300, 17, 8, 21—3, 66, 78), cl. XI Bratu Traian (7282, 3, 5, 93, 5, 303, 17, 8, 20—3, 25, 6, 8, 32, 5, 8, 9), Buşe Florian (7185, 228, 79, 83, 6, 7, 90, 6, 9, 301, 3, 8, 34, 17, 8, 20, 23, 6, 8, 39, 60, 64, 72, 3, 5—8, 84, 99), Haranaciu Vasile 7312, 14, 17, 8, 20, 3, 5, 6, 40, 3, 47, 413, 418, 22), L. 2 cl. V Feroiu Viorel (2410—3, 29, 30—2), Guran Gheorghe (2412, 3, 38, 32, 6, 8, 41, 50, 53), Hornea Maria (2410, 13, 4, 8, 24, 8, 24, 8, 9, 30, 38), Oproiu Dan (2410—3, 16, 29—32), Pîrtea Ion (2410—3, 34, 56, 42, 51), Vîlceanu Emilia (2410—3, 31, 2, 50—1, 3), cl. X Drugă Florea (7278, 82, 4, 92, 6, 8, 9, 318, 29, 7, 8, 32, 73, 5, 8, 9).

TG. MUREŞ. *L. 1* cl. VII Sonnefield Gabriel (2412, 20, 30, 1, 4, 9, 44, 7324), Dragotă Adrian (2412, 4, 22, 9—32, 8—42, 44—6), Enghiş Vasile (2430—2, 34, 8, 9, 50, 53), cl. IX Sabău Alexandru (2424, 5, 48, 7284—88, 2444, 7, 9), Socaciu Theodor (2425, 8, 44—6, 8, 61—2, 7288, 325, 6, 8), cl. IX Pop Horia (2424—8, 7207, 76, 84—88, 90, 91, 95), cl. XI Pasat Mihaela (7314, 17, 8, 21—3, 25, 6, 8, 34, 9, 42, 43, 5, 8).

TG. NEAMT. *L. „Ştefan cel Mare"* Groza Dorin (2422, 9—31, 4, 9, 41, 43, 4), Lateş Marcela (2410—3, 17—21, 3, 5, 8, 30—4, 36—9, 41—5), Vasiliu Doina (2410—14, 17—19, 21).

TG. OCNA. *L. „Constantin Negri"* cl. X *Motreanu Dumitru Dan* (7286—8, 92, 3, 5, 300, 1, 8, 13, 14, 7, 8, 20, 2, 3, 5—8, 35, 7, 60, 6, 72—8, 85, 7, 44, 7402, 3, 6, 18).

TÎRNĂVENI. *L. 1* cl. IX Todoran Gheorghe (7285, 6, 96, 313, 17, 18, 22, 25—28, 39, 82, 5, 97, 8, 9, 2444, 6, 9, 61—63), cl. XI Suca Nicolae Valentin (7266, 8, 301, 11, 17, 8, 20, 6, 8, 39, 71—5, 7, 8, 81—5), Soimoş Francisc (7263, 6, 8, 303, 4, 7311, 4, 5, 7, 8, 22, 5, 39, 45), 73, 7, 83, 4, 90, 4), L. 2 cl. VIII Patakfalvi Laszlo (2410—4, 7, 9, 21, 3, 5, 6, 8).

TOPLITA. *L. ..Toplita"* cl. VII Iman Radu (2410, 1, 20, 8, 31, 2, 4, 8, 41, 56), cl. VIII Bîndiu Ioan (2419, 30, 3, 6, 32, 8, 9, 55, 59, 62).

TORINAC. *Ş. g.* cl. VII Gael Iuliana (2410—3, 8, 9, 28, 31, 4, 40, 1, 50, 54, 59), cl. VIII Nagy Iuliana (2402, 12, 6, 23, 30—4, 36, 38, 40—2, 45, 54).

TRUSESTI. *L. Truseşti* cl. VIII Michiu Dan (2431, 2, 4, 9, 40, 2, 4, 5, 9, 50, 3, 60—2), cl. IX Anton Romulus (2424—8, 45—7, 49, 60—2, 7284, 5, 8, 325—7, 397), Muraru Valeria (2425, 44—7, 60, 2, 7284, 8, 325, 6, 8), Terciu Fănică (2424, 5, 7, 8, 44—6, 62, 7285, 8, 325, 6), cl. X *Corduneanu Dumitru* (7278, 82, 90, 91, 3, 7, 8, 306, 308, 13, 14, 18, 20—3, 3—35, 37, 8, 42, 7, 73, 5, 77, 9, 85, 4, 402, 5, 13, 18), Livădaru Emil (7282—8, 91—3, 5—7, 300, 8, 17, 20—2, 25, 7, 8, 66, 72, 3, 5, 7, 85, 97, 402).

TULCEA. *L. 1* cl. VII Stoina Maria (2411—8, 29—31, 34, 40; 44, 45), cl. VIII Viziru Perzina (2432, 8, 9, 41—3, 7, 51, 60, 62), cl. IX Ionescu Florin (2424, 6, 46, 60, 1, 2, 7284—8, 328), Ivanov Liliana (2427, 44—6, 49, 7285—8, 326. 8), cl. X Ioanidis Constantin (7283, 300, 14, 17, 8, 21, 3, 6, 66, 73, 5, 7, 85, 87).

TURDA. *Ş. g. 6* cl. VIII Toma Adela (2412, 9, 22, 3, 5, 34, 6, 62, 28—31). *Ş. g. 4* cl. VIII Belcin Ovidiu (2419, 21, 23, 5, 6, 8, 60, 2), Costea Theodor (2419, 21, 3, 4, 8, 45, 60, 2), Rosenberg Emeric (2419, 21, 3—5, 8, 45, 6, 60, 62), Ş. g. 6 cl. VI Bonţeanu Marius (2429, 31, 3, 4, 41, 50, 53, 59), cl. VIII Nicoară Doina (2429, 32—4, 36—9, 41), *L.61* cl. IX Moldovan Ana-Maria (2425, 8, 44—7, 9, 60—62, 7287, 325, 6, 8), *L.66* cl. IX Feldinger Edgar (2425, 6, 8, 44, 5, 6, 7, 9, 7284—8, 325, 7, 8), cl. X Ciama Mihai (7284—93, 5, 6, 300), Serban Viorel (7267, 72, 6, 82—93, 95—7, 99—301, 8, 9).

TUŞNAD. *S. g.* cl. VII Nicu Dan (2410—21, 24, 8, 40, 1), L. Tuşand cl. X Nicu Maria 7276, 87, 99, 300, 21—3, 25—7, 85, 97—99, 402).

TURNU SEVERIN. *Ş. g. 1* cl. VI Caliţoiu Mircea (2410—3, 8, 24, 8, 9, 31, 2, 9), Călăpăreanu Doru (2410—2, 7, 8, 26, 5, 9, 30), Ciocea Ana (2410—2, 31, 2, 9, 0, 3), Dulbava Marcela (2410—3, 24, 9, 31, 2, 9, 50), Kirsch Tatiana (2410, 24, 9, 31, 2, 8, 9, 52, 50), Vlăduţ Maria 2410, 3, 18, 24, 8—32, 38, 9, 41), cl. VII Căpraru Mihaela (2410—4, 6, 7, 24, 8, 2, 4, 8, 9, 41, 4, 50, 3—5), Pănescu Florica (2411—3, 7, 8, 30, 2, 4, 7, 9, 41, 2, 54, 5, *Bădescu Iulian* (2410, 4, 7—9, 21—6, 28—34, 8—46, 9, 50, 2—5, 60—2), Bicu Mircea (2410—4, 7—9, 21—5, 8). Căpriţă Cristian (2410—4, 7—9, 21, 3—5), 28, 31, 4, 8—40), Crăineanu Elena (2410-2, 5, 7, 21, 23, 4, 31, 2, 4, 8-9, 41, 4, 40, 4, 4), Dinu Aurelia (2410, 4, 9m, 21, 31, 4, 7, 9, 52, 4, 5, 62), *Dumitrescu N.* (2410—4, 7—9, 21, 3—5, 28, 30, 2, 4, 8, 9, 41, 5, 9, 50, 52—1), Grecu Doina (2413, 4, 9, 31, 21, 4, 7, 9, 41, 4, 50, 4, 5), Grigoraş Alex. (2410, 11, 3, 9, 21, 3, 4, 32, 8, 41, 2, 54, 5, 62), Sîrbulescu Ion (2410—4, 7—9, 21, 4, 5, 8, 44, 50, 5, 9, 60, 2), Ş. g. 4 cl. VIII Bocancea Mihail (2410—3, 8, 9, 21, 8), *Ş. g.* cl. VI Nica Constantin (2413—4, 28, 31, 2, 9, 53), *L. 1* cl. VIII Morţun Alexandru (2411—4, 7—9, 21, 3, 5, 8, 30—2, 4, 9—42, 44, 5, 50, 2, 5, 60, 1), cl. IX Sevici Constantin (2460, 2, 7317, 8, 20, 2,

3, 45, 64, 77, 401, 2, 5, 6), Gărgălie Silvestru (7312, 14 7, 8, 20, 2, 5—8, 35, 7, 77), cl. X Egher Liviu (7317, 8, 22, 3, 5, 6, 8, 30, 3, 5, 64, 75, 6—9, 97, 402, 5, 16), *L.2* cl. VII *Biban Irina* (2410—4, 16, 7, 20, 1, 4, 6, 8—36, 38—43, 5, 6, 50, 3—5, 6, 7, 9), cl. VIII Dafinoiu Marian (2431, 2, 4, 8, 9, 41, 2, 4, 6, 62, 7328). *Iupceanu Ion* (2410, 1, 3—9, 1, 3, 7, 8—5, 8—42, 44—7, 9, 7284, 6—7, 325, 6, 8), Semernescu Elena (2410, 1, 9, 21, 31, 40, 50, 3, 62), Spătaru Angela (2410—3, 9, 21, 8, 31, 9, 40, 5, 9, 50, 3, 62), cl. X *Zimța Fl. Viorel* (7272, 4, 6, 82—8, 91—6, 300—2, 313, 4, 7, 8, 20—3, 5—8, 31, 3, 5, 8, 42, 9, 72—8, 87, 91, 3, 5, 402, 3), *L. 3* cl. IX Grecu Petre (2428, 45, 6, 7, 9; 7284, 5, 7, 8, 325, 6, 8), Năzdrăvan Mihail (2424, 44—6, 60, 2; 7286, 7, 325, 8), Popescu S. Anghel (2423—8; 7284—8), Koczi R. Mihaela (7284, 5, 8, 91, 9, 300, 1, 17, 8, 22, 6, 8), Rădulescu Ecaterina (7284, 5, 8, 91, 9, 300, 1, 17, 8, 22, 6, 8), Popescu Manina (7282, 3, 6, 7, 303, 17, 8, 20, 6, 8, 39, 72, 3, 7, 84, 91, 8).

URLAȚI. *L.* cl. X Vasile Șt. Ioan (7276, 82, 3, 305, 14, 7, 8, 21—3, 5, 6, 8, 35, 9, 42, 8, 64, 75, 9, 97).

URZICENI. *Ș. g. 1* cl. VI Buga Mihai (2411, 2, 30, 2, 4, 8, 9, 41, 2, 53), Ghiță I. Petre (2411, 3, 30—2, 4, 8, 9, 41, 2, 53), Matei Valeriu (2411, 3, 30—2, 4, 8, 9, 41, 2, 53), cl. VII Georgescu Adina (2412, 3, 30, 2, 4, 8, 41, 2, 53), VII Matei Ion (2411—3, 9, 21, 3, 31, 2, 9, 41, 60, 2), Mihai Georgeta (2411, 3, 9, 31, 2, 7, 8, 41, 2, 50, 2, 4, 5, 62), Avrămoaie Pavel (2413, 8, 31, 2, 4, 8, 9, 41, 2, 4, 53, 4).

VADUL CRIȘULUI. *L.* cl. X Vereș Ioan (7283, 5, 8, 300, 17, 8, 23, 5, 6, 8, 75, 7)

VALEA LUI MIHAI cl. XI *Vesa Ioan* (7263, 7, 9, 82—8, 91, 2, 5, 6, 9, 300—4, 6, 9, 11, 3, 4, 7—9, 23—6, 28, 39, 40, 5).

VASLUI. *L. 1* cl. VII Gold Iuliana (2421, 31, 2, 4, 6, 8—2, 30, 3, 5), *L. 6* cl. IX Abramovici Bunea (2424, 6, 8, 45, 6, 9, 62, 3, 7286, 7, 325, 6, 8, 30).

VADASTRITA (Corabia) cl. VIII Cismaru Opriță (2410, 5, 7, 9, 20, 1, 3, 4, 8, 32, 4, 38—41, 7328), Pistă Ioana (2410, 1, 3, 31—4, 8—42).

VICOV DE SUS (Rădăuți) *L.* cl. IX Burciu Aurel (2424, 7, 8, 44—7, 9, 62, 3, 7286, 7, 25, 6, 8).

VINGA (Arad) *L.* cl. VIII Martinov Margareta (2412, 3, 8, 20, 1, 3, 5, 7), Petrov Agata (2412, 3, 8, 20, 1, 3, 5, 7), Petrov Petronela (2412, 3, 8, 20, 1, 3, 5, 7), Denor Ecaterina (2412, 3, 8, 20, 1, 3, 5, 7).

VISEU. *L. 1* cl. XI Stoica Ioan (7266, 83—8, 90, 1, 6, 300, 3, 14, 7, 8, 20—3).

VITANESTI (Alexandria) cl. VIII Iordan Mariana (2431, 6—9, 41, 6, 7, 50, 2—5, 60, 2).

VOICESTI (Drăgășani) *Ș. g.* cl. VIII *Titu Ioan* (2410—9, 21, 3—32, 4, 8, 41, 4, 5, 7; 8, 50, 2—5, 61, 2, 7284—7, 7325, 6, 8).

VULCAN (Petroșani), *L.* Gurtavenco Alex. (2421, 8, 30, 2, 4, 9, 41—45, 50, 3—5, 60, 2).

ZALĂU. *L. 1* cl. IX Bîrjac Ioan (2431, 2, 4, 8, 9, 41, 6, 8, 60, 2, 7321, 8), Fekete Lucia (2431, 2, 4, 5, 9, 41, 2, 5, 8, 62, 7326, 7328), Lapoș Florica (2429, 31, 4, 8, 9, 45, 6, 8, 60, 2, 7326, 28), Sălăgean Angela (2431, 2, 4, 8, 9, 41, 2, 5, 6, 8, 62, 7), Turcaș Aurica (2431, 2, 8, 9, 41, 2, 5, 6, 8, 62, 7326, 28), Varga Lia (2431, 2, 4, 8, 9, 41, 2, 5, 6, 62, 7326, 28).

ZIMNICEA. *L.* cl. XI Marcu Iulian (7283, 11, 20, 3, 33, 9, 64, 72, 73, 77, 8, 98, 413).

ZLATINA (Alba Iulia) *L.* cl. VII David Ovidiu (2410—4, 7, 9, 23, 30—2, 4, 42, 50, 3, 5), Răchita Emil (2425, 6, 8, 42—6, 8, 61, 2, 7288, 326, 28). *(va urma)*

★

Exemplare separate din G. M-B ce se mai pot procura contra cost sînt: 1964 (1, 2, 4, 6, 11, 12) și 1965 (1, 2, 4, 4, 5, 6, 7)

★

Rezolvitorii de probleme sînt rugați să nu expedieze mai mult de un plic în cursul unei luni, iar în plic să fie cel puțin 12 probleme bine rezolvate, altfel nu se pot anunța la rubrica rezolvitorilor.

Elevii școlilor profesionale sau pedagogice pot trimite soluții și la problemele pentru clasele VII, VIII și IX.

MUZEUL

1966 JUL 21

CĂTRE REZOLVITORII DE PROBLEME

Corespondenții care ne trimit probleme rezolvate trebuie să redacteze fiecare problemă separat, însoțind-o de toate calculele necesare și de figuri desenate cu îngrijire.

Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceeași foaie.

Evidențiații trebuie să aibă cel puțin 35—40 soluții bune.

Problemele care se propun de către colaboratorii revistei să fie clar alcătuite și însoțite de soluții, să fie personale, iar nu luate din cărți sau reviste. Elevii sînt sfătuiți să înceapă a propune probleme numai după ce au rezolvat un număr destul de mare de exerciții și probleme. Problemele propuse, dar necorespunzătoare, nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse au fost publicate în cărți sau reviste, este rugat să arate precis volumul și pagina unde a mai apărut enunțul sau soluția problemei respective.

Solicităm probleme interesante legate de practică.

— Problemele propuse urmînd a fi publicate ținînd seama de predarea la clasă a materiei respective, autorii lor sînt rugați să trimită problemele din vreme însoțite de una sau mai multe soluții îngrijit scrise precum și observări, discuții sau uneori generalizări, arătînd și modul cum au fost stabilite.

— Problemele propuse (P), *note matematice* (N), *articole* (A), *materiale privind cercurile de elevi* (C), *se vor trimite redacției* G.M.-B. *de preferat într-un plic separat de problemele rezolvate.*

Corespondentul nostru care a citit și a înțeles deplin multe din soluțiile publicate, a rezolvat multe din problemele propuse poate și este îndemnat să încerce să schițeze cîte o notă rezultată dintr-o observație făcută cu ocazia rezolvării unei chestiuni mai grele. Aceste note să fie *revăzute de mai multe ori înainte de a fi trimise*, pentru ca redactarea lor să fie *cît mai clară și concisă*. Figurile să fie făcute separat. În redactare se vor evita prescurtările.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

La publicarea problemelor rezolvate se vor menționa rezolvitorii care au dat o bună redactare și o soluție interesantă sau mai multe metode de rezolvare.

Elevii claselor a IX-a pot trimite soluții și la problemele propuse pentru clasa VIII-a. Problemele rezolvate trebuie să fie din ultimile trei numere apărute în G.M.B. *Problemele rezolvate*, vor fi expediate în cursul unei luni și vor fi însoțite de un borderou cu numărul problemelor, scrise în ordinea crescîndă. Pe plic se va scrie școala, clasa și localitatea revolvitorului. Problemele propuse vor fi separate, corect rezolvate și citeț semnate. Desenele să fie făcute îngrijit pe foi separate.

Elevii claselor V—VIII vor fi anunțați în rubrica rezolvitorilor de probleme dacă trimit odată cel puțin 8 probleme bine rezolvate, iar elevii claselor IX—XI, pentru cel puțin 12 probleme bine rezolvate.

Autorii sînt rugați să semneze clar la sfîrșitul lucrării personale pe care o trimit pentru publicat și să dea adresa lor exactă.

★

În vederea stimulării elevilor clasei XI premiați la olimpiadele internaționale de matematică sau olimpiadele interne (etapa finală), care devin studenți ai facultății de matematică-mecanică sau fizică de la Universități, conducerea Ministerului Învățămîntului a hotărît să li se acorde următoarele forme de sprijin material:

a) bursă în primul an de studii, indiferent de situația lor materială. În următorii ani de studii bursa să fie menținută în aceleași condiții dacă obțin media generală cel puțin 9,00.

b) la începutul primului an de studii să li se acorde cărți și manuale de specialitate în valoare de 500 lei.

c) în vacanțele anului I de studii să fie trimiși cu prioritate la odihnă în taberele studențești (iarna sau vara la alegerea studentului) dacă rezultatele școlare sînt foarte bune.

★

Tirajul fiind limitat, gazetele se trimit mai întîi abonaților și de aceea rugăm colaboratorii noștri să se aboneze de îndată. Prețul este de 2 lei exemplarul. *Abonamentele se pot face prin oficiile poștale locale.*

I. P. „Informația" — c. 3432

INDEX 41601

Lei 2

BIBLIOTECA CENTRALĂ 1883

E1h26

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE
DIN REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA

GAZETA MATEMATICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XVII — august 1966

8

GAZETA MATEMATICĂ
SERIA B
Anul XVII, nr. 8 — august 1966

SUMARUL

Pag.

1. Despre unele proprietăţi şi aplicaţii ale funcţiei de gradul I şi ale funcţiei omografice de N. Peligrad, Piteşti 337
2. Raza sferei circumscrise unui tetraedru de Doru Manolache, Curtea de Argeş 342
3. Note matematice de N. Păun din R. Vîlcea, Ilie Ionescu, Simion Sorin, D. Mihalaşcu din Piteşti 344
4. Probleme rezolvate (6845, 7141, 7167, 7168, 7264, E: 2409) 350
5. Chestiuni de examen (7664—7685) 364
6. Probleme propuse (7686—7717) 369
7. Exerciţii şi probleme propuse pentru clasele V—VIII (E: 2545—2559) 374
8. Rubrica rezolvitorilor de probleme 376

ANUL XVII 8 AUGUST

O mare parte din materialele publicate în acest număr a fost asigurată de către filiala Argeş a Societăţii de Ştiinţe matematice din Republica Socialistă România.

COMITETUL DE REDACŢIE

Dincă N., profesor ; *Grosu A.*, profesoară ; *Ionescu-Bujor C.*, prof. univ. emerit ; *Ionescu-Ţiu C.*, profesor, redactor şef adjunct ; *Kiss E.*, conf. univ. (Cluj) ; *Kovacs K.*, conf. univ. (Cluj) ; *Muşat I.*, profesor ; *Ottescu C.*, profesor ; *Plăviţu M.*, profesor ; *Sacter O.*, conf. univ., redactor şef ; *Simionescu Gh.*, conf. univ. ; *Ţene L.*, profesoară şi *Voinea R.*, prof. univ.

REDACŢIA G. M-B : Str. Academiei, 14 — Tel. 14.46.53. — Bucureşti

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică a şcolilor, precum şi orice material informativ se vor trimite pe adresa de mai sus.

E 1426

GAZETA MATEMATICĂ
SERIA B
PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET
Anul XVII nr. 8 august 1966

DESPRE UNELE PROPRIETĂȚI ȘI APLICAȚII ALE FUNCȚIEI DE GRADUL I ȘI ALE FUNCȚIEI OMOGRAFICE

de *Nicolae Peligrad*, profesor Pitești

La studiul funcției de gradul I se scoate în evidență proprietatea ei de a fi o funcție monotonă pe toată mulțimea pe care este definită, mulțimea maximă de definiție fiind R, în sensul că atunci cînd argumentul funcției, x, parcurge într-un anumit sens, de obicei crescător, mulțimea valorilor pe care le poate lua — fiecare valoare nefiind luată decît o singură dată — și funcția $y = ax + b$ parcurge mulțimea în care se află valorile ei, tot într-un singur sens și anume crescător cînd coeficientul $a > 0$ și descrescător cînd $a < 0$ și că fiecare element al mulțimii în care funcția ia valori este element corespunzător pentru o singură valoare a argumentului.

Funcția omografică care este cîtul a două funcții de gradul I $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, întrucît o mai putem scrie și sub forma : $y = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cx+d)}$, urmează că exceptînd cazul cînd coeficienții a, b, c și d ar satisface relația $bc - ad = 0$ caz, în care funcția considerată se transformă într-o constantă, este și o funcție monotonă și anume cînd $bc - ad < 0$ fracția $\frac{1}{\frac{c^2}{bc-ad}x + \frac{cd}{bc-ad}}$ avînd ca numitor o funcție strict descrescătoare este o funcție strict crescătoare, iar cînd $bc - ad > 0$ funcția considerată este strict descrescătoare pe fiecare din intervalele ce formează prin reuniunea lor, mulțimea maximă de definiție a acestei funcții și care este $\left(-\infty, -\frac{d}{c}\right) \cup \left(-\frac{d}{c} + \infty\right)$.

Variația valorilor funcției liniare este de asemenea studiată și dată de tabelul :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$

sau

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	$+\infty$ ↘	0	↘ $-\infty$

corespunzătoare cazurilor $a > 0$ sau $a < 0$.

Din aceste tabele se poate scoate în evidență o corespondență și între anumite intervale ce compun mulțimea de definiție și mulțimea în care funcția ia valori și anume intervalului cuprinzînd valorile argumentului $\left(-\infty, -\frac{b}{a}\right]$ îi poate corespunde unul din intervalele $(-\infty, 0]$ sau $(+\infty, 0]$ ale mulțimii în care funcția ia valori — după cum $a > 0$ sau $a < 0$ — iar intervalul $\left[-\frac{b}{a}, +\infty\right)$ este în corespondență cu unul din intervalele $[0, +\infty)$ sau $(0, -\infty]$ aceasta depinzînd de coeficientul a.

Folosindu-ne și de funcția inversă funcției liniare — funcție care realizează corespondența între aceleași două mulțimi ca și funcția liniară, însă avînd rolurile inversate — adică mulțimea care constituie mulțimea pe care funcția liniară este definită devine pentru funcția inversă mulțimea în care ea ia valori, iar mulțimea în care funcția liniară ia valori devine mulțime de definiție pentru funcția inversă ei, cu păstrarea perechilor de elemente ce se corespund ale celor două mulțimi, funcție care se obține rezolvînd ecuația $ax + b = y$ în raport cu x și care dă ca expresie a funcției inverse funcției liniare considerate $x = \frac{y - b}{a}$ sau notînd și în această funcție argumentul cu x, funcția inversă este $y = \frac{x - b}{a}$, avem și mijlocul de a face corespondența între aceleași intervale însă cu valorile inversate. Funcția inversă ne dă mijlocul de a avea ca interval corespunzător intervalului $(-\infty, 0]$ unul din intervalele $\left(-\infty, -\frac{b}{a}\right]$ sau $\left[-\frac{b}{a}, +\infty\right)$ după cum $a > 0$ sau $a < 0$, iar intervalului $[0, +\infty)$ îi va corespunde ori intervalul $\left[-\frac{b}{a}, +\infty\right)$ ori $\left(-\infty, -\frac{b}{a}\right]$ după cum $a > 0$ sau $a < 0$.

Folosind aceste proprietăți ale funcției liniare, putem găsi o funcție liniară care împreună cu funcția inversă ei să realizeze o corespondență biunivocă între două intervale $[\alpha, \beta]$ și $[p, q]$. Pentru aceasta determinăm coeficienții a și b ai unei funcții liniare $y = ax + b$ astfel ca pentru $x = \alpha$ să avem $y = p$, iar pentru $x = \beta$ să avem $y = q$, deci a și b sînt dați de sistemul:

$$a\alpha + b = p\,;\quad a\beta + b = q$$

care rezolvat ne dă:

$$a = \frac{p - q}{\alpha - \beta} \text{ și } b = \frac{\alpha q - \beta p}{\alpha - \beta}$$

și deci cele două funcții sînt:

$$y_1 = \frac{p - q}{\alpha - \beta}\, x + \frac{\alpha q - \beta p}{\alpha - \beta} \text{ și } y_2 = \frac{\beta - \alpha}{p - q}\, x - \frac{\alpha q - \beta p}{p - q}$$

Prima funcție ne dă pentru orice $x \in [\alpha, \beta]$ un element corespunzător $y_1 \in [p, q]$, iar a doua ne dă pentru orice $x \in [p, q]$ ca element corespunzător pe $y_2 \in [\alpha, \beta]$, perechile de valori corespunzătoare păstrîndu-se.

Considerînd o funcție $f(u)$, definită pentru orice $u \in [p, q]$ sau pentru orice $u \in [\alpha, \beta]$, dacă compunem această funcție cu $y_1(x)$ sau cu $y_2(x)$ se obțin funcțiile $f(y_1(x))$ și $f(y_2(x))$, care au respectiv pe intervalele $[\alpha, \beta]$ sau $[p, q]$ aceiași variație ca $f(x)$ respectiv pe intervalele $[p, q]$ sau $[\alpha, \beta]$.

Ca aplicație a celor arătate să rezolvăm o problemă în care se cere să se găsească o funcție care să aibă pe intervalul [6,0] aceeași variație cu funcția $f(x) = 2^{x+3}$ pe intervalul [1,3].

Aplicînd cele două formule stabilite, găsim cele două funcții liniare care stabilesc corespondența biunivocă între cele două intervale și care sînt :

$$y_1 = -3x + 9 \quad \text{și} \quad y_2 = -\frac{1}{3}x + 3.$$

Întrucît y_2 este funcția care stabilește corespondența între intervalele [6,0] și [1,3], compunem funcțiile $f(x)$ și y_2 și obținem :

$$f(y_2(x)) = 2^{-\frac{1}{3}x+6}$$

care are pe intervalul [6,0] aceeași variație cu $f(x) = 2^{x+3}$ pe intervalul [1, 3].

Pentru a găsi pentru ce valoare $x_0 \in [6,0]$, $f \circ y_2$ are valoarea pe care o are f în punctul 2, determinăm valoarea corespunzătoare a funcției y_1 în punctul 2 și avem : $y_1(2) = -6 + 9 = 3$, deci în punctul 3 funcția $f \circ y_2$ are aceeași valoare cu f în punctul 2 și anume :

$$f(y_2(3)) = 2^{-\frac{1}{3}\cdot 3 + 6} = 2^5$$

iar

$$f(3) = 2^{2+3} = 2^5$$

Întrucît prin intermediul funcției liniare nu se poate stabili o corespondență biunivocă între un interval mărginit și unul nemărginit, pentru a obține o astfel de corespondență se poate folosi funcția omografică.

Astfel pentru a se obține o corespondență biunivocă între intervalul mărginit $[\alpha, \beta]$ și un interval nemărginit, spre exemplu $[0, \infty)$, se poate folosi funcția $y = \frac{x-\alpha}{\beta - x}$ care este definită pe $(-\infty, \beta) \cup (\beta, +\infty)$ și este pe fiecare interval monoton crescătoare, cum se poate stabili calculînd expresia $bc - ad$ de care s-a arătat că depinde ca funcția omografică să fie crescătoare sau descrescătoare. În cazul funcției considerate, avem $a = 1$, $b = -\alpha$, $c = -1$ și $d = \beta$, iar prin ipoteză $\alpha < \beta$, deci $bc - ad = \alpha - \beta < 0$.

Concluzii privitor la valorile acestei funcții le deducem ținînd seama că în ceea ce privește semnele valorilor acestei funcții ele sînt aceleași cu cele ale produsului $(x - \alpha)(\beta - x)$ — pentru aceeași valoare a lui x, și anume, aplicînd regula semnului trinomului de gradul doi rezultă că atunci cînd argumentul funcției ia valori în intervalul (α, β) valorile funcției vor fi pozitive, iar cînd valorile argumentului x vor aparține $(-\infty, \alpha) \cup (\beta, +\infty)$ valorile funcției vor fi negative.

Cum ecuația $y = \frac{x-\alpha}{\beta - x}$ — privită ca ecuație cu necunoscuta x este o ecuație de gradul I care se poate rezolva pentru orice valoare a lui $y \neq -1$, înseamnă că funcția y, poate lua orice valoare reală $\neq -1$. Rezultă că prin această funcție și prin inversa ei, care este $y_1 = \frac{\alpha + \beta x}{1+x}$, putem avea o corespondență biunivocă între mulțimile $[\alpha, \beta]$ și $[0, \infty)$ și între $(-\infty, \alpha) \cup (\beta, \infty)$ și $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$.

Pentru a obține variația completă a valorilor celor 2 funcții, mai trebuie să observăm că funcția y se mai poate scrie :

$$y = \frac{1 - \frac{\alpha}{x}}{\frac{\beta}{x} - 1}$$

și dacă $x \to \pm \infty$ atunci valorile funcției y tind către -1.

Din tabelele cuprinzînd variația valorilor funcțiilor y și y_1 sînt :

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
y	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$	$\vert\!\vert\!\vert$	$-\infty$ $\nearrow$ -1

x	$-\infty$		-1		0		∞
y_1	β	$\nearrow$	$+\infty$	$\vert\!\vert\!\vert$	$-\infty$	$\nearrow$	α $\nearrow$ β

O serie de aplicații importante legate de folosirea funcțiilor y și y_1 rezultă ținînd seama că dacă se compune o funcție f definită pe R cu funcția y_1 se obține o funcție $f \circ y_1$ care pe intervalul $[0, +\infty)$ are aceiași variație cu f pe intervalul $[\alpha, \beta]$.

Problemele în care se cere ca rădăcinile unei funcții de gradul doi să aibă anumite poziții față de două numere date α și β devin — folosind această compunere — probleme în care rădăcinile funcției obținute prin această compunere urmează a fi sau ambele pozitive, sau ambele negative, sau de sume contrarii.

Un studiu bazat pe variația valorilor funcției y_1, arată că f va avea rădăcinile în intervalul (α, β) dacă $f \circ y_1$ are ambele rădăcini pozitive; că f are ambele rădăcini mai mici ca α dacă $f \circ y_1$ are ambele rădăcini negative, dar mai mari ca -1; că f are ambele rădăcini mai mari ca β dacă $f \circ y_1$ are ambele rădăcini negative mai mici ca -1; că f are o rădăcină mai mică decît α și alta mai mare ca β dacă $f \circ y_1$ are ambele rădăcini negative însă una mai mare ca -1 și alta mai mică decît -1; că f are o rădăcină în intervalul (α, β) și alta mai mică decît α dacă $f \circ y_1$ are rădăcinile de semne contrarii și rădăcina negativă mai mare ca -1 și că f are o rădăcină în intervalul (α, β) și alta mai mare ca β dacă $f \circ y_1$ are rădăcinile de semne contrarii și cea negativă mai mică decît -1.

Ca aplicație să rezolvăm problema : Se dă funcția

$$f(x) = (3m - 4)x^2 - 4(m + 4)x + 4m - 16 \qquad (1)$$

și se cere să se determine valorile parametrului m, astfel încît în interiorul parabolelor corespunzătoare să se afle arcul de pe parabola $y = -x^2 + 5x - 4$ ale cărui puncte au ordonata pozitivă.

Arcul din parabola $y = -x^2 + 5x - 4$ ale cărui puncte au ordonata pozitivă cuprinde punctele ale căror abscise verifică inecuația : $-x^2 + 5x - 4 > 0$, deci sînt punctele ale căror abscise satisfac condiția $x \in (1, 4)$.

Parabolele din familia dată de funcția (1), care vor cuprinde în interiorul lor acest arc vor fi cele care vor tăia axa xx' în două puncte care vor determina un interval care va include intervalul (1, 4), ceea ce duce la problema de a afla valorile lui m pentru ca funcția $f(x)$ să aibă rădăcinile în afara intervalului (1, 4), una mai mică decît 1 și alta mai mare ca 4.

Comparînd funcția dată cu funcția:

$$y_1(x) = \frac{1+4x}{1+x}$$

obținem funcția $f(y_1(x))$ care va avea pe intervalul $[0, +\infty)$ aceeași variație ca $f(x)$ pe intervalul (1, 4). Pentru ca $f(x)$ să aibă o rădăcină mai mică decît 1 și alta mai mare ca 4 va trebui ca $f(y_1(x))$ să aibă

ambele rădăcini negative însă una mai mică decît -1 și alta mai mare decît -1.

Prin compunerea arătată, obținem funcția:

$$f(y_1(x)) = \frac{(3m-4)(1+4x)^2 - 4(m+4)(1+4x)(1+x) + (4m-16)(1+x)^2}{(1+x)^2}$$

iar după efectuarea calculelor:

$$f(y_1(x)) = \frac{36(m-4)x^2 + 12(m-12)x + 3(m-12)}{(1+x)^2}.$$

Rădăcinile funcției $f(y_1(x))$ sînt date de ecuația:

$$g(x) = 12(m-4)x^2 + 4(m-12)x + m - 12 = 0.$$

Pentru a îndeplini condițiile de a fi ambele negative, una mai mică decît -1 și alta mai mare ca -1, trebuie să luăm valorile lui m, astfel încît să verificăm inecuațiile:

$$\Delta \geqslant 0,\ P > 0,\ S < 0 \text{ și } (m-4)g(-1) < 0.$$

Avem $\Delta = 4(m-12)^2 - 12(m-4)(m-12) = -8m(m-12) \geqslant 0$;

$$P = \frac{m-12}{12(m-4)} > 0;\ S = -\frac{m-12}{3(m-4)} < 0;$$

$$g(-1) = 12(m-4) - 4(m-12) + m - 12 = 3(3m-4)$$

și ultima condiție devine $(m-4)(3m-4) < 0$.

Notînd cu A, B, C și D mulțimile cuprinzînd valorile lui m care verifică respectiv inecuațiile precedente, avem:

$$A = [0, 12];\ B = C = (-\infty, 4) \cup (12, +\infty) \text{ și } D = \left(\frac{4}{3}, 4\right).$$

Soluția problemei este dată de valorile lui m care formează mulțimea ce rezultă prin intersecția mulțimilor A, B, C, D și care este $A \cap B \cap C \cap D = \left(\frac{3}{4}, 4\right)$

O discuție necesară pentru a avea siguranța că parabolele astfel determinate au în interiorul lor arcul cerut, privește compararea vîrfurilor acestor parabole cu ordonata vîrfului parabolei $y = -x^2 + 5x - 4$, care sînt respectiv :

$$\frac{16(m-4)(3m-4)-16(m+4)^2}{4(3m-4)} \text{ și } \frac{16-25}{-4} = \frac{9}{4}$$

și cum $m \in \left(\frac{4}{3}, 4\right)$, prima este negativă, iar cealaltă pozitivă, deci arcul cerut este complet interior ; în cazul cînd și ordonatele vîrfurilor parabolelor rezultate ar fi fost pozitive s-ar adăoga și condiția ca parabolele obținute și cu parabola $y = -x^2 + 5x - 4$ să nu aibă puncte de intersecție, deci ca ecuația : $(3m-4)x^2-4(m+4)x+4m-16 = -x^2+5x-4$ să aibă rădăcini complexe nereale.

PENTRU CERCURILE DE ELEVI

RAZA SFEREI CIRCUMSCRISE UNUI TETRAEDRU

Fie O centrul și R raza sferei circumscrise tetraedrului $A_1A_2A_3A_4$ avînd muchiile opuse (a_1, a_4) ; (a_2, a_5) ; (a_3, a_6) și T_1, T_2, T_3, T_4 planele tangente în A_1, A_2, A_3, A_4 sferei circumscrise tetraedrului.

Un plan paralel cu unul din planele T_i taie tetraedrul determinînd o secțiune numită antiparalelă. Fie $P_1P_2P_3$ o astfel de secțiune. Laturile P_1P_2, P_2P_3, P_1P_3 sînt antiparalele cu A_1A_2, A_2A_3, A_1A_3 față de unghiurile din A_4. În adevăr, P_1P_2 este paralel cu planul tangent T_4 deci paralel cu tangenta dusă în A_4 la cercul $A_4A_1A_2$. Se arată ușor că unghiurile $A_4P_1P_2$ și $A_4A_2A_1$ sînt egale.

Patrulaterele $A_1P_1A_2P_2$; $A_2A_3P_3P_2$; $A_3A_1P_1P_3$ sînt inscriptibile. Conform teoremei : Dacă două cercuri din spațiu neașezate în același plan au două puncte comune, există o sferă și numai una care conține cele două cercuri, rezultă că puntele $P_1P_2P_3A_1A_2A_3$ aparțin aceleiași sfere și că $A_4P_1 \cdot a_4 = A_4P_2 \cdot a_5 = A_4P_3 \cdot a_6 = p$, (1) ($p$ fiind puterea punctului A_4 față de această sferă).

Relațiile (1) devin

$$\frac{A_4P_1 \cdot a_4}{a_4a_5a_6} = \frac{A_4P_2 \cdot a_5}{a_4a_5a_6} = \frac{A_4P_3a_6}{a_4 \cdot a_5 \cdot a_6} = \frac{p}{a_4a_5a_6}$$

sau

$$\frac{A_4P_1}{a_5a_6} = \frac{A_4P_2}{a_4a_6} = \frac{A_4P_3}{a_4 \cdot a_5} = \frac{p}{a_4a_5a_6} \qquad (2)$$

Fie D și D' punctele unde diametrul sferei circumscrise înțeapă planul $P_1P_2P_3$, respectiv sfera, deci $A_4D' = 2R$.

Avem : A_4D' perpendicular pe planul tangent T_4, deci perpendicular pe planul $P_1P_2P_3$, care e paralel cu T_4. Rezultă că A_4D' perpendicular pe DP_3. Pe de altă parte A_3 fiind pe sfera O avem A_4A_3 perpendicular pe A_3D. Rezultă :

$$A_4P_3 \cdot A_4A_3 = A_4D \cdot A_4D',$$

deci

$$p = 2R \cdot A_4D.$$

Considerînd cele două tetraedre cu vîrful în A_4 putem scrie pe baza unei teoreme cunoscute care se poate demonstra ușor : Volumele a două tetraedre care au un unghi triedru egal sînt între ele ca produsele muchiilor respective care cuprind acest unghi :

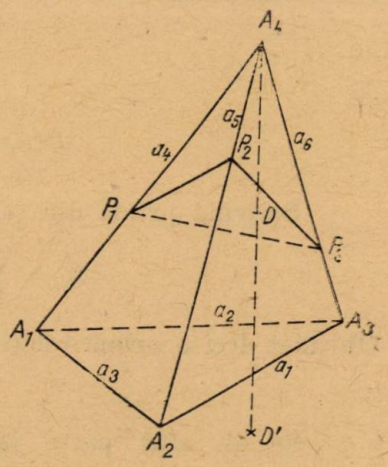
$$\frac{V}{V'} = \frac{V(A_4P_1P_5P_3)}{V(A_4A_1A_2A_3)} = \frac{A_4P_1 \cdot A_4P_2 \cdot A_4P_3}{A_4A_1 \cdot A_4A_2 \cdot A_4A_3} = \frac{A_4P_1 \cdot A_4P_2 \cdot A_4P_3}{a_4 \cdot a_5 \cdot a_6}$$

sau, ținînd seama de (2), avem

$$\frac{V}{V'} = \frac{p^3}{a_4^2 \cdot a_5^2 \cdot a_6^2}$$

sau

$$V' = \frac{a_4^2 \cdot a_5^2 \cdot a_6^2}{p^3} \cdot V.$$



Se poate deduce că :

$$P_1P_2 = \frac{p \cdot a_3}{a_4 \cdot a_5} = \frac{p \cdot a_3 \cdot a_6}{a_4 \cdot a_5 \cdot a_6} \cdot$$

$$P_2 \cdot P_3 = \frac{p \cdot a_1 \cdot a_4}{a_4 \cdot a_5 \cdot a_6}; \quad P_3P_1 = \frac{p \cdot a_2 \cdot a_5}{a_4 \cdot a_5 \cdot a_6} \cdot$$

Rezultă că laturile triunghiului $P_1P_2P_3$ sînt proporționale cu produsele (a_1a_4), (a_2a_5), (a_3a_6) și deci putem considera un triunghi asemenea cu $P_1P_2P_3$ ale cărui laturi să fie produsele muchiilor opuse. Fie T un astfel de triunghi. Rezultă că :

$$(P_1P_2P_3) = \frac{p^2}{a_4^2 \cdot a_5^2 \cdot a_6^2} \cdot (T),$$

deci

$$V = \frac{1}{3}(P_1P_2P_3)A_4D = \frac{p^2 \cdot (T)}{3a_4^2 \cdot a_5^2 \cdot a_6^2} \cdot A_4D,$$

$$V' = \frac{p^2 \cdot (T)}{3a_4^2 \cdot a_5^2 \cdot a_6^2} \cdot \frac{p}{2R} = \frac{p^3 \cdot (T)}{6 \cdot R \cdot a_4^2 a_5^2 \cdot a_6^2}$$

Egalînd cele două expresii ale lui V' avem :

$$V' = \frac{p^3 \cdot (T)}{6Ra_4^2 \cdot a_5^2 \cdot a_6^2} = \frac{p^3 \cdot V}{a_4^2 \cdot a_5^2 \cdot a_6^2}$$

de unde

$$6 \cdot R \cdot V = (T).$$

Relația aceasta permite calculul lui R pentru sfera circumscrisă unui tetraedru oarecare.

Doru I. Manolache, Curtea de Argeș

22. Asupra problemelor 5833 și 6278

În *G.M.-B* nr. 6 din 1963 sub numărul 5833 apare problema $\sum_{1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} = 3$, iar în legătură cu aceasta apare problema 6278 în *G.M.-B* nr. 4 din 1964.

Iată un procedeu de rezolvare: Fie suma

$$S_n^k = \sum_{m=1}^{n} \frac{m^k}{x^m} \tag{1}$$

și

$$U_n^p = \sum_{m=1}^{n} \frac{m(m+1)\dots(m+p-1)}{x^m}.$$

Derivînd prima din relațiile (1), obținem:

$$S_n^k = \sum_{m=1}^{n} \frac{m^{k+1}}{x^{m+1}} = -\frac{1}{x} \sum_{m=1}^{n} \frac{m^{k+1}}{x^m}$$

Obținem deci o primă relație de recurență pentru S_n^k:

$$S_n^{k+1} = -x(S_n^k)'.$$

Pe de altă parte în identitatea $\frac{(m+1)^k}{x^{m+1}} = \frac{1}{x} \sum_{j=0}^{k} C_k^j \frac{m^j}{x^m}$, făcînd suma după m de la 0 la n, se obține:

$$S_n^k + \frac{(n+1)^k}{x^{n+1}} = \frac{1}{x} \sum_{j=0}^{k} C_k^j S_n^j = \frac{1}{x} \sum_{j=0}^{k-1} C_k^j S_n^j + \frac{1}{x} S_n^k,$$

de unde rezultă a doua relație de recurență pentru S_n^k:

$$S_n^k = \frac{1}{x-1} \sum_{j=1}^{k-1} C_k^j S_n^j - \frac{(n+1)^k}{x^n(x-1)}. \tag{2'}$$

Se observă că

$$S_n^0 = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{x^m} = \frac{x^n-1}{x^n(x-1)}.$$

Folosind relația (2), obținem $S_n^1 = -x(S_n^0)'$ și după efectuarea calculelor, găsim:

$$S_n^1 = \sum_{m=1}^{n} \frac{m}{x^m} = \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{x^n (x-1)^2} \tag{3}$$

$$S_n^2 = \sum_{m=1}^{n} \frac{m^2}{x^m} = \frac{x^{n+2} + x^{n+1} - (n+1)^2 x^2 + (2n^2+2n+1)x - n}{x^n (x-1)^3} \tag{3a}$$

$$S_n^3 = \sum_{m=1}^{n} \frac{m^3}{x^m} = \frac{(x^2+4x+1)x^{n+1} - (n+1)^3 x^3 + (3n^3+6n^2-4)x^2 - (3n^3+3n^2-3n+1)x + n^3}{x^n(x-1)^4} \tag{3b}$$

Dacă în relațiile (3a) și (3b) punem $x=2$, obținem problema 6278.
Dacă derivăm de p ori identitatea :

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{x^m} = \frac{x^n-1}{x^n(x-1)},$$

obținem :

$$(-1)^p \sum_{m=1}^{n} \frac{m(m+1)\ldots(m+p-1)}{x^{m+p}} = \left[\frac{x^n-1}{x^n(x-1)}\right]^{(p)} .$$

De aici rezultă :

$$U_n^p = \sum_{m=1}^{n} \frac{m(m+1)\ldots(pm+p-1)}{x^m} = (-1)^p x^p \left[\frac{x^n-1}{x^n(x-1)}\right]^{(p)} .$$

Dacă $x>1$ și $n\to\infty$, se obține :

$$\lim_{n\to\infty} U_n^p = (-1)^p x^p \left[\frac{1}{x-1}\right]^{(p)} = \frac{p!\,x^p}{(x-1)^{p+1}},$$

adică

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m(m+1)\ldots(m+p-1)}{x^m} = \frac{p!\,x^p}{(x-1)^{p+1}} .$$

N. Păun, profesor R. Vîlcea

23. Generalizarea problemei 6631

Fie $2k+1$, numere în progresie geometrică, $a_i>0$ $i=1,\ldots$ $\ldots, 2k+1$ $(k>1)$.

$$\therefore\ a_1, a_2, a_3 \ldots a_k, a_{k+1}, a_{k+2}\ldots a_{2k}, a_{2k+1} ;$$

atunci există relația

$$a_{k+1}^{2k} = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots a_k \cdot a_{k+1} \ldots a_{2k} \cdot a_{2k+1} .$$

Din definiția progresiei geometrice rezultă :
$a_{k+1} = a_1 q^k$ (q, rația) și deci relația de demonstrat devine :

$$a_1^{2k} q^{2k^2} = a_1 \cdot a_1 q \cdot a_1 q^2 \cdot a_1 q^3 \ldots a_1 q^{k-1} \cdot a_1 q^{k+1} \ldots a_1 q^{2k-1} \cdot a_1 q^{2k} =$$

$$= a_1^{2k} q^{1+2+3+\ldots+(k-1)}\, q^{(k+1)+(k+2)+\ldots+(2k-1)+2k} = a_1^{2k} q^{2k^2} .$$

Deci dacă $j\neq k+1$, $1\leqslant j\leqslant 2k+1$, între cele $2k+1$ numere în progresie geometrică există relația

$$a_{k+1}^{2k} = a_1 a_2 \ldots a_j \ldots a_{2k+1} \qquad (1)$$

Logaritmînd relația (1) în baza a_{k+1}, rezultă

$$2k = \log_{a_{k+1}} a_1 + \ldots + \log_{a_{k+1}} a_j + \ldots + \log_{a_{k+1}} a_{2k+1} \qquad (2)$$

ceea ce se mai scrie

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k+1}}^{2k+1} \log_{a_{k+1}} a_j = 2k. \qquad (2')$$

Însă $\log_{a_{k+1}} N = \log_{a_{k+1}} a_j \cdot \log_{a_j} N$

și deci relația (2') devine:

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k+1}}^{2k+1} \frac{\log_{a_{k+1}} N}{\log_{a_j} N} = 2k. \qquad (3)$$

De unde:

$$2k \log_{a_1} N \cdot \log_{a_2} N \ldots \log_{a_j} N \ldots \log_{a_{2k+1}} N = \log_{a_{k+1}} N(\log_{a_2} N \cdot \log_{a_3} N \ldots$$
$$\ldots \log_{a_j} N \ldots \log_{a_{2k+1}} N + \log_{a_1} N \cdot \log_{a_3} N \ldots \log_{a_j} N \ldots \log_{a_{2k+1}} N + \ldots$$
$$\ldots + \log_{a_1} N \cdot \log_{a_2} N \ldots \log_{a_{j_1-1}} N \cdot \log_{a_{j+1}} N \ldots \log_{a_{2k+1}} N + \ldots + \log_{a_1} N + \ldots$$
$$\ldots \log_{a_j} N \ldots \log_{a_{2k}} N), \quad \text{cu } j \neq k+1,\ 1 \leqslant j \leqslant 2k+1 \qquad (3')$$

sau prescurtat:

$$2k \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k+1}}^{2k+1} \log_{a_j} N = \log_{a_{k+1}} N \left(\sum_{\substack{j+1\\ j\neq k+1}}^{2k\times 1} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j\\ i\neq k+1}}^{2k+1} {}_j\log_{a_i} N \right) \qquad (4)$$

Particularizînd și făcînd în relația (3') pe $k = 1$, $1 \leqslant j \leqslant 3$, $j \neq 2$ (conform condițiilor puse acestor indici), atunci obținem:

$$2 \log_{a_1} N . \log_{a_3} N = \log_{a_2} N(\log_{a_3} N + \log_{a_1} N); \qquad (3'')$$

sau relația (4) devine:

$$2 \prod_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{3} \log_{a_j} N = \log_{a_2} N \left(\sum_{j=1}^{3} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{3} {}_j\log_{a_i} N \right) \qquad (4')$$

care dezvoltat se scrie:

$$2\log_{a_1} . N . \log_{a_3} N = \log_{a_2} N \left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq 1\\ i\neq j\neq 2}}^{2}{}_1 \log_{a_i} N + \prod_{\substack{i=1\\ i\neq 3\\ i\neq 2}}^{3}{}_3 \log_{a_i} N \right) =$$

$= \log_{a_2} N(\log_{a_3} N + \log_{a_1} N)$; sau punînd $a_1 = x$, $a_2 = y$, $a_3 = z$ rezultă tocmai relația pe care o cere problema 6631.

$$2\log_x N \log_z N = \log_y N \log_z N + \log_y N . \log_x N.$$

Ilie Ionescu profesor Pitești

24. Asupra unor probleme de maxim și minim

Produsul a două numere pozitive, a căror sumă este dată, este maxim cînd numerele sînt egale.

Suma a două numere pozitive al căror produs este dat este minimă cînd numerele sînt egale.

Se poate observa că prima teoremă rămîne adevărată și cînd ambele numere sînt negative.

Teorema a doua însă își schimbă esențial formularea. De aceea ne propunem să găsim maximul sau minimul sumei a două numere reale (pozitive sau negative) al căror produs este constant.

Dacă m reprezintă produsul constant și x unul din factori, atunci celălalt factor va fi $\frac{m}{x}$ iar suma notată cu y va fi : $y = x + \frac{m}{x}$. Putem scrie $x^2 - yx + m = 0$. Pentru ca rădăcinile acestei ecuații în x să fie reale trebuie ca $y^2 - 4m \geqslant 0$. Acum se prezintă două cazuri după cum m este pozitiv sau negativ.

1) Dacă m este negativ, această ultimă relație este totdeauna satisfăcută și deci y nu are nici maximin nici minim.

2) Dacă m este pozitiv, relația precedentă se poate scrie : $(y + 2\sqrt{m})\,(y - 2\sqrt{m}) \geqslant 0$ și sub această formă se vede că ea poate fi satisfăcută dacă $y \leqslant -2\sqrt{m}$ sau $y \geqslant 2\sqrt{m}$ și y are deci : 1°. un maxim, $-2\sqrt{m}$ pentru $x = -\sqrt{m}$; 2°. un minim, $+2\sqrt{m}$ pentru $x = +\sqrt{m}$; în cele două cazuri factorii x și $\frac{m}{x}$ devin egali.

În rezumat, suma a două numere reale al căror produs este constant, nu are nici maxim nici minim dacă acest produs este negativ ; ea are un maxim și un minim dacă acest produs este pozitiv ; maximul corespunde cazului cînd cei doi factori sînt egali și negativi iar minimul cînd cei doi factori sînt egali și pozitivi.

Această teoremă se poate dovedi și studiind graficul funcției $y = x + \frac{m}{x}$ (unde $m < 0$ sau $m > 0$).

Să considerăm funcția $y = x + \frac{m}{x}$ (unde $m < 0$).

Funcția este impară : $f(-x) = -f(x)$. Să studiem variația funcției în intervalul $(0, +\infty)$. Să formăm diferența : $f(x_2) - f(x_1) = \left(x_2 + \frac{m}{x_2}\right) - \left(x_1 + \frac{m}{x_1}\right) = (x_2 - x_1)\left(1 - \frac{m}{x_1 x_2}\right)$ Din studiul acestei diferențe este evident că $f(x_2) - f(x_1) > 0$ cînd $x_2 > x_1$. De aici rezultă că funcția este strict crescătoare în intervalul $(0, +\infty)$, deci și pe $(-\infty, 0)$.

Să considerăm funcția $y = x + \frac{m}{x}$ (unde $m > 0$). Funcția este impară : $f(-x) = -f(x)$. Deci o studiem tot în intervalul $(0, +\infty)$. Facem din nou diferența :

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)\left(1 - \frac{m}{x_1 x_2}\right).$$

Din studiul acestei diferențe este evident că :

$$f(x_2) - f(x_1) \begin{cases} < 0 \text{ dacă } 0 < x_1 < x_2 \leqslant \sqrt{m} \\ > 0 \text{ dacă } \sqrt{m} \leqslant x_1 < x_2 \end{cases}$$

De aici rezultă că y este strict descrescătoare în intervalul $(0, \sqrt{m})$ și strict crescătoare în intervalul $[\sqrt{m}, +\infty)$. Valoarea minimă pe intervalul $(0, +\infty)$ este egală cu $f(\sqrt{m}) = 2\sqrt{m}$. In intervalul $(-\infty, 0)$ funcția va lua valoarea maximă $-2\sqrt{m}$ pentru $x = -\sqrt{m}$.

Aplicație. Să se afle maximul și minimul expresiei $y = 3 \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$ unde $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Rezolvare. Produsul $(3 \operatorname{tg} x) \cdot (\operatorname{ctg} x)$ fiind constant și pozitiv, y va avea maxim sau minim cînd $3 \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$. Rezolvînd ecuația, vom avea : $3 \operatorname{tg}^2 x = 1$ sau $\operatorname{tg} x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$. Avem pentru y minim cînd $3 \operatorname{tg} x$ și $\operatorname{ctg} x$ sînt pozitivi și egali adică pentru $x = \frac{\pi}{6}$, iar maxim cînd $3 \operatorname{tg} x$ și $\operatorname{ctg} x$ sînt negativi și egali adică pentru $x = \frac{5\pi}{6}$.

Deci $y_{\min} = 2\sqrt{3}$ iar $y_{\max} = -2\sqrt{3}$.

Simion Sorin, profesor Pitești

25. Funcția omografică și inversa ei

Să arătăm în ce condiții funcția omografică

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \tag{1}$$

are inversă. Funcția este definită pe $R - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ cu $c \neq 0$.

Să efectuăm împărțirea $(ax + g) : (cx + d)$ și folosind identitatea împărțirii $\frac{D}{I} = C + \frac{R}{I}$ funcția (1) se poate scrie sub forma

$$\frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cx + d)} \tag{2}$$

Funcția fiind scrisă sub forma (2) rezultă că este necesar să avem

$$bc - ad \neq 0.$$

Dacă $bc - ad = 0$, funcția se reduce la o constantă $f(x) = k$, adică $f(x) = \frac{d}{c}$.

Să vedem cum se comportă funcția (2) cînd

$$x_1 < x_2 < -\frac{d}{c}$$

$$f(x_1) - f(x_2) = \left(\frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c\,(cx_1 + d)}\right) - \left(\frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c\,(cx_2 + d)}\right),$$

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{(bc - ad)(x_2 - x_1)}{(cx_1 + d)(cx_2 + d)},$$

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_2 - x_1}{c^2\left(x_1 + \frac{d}{c}\right)\left(x_2 + \frac{d}{c}\right)} \cdot (bc - ad). \qquad (3)$$

$$x_2 - x_1 > 0\,;\ x_1 + \frac{d}{c} < 0\,;\ x_2 + \frac{d}{c} < 0,$$

deci :

$$\frac{x_2 - x_1}{c^2\left(x_1 + \frac{d}{c}\right)\left(x_2 + \frac{d}{c}\right)} > 0\,;$$

rezultă că semnul în (3) va fi hotărît de factorul $bc - ad \neq 0$.

Dacă $bc - ad > 0$ atunci și $f(x_1) - f(x_2) > 0$ sau $f(x_1) > f(x_2)$; funcția este descrescătoare.

Să vedem cum se comportă funcția cînd $-\frac{d}{c} < x_1 < x_2$.

În (3) avem în acest caz :

$$x_2 - x_1 > 0\,;\ x_1 + \frac{d}{c} > 0\,;\ x_2 + \frac{d}{c} > 0,$$

deci semnul în (3) îl hotărăște tot factorul

$$bc - ad \neq 0$$

și dacă $bc - ad > 0$, avem $f(x_1) - f(x_2) > 0$ sau $f(x_1) > f(x_2)$; funcția este descrescătoare.

La fel se constată că dacă $bc - ad < 0$ funcția este crescătoare :

$$f(x_1) - f(x_2) < 0\,;\ f(x_1) < f(x_2).$$

Să arătăm că $f(x)$ este strict monotonă pe domeniul de definiție, adică pentru $x_1 \neq x_2$ nu avem $f(x_1) = f(x_2)$.

Folosim tot forma (3).

$x_2 - x_1 \neq 0$ conform ipotezei care spune că $x_1 \neq x_2$.

$c \neq 0$. Din condițiile inițiale avem :

$$x_1 + \frac{d}{c} \neq 0,\ x_2 + \frac{d}{c} \neq 0, \text{ căci } x_1 < x_2 < \frac{c}{d} \text{ sau } -\frac{d}{c} < x_1 < x_2.$$

$bc - ad \neq 0$ din condiția ca funcția să nu fie o constantă, deci $f(x_1) - f(x_2) \neq 0$ sau $f(x_1 \neq f(x_2)$.

Funcția este strict monotonă pe domeniul de definiție. Funcția fiind biunivocă admite pe domeniul de definiție o inversă, pe care o aflăm :

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}\,;\ x = \frac{b - dy}{cy - a}\,;\ f^{-1}(x) = \frac{b - dx}{cx - a}$$

D. Mihalaşcu, profesor Piteşti

PROBLEME REZOLVATE

Problema 6845

În raport cu două axe perpendiculare se consideră punctul fix $A\,(0, a)$ *și punctele variabile* $P\,(\alpha, 0)$ *și* $Q\,(\beta, 0)$, *care se deplasează pe* Ox, *astfel încît* $OP \cdot OQ = OA^2$.

a. *Să se arate că bisectoarele unghiului* A *din triunghiul* APQ *rămîn fixe atunci cînd* P *și* Q *variază.*

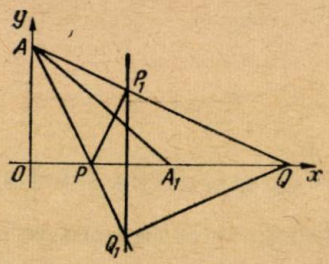
b. *Fie* PP_1 *și* QQ_1 *înălțimile vîrfurilor* P *și* Q *în triunghiul* APQ. *Să se arate că dreapta* P_1Q_1 *se deplasează rămînînd paralelă cu ea însăși.*

c. *Perpendiculara în* P *pe* AP *și perpendiculara ridicată în* Q *pe* AQ *se intersectează în* M. *Să se arate că locul geometric al lui* M *este format din trei drepte.*

Emil Morțun, profesor emerit, Pitești

Soluție dată de *Bogdan-Eugen Lungulescu*, elev Pitești.

a. Relația din ipoteză devine : $\alpha\beta = a^2$, de unde $\beta = \frac{a^2}{\alpha}$. Ecuația dreptei AP este $(AP) \equiv ax + \alpha y - a\beta = 0$



Ecuația dreptei AQ este :

$$(AQ) \equiv ax + \beta y - a\beta = 0$$

sau :

$$(AQ) \equiv ax + \frac{a^2}{\alpha}\, y - a\,\frac{a^2}{\alpha} = 0$$

sau încă :

$$(AQ) \equiv \alpha x + ay - a^2 = 0.$$

Ecuațiile bisectoarelor unghiului A sînt date de relația :

$$\frac{ax + \alpha y - a\alpha}{\sqrt{a^2 + \alpha^2}} \pm \frac{\alpha x + ay - a^2}{\sqrt{a^2 + \alpha^2}} = 0.$$

1. O bisectoare are ecuația :

$$(a + \alpha)\, x + (a + \alpha)\, y - a\,(a + \alpha) = 0$$

sau

$$x + y - a = 0.$$

2. Ecuația ceeleilalte bisectoare devine

$$(a - \alpha)\, x - (a - \alpha)\, y + a\,(a - \alpha) = 0$$

sau $x - y + a = 0$.

Deoarece nu depind de α și β, ambele bisectoare sînt fixe.

b. Direcția lui AQ este $m_{AQ} = m_1 = -\frac{\alpha}{a}$, iar direcția lui AP este

$$m_{AP} = -\frac{a}{\alpha}$$

Ecuația lui PP_1 va fi:

$$(PP_1) \equiv y = \frac{a}{\alpha}(x - \alpha), \text{ sau } (PP_1) \equiv ax - \alpha y - a\alpha = 0.$$

Ecuația lui QQ_1 este $(QQ_1) \equiv y = \frac{\alpha}{a}\left(x - \frac{a^2}{\alpha}\right)$

sau

$$(QQ_1) \equiv \alpha x - ay - a^2 = 0.$$

Coordonatele lui P_1 sînt date de sistemul

$$ax - \alpha y - a\alpha = 0; \quad \alpha x + ay - a^2 = 0.$$

Rezolvînd, găsim $x'_p = \frac{2\alpha a^2}{a^2+\alpha^2}$; $y'_p = \frac{a(a^2-\alpha^2)}{a^2+\alpha^2}$.

Coordonatele lui Q_1 sînt date de sistemul:

$$\alpha x - ay - a^2 = 0; \; ax + \alpha y - a\alpha = 0$$

Găsim: $x'_q = \frac{2a^2\alpha}{a^2+\alpha^2}$; $y'_1 = \frac{a(\alpha^2-a^2)}{\alpha^2+a^2}$.

Ecuația dreptei P_1Q_1 este $x = \frac{2a^2\alpha}{a^2+\alpha^2}$. Deci P_1Q_1 rămîne perpendiculară pe axa Ox.

c. Ecuația perpendicularei pe AP este

$$(\Delta_1) \equiv y = \frac{\alpha}{a}(x - \alpha) \tag{1}$$

$$(\Delta_1) \equiv \alpha x - ay - \alpha^2 = 0.$$

Ecuația perpendicularei în Q pe AQ va fi

$$(\Delta_2) \equiv y = \frac{a}{\alpha}\left(x - \frac{a^2}{\alpha}\right) \tag{2}$$

sau

$$(\Delta_2) \equiv a\alpha x - \alpha^2 y - a^2 = 0.$$

Locul lui M rezultă eliminînd pe α între cele două ecuații.
Înmulțind ecuațiile, avem:

$$y^2 = (x - \alpha)\left(x - \frac{a^2}{\alpha}\right) \text{ sau } y^2 = (x - \alpha)(x - \beta);$$

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = x^2 - (\alpha + \beta)x + a^2. \tag{3}$$

Dar comparînd relațiile (1) și (2), deducem, pentru $\alpha \neq \beta$:

$$\alpha(x - \alpha) = \beta(x - \beta)$$

sau

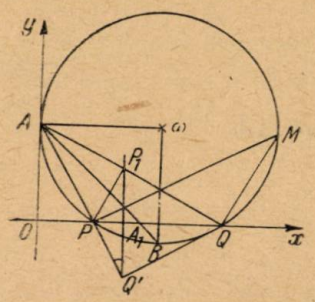
$$(\alpha - \beta)\, x = \alpha^2 - \beta^2,$$

de unde $x = \alpha + \beta$. Relația (3) devine :

$$y^2 = x^2 - x^2 + a^2 ; \quad \text{sau} \quad (y - a)(y + a) = 0.$$

Convine numai dreapta $y = a$ și anume porțiunile exterioare segmentului M_1M_2, unde $M_1(-a, a)$ și $M_2(a, a)$.

Să studiem acum cazul $\alpha = \beta$. Scoțînd pe α din (1) și introducîndu-l în (2), obținem



$$y = \frac{x^2}{y + a} - a \text{ sau, pentru } y \neq -a,$$

$$y^2 + 2ay + a^2 - x^2 = 0, \quad (y + a)^2 - x^2 = 0,$$

care se descompune în dreptele :

$$x + y + a = 0 ; \quad x - y - a = 0,$$

Deci, locul lui M este format din dreptele :

$$y = a ; \quad x + y + a = 0 ; \quad x - y - a = 0.$$

Soluție sintetică dată de *Ion Ruse*, prof. Pitești.

a. Deoarece $OA^2 = OP \cdot OQ$, OA este tangentă în A la cercul APQ pentru orice P și Q. Deci centrul ω al cercurilor APQ se află pe paralela la $x'x$ dusă prin A. Fie A_1 punctul de intersecție al axei Ox cu bisectoarea interioară a unghiului PAQ.

Observăm că triunghiul AOA_1 este dreptunghic isoscel, $A\omega$ fiind paralelă cu $x'x$. Dreapta AA_1 formează cu $y'y$ un unghi constant de 45°, deci bisectoarea AA_1 este fixă și deci și bisectoarea exterioară, perpendiculară în A pe AA_1 va fi fixă.

b. Patrulaterul PP_1QQ_1 este evident inscriptibil în cercul de diametru PQ. Avem $\sphericalangle PQA = \sphericalangle PAO = \text{măs}\,\frac{\overset{\frown}{AP}}{2}$. Dar $\sphericalangle PQA = \sphericalangle PQ_1P_1$ în patrulaterul inscriptibil menționat. Deci, $\sphericalangle PAO = \sphericalangle PQ_1P_1$. iar AP și PQ_1 fiind în prelungire, rezultă că P_1Q_1 este paralelă cu yy' și deci păstrează o direcție fixă.

c. Pentru $\alpha \neq \beta$ ($\alpha > 0$; $\beta > 0$) și $\alpha\beta = a^2$, triunghiul AQM este dreptunghic în Q ; rezultă că punctele M se află pe cercurile (ω) menționate fiind diametral opuse lui A. Deci $M \in (A\omega)$, astfel ca $AM > 2a$.

Dacă $\alpha < 0$ și $\beta < 0$, o discuție asemănătoare ne arată că M aparține semidreptei $(A\omega)$, astfel ca $M'A > 2a$.

Deci, dacă $\alpha \neq \beta$, locul lui M este format de cele două semidrepte arătate mai sus.

Dacă $\alpha = \beta$ ($\alpha > 0, \beta > 0$), $AP \equiv AQ \equiv AA_1$. Deci dreptele perpendiculare pe AP în P, respectiv pe AQ în Q sînt fixe (A_1 este fix) și confundate, formînd locul căutat : o dreaptă perpendiculară pe AA_1 în A_1, deci paralelă cu prima bisectoare în $A_1(a, 0)$.

Dacă $\alpha = \beta$ și $\alpha < 0$, $\beta < 0$, găsim analog că locul lui M este o dreaptă paralelă la a doua bisectoare prin $A_1(-a, 0)$.

Soluția autorului. a. Ecuațiile dreptelor AP și AQ sînt: $ax + \alpha y - a\alpha = 0$ și $ax + \beta y - a\beta = 0$, unde $\alpha\beta = a^2$.

Ecuațiile bisectoarelor unghiului A sînt:

$$\frac{ax + \alpha y - a\alpha}{\sqrt{a^2 + \alpha^2}} = \pm \frac{ax + \beta y - a\beta}{\sqrt{a^2 + \beta^2}}.$$

Înmulțim cu β ambii termeni ai fracției din membrul I, ținînd seama de relația $\alpha\beta = a^2$ și găsim succesiv, pentru una din bisectoare,

$$\frac{\beta ax + \alpha\beta y - a\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2\beta^2 + \beta^2 a^2}} = \frac{ax + \beta y - a\beta}{\sqrt{\beta^2 + a^2}}; \text{ sau } \frac{\beta ax + a^2 y - a^3}{\sqrt{a + \beta^2 a^2}} =$$

$$= \frac{ax + \beta y - a\beta}{\sqrt{\beta^2 + a^2}} \quad \beta x + ay - a^2 = ax + \beta y - a\beta;$$

$$(\beta - a)x + (a - \beta)y - a(a - \beta) = 0; \qquad x - y + a = 0.$$

Ecuația acestei bisectoare fiind independentă de α și β este fixă. În același fel se arată că ecuația bisectoarei exterioare a unghiului A este fixă.

Ecuația ei este: $x + y - a = 0$.

b. Ecuațiile înălțimilor PP_1 și QQ_1 sînt:

$$y = \frac{\beta}{\alpha}(x - \alpha) \text{ și } y = \frac{a}{\alpha}(x - \beta).$$

Coordonatele punctelor P_1 și Q_1 sînt următoarele:

$$P_1\left(\frac{2a^2\beta}{a^2 + \beta^2}, \frac{\alpha\beta(\beta - \alpha)}{a^2 + \beta^2}\right); \quad Q_1\left(\frac{2a^2\alpha}{a^2 + \alpha^2}, \frac{\alpha\beta(\alpha - \beta)}{a^2 + \beta^2}\right).$$

Abscisa punctului P_1 este: $\frac{2a^2\beta}{a^2 + \beta^2} = \frac{2a^2\alpha^2\beta}{a^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2}$, unde $\alpha\beta = a^2$. Ea se mai poate scrie sub forma: $\frac{2a^4\alpha}{a^2\alpha^2 + a^4} = \frac{2a^2\alpha}{a^2 + \alpha^2}$ și deci abscisa punctului P_1 este egală cu abscisa lui Q_1.

Punctele P_1 și Q_1 avînd aceeași abscisă, sînt așezate pe aceeași paralelă la axa Oy. În concluzie, dreapta variabilă P_1Q_1 se deplasează rămînînd paralelă cu axa Oy.

c. Ecuațiile perpendicularelor duse în P pe AP și în Q pe AQ sînt:

$$y = \frac{\alpha}{a}(x - \alpha); \qquad y = \frac{\beta}{a}(x - \beta).$$

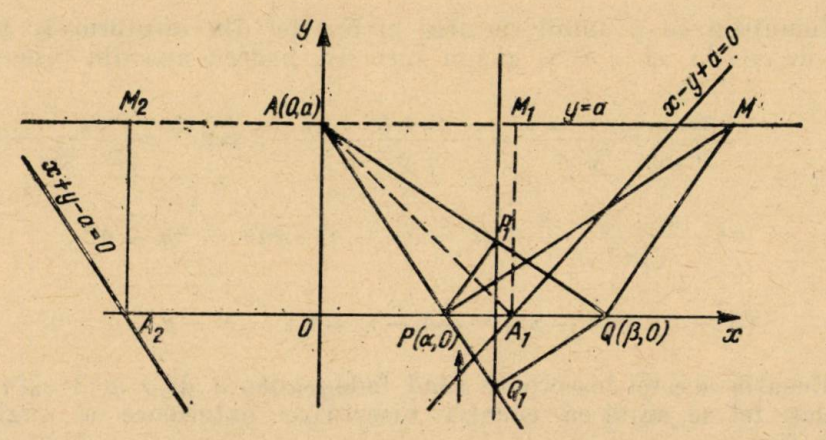
Locul geometric al punctului M se obține eliminînd parametrii α și β între ecuațiile de mai sus și relația $\alpha\beta = a^2$.

Scăzînd una din alta ecuațiile mai sus, obținem :

$$\alpha (x - \alpha) = \beta (x - \beta) \text{ sau } (\alpha - \beta) x = \alpha^2 - \beta^2.$$

Vom deosebi două cazuri :

I. $\alpha - \beta \neq 0$; în acest caz și numai în acest caz, avem dreptul să simplificăm cu $\alpha - \beta$ și găsim : $x = \alpha + \beta$.



Înlocuim această valoare într-una din ecuațiile de mai sus și găsim

$$y = \frac{\alpha}{a} (\alpha + \beta - \alpha) = \frac{\alpha\beta}{a} = \frac{a^2}{a} = a.$$

În ipoteza că $\alpha - \beta \neq 0$, locul geometric al punctului M este dreapta $y = a$. Trebuie observat însă că nu toate punctele acestei drepte fac parte din locul geometric. Într-adevăr $M (\alpha + \beta, a)$ iar abscisa $\alpha + \beta$ a punctului variabil M, din cauza condiției $\alpha\beta = a^2$, nu poate lua valori între $(-2a, 2a)$, deoarece α și β pot fi considerați ca rădăcinile ecuației $x^2 - (\alpha + \beta)x + a^2 = 0$ care are rădăcini reale numai dacă $(\alpha + \beta)^2 - 4a^2 \geqslant 0$, adică :

$$\alpha + \beta \geqslant 2a \quad \text{sau} \quad \alpha + \beta \leqslant -2a$$

și de aceea punctul M nu se poate deplasa în interiorul segmentului M_1M_2 (vezi figura), unde $M_1 (2a, a)$, $M_2(-2a, a)$, care nu face parte deci din locul geometric aflat.

II. Dacă $\alpha - \beta = 0$ atunci din relația $\alpha\beta = a^2$, găsim : $\alpha = \beta = \pm a$. Dacă în fiecare din ecuațiile : $y = \frac{\alpha}{a} (x - \alpha)$ și $y = \frac{\beta}{a} (x - \beta)$ facem înlocuirea $\alpha = \beta = +a$, găsim aceeași ecuație : $x - y + a = 0$.

De asemenea prin înlocuirea în ambele ecuații cu : $\alpha = \beta = -a$, găsim : $x + y - a = 0$.

Dreptele $x - y + a = 0$ și $x + y - a = 0$ fac parte din locul geometric, însă ele provin din nedeterminările locului geometric.

Într-adevăr, atît timp cît $\alpha \neq a$ și $\beta \neq a$, cele 2 perpendiculare duse în P și Q sînt distincte și prin intersecția lor se obține un singur punct pentru locul geometric căutat, pentru fiecare poziție a celor 2 perpendiculare.

Observare. Dacă $x = a$ atunci și $\beta = a$, punctele P și Q se confundă pe axa Ox. Atunci și cele 2 perpendiculare ridicate în P și Q pe AP și AQ, se confundă și prin intersecția lor dau ca loc geometric, nu un punct ci o întreagă dreaptă $x + y + a = 0$. Tot așa dacă $\alpha = \beta = -a$, se obține $x + y - a = 0$. Deci locul geometric este format din 3 drepte; două provin din nedeterminări și una e paralelă la axa Ox, însă din a treia dreaptă trebuie exceptat segmentul M_1M_2.

Problema 7141

Să se determine a și b reali din ecuația:

$$P(x) \equiv x^5 + (a^3 - 8a^2 + 21a - 30)(\sqrt{3} + 1) + 27]x^4 -$$
$$- (131 - a)x^3 - [4018 + (a^3 + a^2 - 5a + b)\sqrt{2}]x^2 +$$
$$+ (25\,850 + b)x - 20\,884 - 20a + 5b = 0,$$

știind că ecuația admite numai rădăcini raționale nenule (enunț rectificat).

Bogdan Lungulescu, elev Pitești

Soluție dată de autor. Pentru ca ecuația să aibă numai rădăcini raționale, este necesar ca toți coeficienții să fie raționali. Vom avea deci:

$$\begin{cases} (a^3 - 8a^2 + 21a - 30)(\sqrt{3} + 1) = 0 \\ (a^3 + a^2 - 5a + b)\sqrt{2} = 0 \end{cases}$$

Prima ecuație se poate scrie:

$$(a^3 - 5a^2 - 3a^2 + 15a + 6a - 3a)(\sqrt{3} + 1) = 0$$

sau

$$a^2(a - 5) - 3a(a - 5) + 6(a - 5) = 0,$$
$$(a - 5)(a^2 - 3a + 6) = 0,$$

cu unica soluție reală $a = 5$. Rezultă imediat $b = -125$.

Ecuația devine:

$$P(x) \equiv x^5 + 27x^4 - 126x^3 - 4018x^2 + 25775x - 21609 = 0.$$

Pentru a ne verifica, să rezolvăm ecuația. Observăm că ea se verifică pentru $x = 1$. Împărțind prin $x - 1$, obținem:

$$P(x) = (x - 1)(x^4 - 28x^3 - 98x^2 - 4116x + 21609) = 0.$$

Deci $x = 1$ sau $x^4 + 28x^3 - 98x^2 - 4116x + 21609 = 0$.

Împărțind prin x^2 $(x \neq 0)$,

$$x^2 + 28x - 98 - \frac{4116}{x} + \frac{21609}{x^2} = 0,$$

$$x^2 + \frac{147^2}{x^2} + 28\left(x - \frac{147}{x}\right) - 98 = 0,$$

Notînd $x - \frac{147}{x} = y$, ecuația devine:

$$y^2 + 294 + 28y - 98 = 0,\ y^2 + 28y + 196 = 0,\ (y + 14)^2 = 0,$$

de unde

$$y = -14.$$

Deci, avem :

$$x - \frac{147}{x} = -14,$$

$$x^2 + 14x - 147 = 0,$$

de unde

$$x = -7 \pm \sqrt{49 + 147} = -7 \pm 14.$$

Deci soluțiile ecuației sînt : $x_1 = 1$; $x_2 = x_3 = 7$; $x_4 = x_5 = -21$.

Problema 7167

Raportat la un sistem de axe ortogonal se dă cercul $x^2 + y^2 - 4y = 0$ *și dreapta variabilă* (d) $y = \lambda$.

Dreapta (d) *intersectează cercul în punctele* A *și* B *care se proiectează pe axa* Ox *în punctele* A' *și* B'. *Notăm cu* M *mijlocul segmentului* OA *și cu* N *mijlocul segmentului* BM. *Se cere* :

a) *Locul geometric al punctului* M.

b) *Pentru ce poziții ale dreptei* (d) *avem* $AN = ON$.

c) *Să se calculeze aria dreptunghiului* $AA'BB'$ *în funcție de* λ, *să se studieze variația acestei arii și să se construiască graficul.*

d) *Să se discute* (*cu ajutorul teoremei lui Rolle*) *condiția ca această arie să fie egală cu* k $(k > 0)$.

Examen de maturitate, iunie 1965

Soluție dată de *D. Manolache*, Curtea de Argeș.

a) *Metodă analitică.* Coordonatele punctelor A și B.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4y = 0 \\ y = \lambda \end{cases}$$

conduce la $x_1 = -\sqrt{4\lambda - \lambda^2}$, $x_2 = +\sqrt{4\lambda - \lambda^2}$.

Deci $A\,(-\sqrt{4\lambda - \lambda^2}, \lambda)$ și $B\,(\sqrt{4\lambda - \lambda^2}, \lambda)$.

Coordonatele punctului M :

$$x_M = -\sqrt{\frac{4\lambda - \lambda^2}{2}}; \quad y_M = \frac{\lambda}{2}.$$

Eliminînd pe λ avem

$$x = -\sqrt{2y - y^2}; \quad x^2 + y^2 - 2y = 0.$$

cu condițiile $4\lambda - \lambda^2 \leqslant 0$; $\lambda \in [0,4]$.

Din ecuația locului geometric se observă că $x < 0$, deci locul geometric este semicercul $x^2 + y^2 - 2y = 0$, $x < 0$.

Reciproc : Să arătăm că orice punct al semicercului aparține locului geometric. Se dă cercul $x^2 + y^2 - 4y = 0$ și semicercul $x^2 + y^2 - 2y = 0$,

$x < 0$. Fie $M(\alpha, \beta)$ un punct oarecare pe acest semicerc. Dreapta OM taie cercul dat a doua oară în A. Să arătăm că M este mijlocul segmentului OA.

Avem : $\alpha^2 + \beta^2 - 2\beta = 0$; $d < 0$

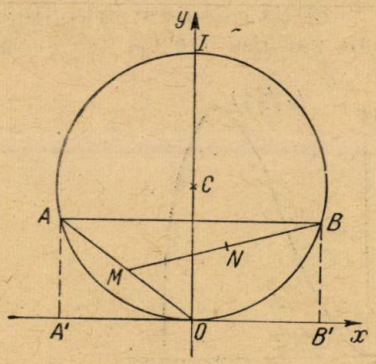
Dreapta (OM) : $y = \frac{\beta}{\alpha} \cdot x$.

Sistemul

$$y = \frac{\beta}{\alpha} x; \quad x^2 + y^2 - 4y = 0$$

conduce la soluţiile $x = 0$; $x = \frac{4\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$ şi

$$x = 0 ; \; y = \frac{4\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2},$$



deci A are coordonatele :

$$x = \frac{4\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}; \qquad y = \frac{4\beta^2}{\alpha^2+\beta^2};$$

dar $\alpha^2 + \beta^2 = 2\beta$ şi deci

$$x_A = 2\alpha ; y_A = 2\beta ; \quad \alpha < 0.$$

Soluţie geometrică. I. Fie C centrul cercului dat. Triunghiul OMC este dreptunghic în M iar $OC = 2$ = constant.

Locul geometric al punctului M este semicercul cu diametrul OC situat la stînga lui OC.

II. Din datele problemei se deduce :

$$OM : OA = \frac{1}{2}$$

iar O, M, A sînt colineare. Relaţiile definesc o omotetie de centru O şi raport $\frac{1}{2}$. Cînd A descrie semicercul respectiv, M descrie omoteticul său, deci un semicerc.

b). *Soluţie analitică.* Coordonatele punctului N :

$$x_N = \frac{\sqrt{4\lambda - \lambda^2}}{4} ; y_N = \frac{3\lambda}{4}.$$

Exprimăm condiţia

$$ON = AN \text{ sau } ON^2 = AN^2$$

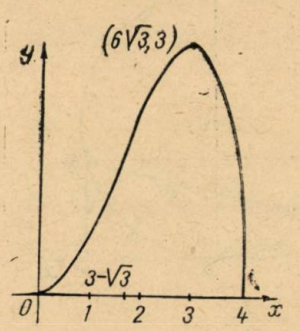
$$ON^2 = \frac{\lambda + 2\lambda^2}{4}; \quad AN^2 = \frac{25\lambda - 6\lambda^2}{4}.$$

Condiţia duce la $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$. Ţinînd seamă că diametrul cercului este 4, $\lambda = 3$ implică condiţia ca triunghiul OAB să fie echilateral.

Soluţie geometrică. Condiţia $AN = NO$ implică condiţia ca triunghiul ANO să fie isoscel. Cum M este mijlocul lui OA, trebuie ca $NM \perp OA$.

Dar $N \in (BM)$. Rezultă că $BM \perp OA$, deci mediana BM este și înălțime. Dar BM este mediană corespunzătoare laturii $OA = OB$. Avem un triunghi în care medianele sînt și înălțimi și mediatoare , deci triunghiul OAB trebuie să fie echilateral.

c) Să calculăm aria dreptunghiului $AA'BB'$ în funcție de λ, să studiem variația acestei arii și să construim graficul.



Expresia ariei este

$$S = 2\lambda\sqrt{4\lambda - \lambda^2}.$$

Domeniul maxim este $\lambda \in [0,4]$,

$$S' = \frac{4\lambda(3-\lambda)}{\sqrt{4\lambda-\lambda^2}},$$

$$S'' = \frac{\lambda^3 - 6\lambda^2 + 6\lambda}{(4\lambda-\lambda^2)\sqrt{4\lambda-\lambda^2}} = \frac{\lambda^2-6\lambda+6}{(4-\lambda)\sqrt{4\lambda-\lambda^2}}.$$

Pentru $\lambda = 0$ se calculează limitele și se obține

$$\lim_{\lambda\to 0+0} S' = 0\,; \quad \lim_{\lambda\to 0+0} S'' = \infty$$

Pentru $\lambda = 4$, se calculează de asemenea limitele și se obține

$$\lim_{\lambda\to 4-0} S' = -\infty\,; \quad \lim_{\lambda\to 4-0} S'' = -\infty.$$

Derivata secundă se anulează numai pentru

$$\lambda = 3 - \sqrt{3}.$$

Tabelul de variație va fi

λ	0		$3-\sqrt{3}$		3		4
S'	0	+		+	0	−	$-\infty$
S''	∞	+	0	−		−	$-\infty$
S	0	↗		↗	$6\sqrt{3}$	↘	0

d) Să se discute (cu ajutorul teoremei lui Rolle) condiția ca această arie să fie egală cu $k (k < 0)$.

Rădăcinile derivatei sînt calculate.

Considerăm funcția

$$F(x) = 2x\sqrt{4x - x^2} - k$$

$F'(x) = 0$ dacă $x = 0$ sau $x = 3$.

Formăm șirul lui Rolle :

$x = \lambda$	0	3	4
$F'(x)$	0	0	$-\infty$
$F(x) = 2x\sqrt{4x-x^2} - k$	$-k$	$6\sqrt{3} - k$	$-k$

Dacă $6\sqrt{3} - k < 0$, ecuația nu admite soluții.
Dacă $6\sqrt{3} - k = 0$, ecuația admite soluția $x = 3$ (rădăcină dublă).
Dacă $6\sqrt{3} - k < 0$, ecuația admite două soluții.

Problema 7168

Se dă o sferă de rază R căreia i se circumscrie un con circular ***drept.***
a) *Dacă se notează cu x înălțimea conului, să se arate că volumul conului este :*

$$\frac{\pi R^2 x^2}{3(x - 2R)}$$

b) *Să se studieze variația volumului conului în funcție de x.*
c) *Să se determine x astfel că volumul conului să fie de k ori volumul sferei. Discuție.*
d) *Dacă se notează cu α unghiul pe care generatoarea conului îl face cu planul bazei, să se afle aria totală a conului în funcție de R și α.*

Examen de maturitate, iunie 1965

Soluție dată de *Niculina Nicolau*, Curtea de Argeș.

a) $AM = x$, $OP = OM = R$, $BM = r$.

$$R = \frac{S}{p}; \quad 2p = r + 2\sqrt{r^2 + x^2}; \quad S = rx;$$

$$R = \frac{rx}{r + \sqrt{r^2 + x^2}}; \qquad Rr + R\sqrt{r^2 + x^2} = rx,$$

de unde

$$r = \frac{Rx}{\sqrt{x^2 - 2Rx}};$$

$$V = \frac{1}{3}\frac{\pi R^2 x^2}{x^2 - 2Rx} \cdot x = \frac{1}{3}\frac{\pi R^2 x^2}{x - 2R}.$$

b) $$f(x) = \frac{\pi R^2 x^2}{3(x - 2R)}$$

Avem $f(0) = 0$, $f(-\infty) = -\infty$, $f(+\infty) = +\infty$,

$$f'(x) = \frac{\pi R^2}{3} \cdot \frac{2x(x - 2R) - x^2}{(x - 2R)^2} = \frac{\pi R^2}{3} \cdot \frac{x^2 - 4Rx}{(x - 2R)^2},$$

$$f'(0) = 0,$$

$$x = 4R, \quad f'(4R) = 0$$

x	$-\infty$		0		$4R$		$+\infty$
$f'(x)$	$\frac{\pi R^2}{3}$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\frac{\pi R^2}{3}$

$$f''(x)=\frac{\pi R^2}{3}\cdot\frac{2(x-2R)}{(x-2R)^4}(x^2-4Rx+4Rx-x^2+4R^2)=\frac{\pi R^2}{3}\cdot\frac{8R^2}{(x-2R)^3}$$

x	$-\infty$		$2R$		$+\infty$
$f''(x)$	0	$-\infty$ | $+\infty$		$+$	0

Asimptote ;

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{\pi R^2}{3}=m,\quad \lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\frac{2\pi R^3}{3}=n$$

$$y=\frac{\pi R^3}{3}x+\frac{2\pi R^3}{3};$$

deci $y=\frac{\pi R^2}{3}(x+2R)$ este asimptotă oblică și $x=2R$ asimptotă verticală $f(4R)=\frac{8\pi R^2}{3}$.

x	$-\infty$		0		$2R$		$4R$		$+\infty$
$f'(x)$	$\frac{\pi R^2}{3}$	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	$\frac{\pi R^2}{3}$
$f''(x)$	0	$-$		$-\infty$	|	$+\infty$	$+$	$+$	0
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	$\frac{8\pi R^2}{3}$	$\nearrow$	∞

c) $V_{con}=\frac{k4\pi R^3}{3}$.

Avem

$$\frac{R^2x^2}{3(x-2R)}=\frac{k4\pi R^3}{3}$$

sau

$$x^2-4kRx+8R^2x=0,\quad x=2kR\pm\sqrt{4k^2R^2-8kR^2}.$$

Deci $x=2R\,[k\pm\sqrt{k^2-2k}]$.

Discuție : Avem k real pentru $k^2-2k>0$, $k(k-2)>0$.
Pentru $k>2$ sînt valabile ambele soluții, pentru că în acest caz $k>\sqrt{k^2-2k}$.

d) $r=R\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$; $AM=r\operatorname{tg}\alpha=r\ R\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\alpha=$

$$=2R\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}.$$

$$AB = \frac{r}{\cos\alpha} = \frac{R\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}}{\cos}.$$

$$A_{totală} = \frac{2\pi r\, AB}{2} + \pi r^2 =$$

$$= \frac{\pi R\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} R\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha} + \pi R^2\operatorname{cotg}^2\frac{\alpha}{2} = \pi R^2\left[\frac{\operatorname{cotg}^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha} + \operatorname{cotg}^2\frac{\alpha}{2}\right] =$$

$$= \pi R^2\operatorname{cotg}^2\frac{\alpha}{2}(1+\cos\alpha)\frac{1}{\cos\alpha} = 2\pi R^2\frac{\cos^4\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Problema 7264

a. *Punînd în evidență că* $\cos n\alpha$ *(n natural) este un polinom în* $\cos\alpha$ *să se deducă de aici că pentru* $x \in [-1, 1]$,

$$P_n(x) = \cos\,(n \arccos x)$$

este un polinom în x de gradul n, care are coeficientul lui x^n *egal cu* 2^{n-1}.

b. *Să se rezolve ecuația*

$$\cos\,(n\arccos x) = 0, \qquad x \in [-1,1]$$

Să se verifice că această ecuație are numai n rădăcini și să se precizeze poziția lor pe axa Ox.

c. *Să se determine valorile lui* $x \in [-1,1]$ *pentru care* $P_n(x)$ *este maxim sau minim.*

d. *Să se verifice identitatea*:

$$2\cos\,(n\arccos x) = (x + i\sqrt{1-x^2})^n + (x - i\sqrt{1-x^2})^n$$

e. *Să se deducă relația*

$$P_{n+1}(x) - 2x\,P_n(x) + P_{n-1}(x) = 0$$

f. *Să se verifice rezultatele obținute pentru* $n = 6$

(La admiterea în Facultatea de Matematică-Mecanică, București, 1965)

I. *Soluție* dată de *Lungulescu Bogdan—Eugen*, elev Pitești

a. Formula lui Moivre ne dă

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$$

Dezvoltînd și egalînd părțile reale:

$$\cos n\alpha = \cos^n\alpha - C_n^2\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha + C_n^4\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha \ldots$$

sau

$$\cos n\alpha = \cos^n \alpha - C_n^2 \cos^{n-2}\alpha + C_n^2 \cos^n \alpha + C_n^4 \cos^{n-4}\alpha - 2C_n^4 \cos^{n-2}\alpha + \\ + C_n^4 \cos^n \alpha + \ldots$$

sau încă :

$$\cos n\alpha = (1 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots)\cos^n \alpha - (C_n^2 + 2C_n^4 + \ldots)\cos^{n-2}\alpha + \\ + (C_n^4 + \ldots)\cos^{n-4}\alpha - \ldots$$

Deci $\cos n\alpha = P(\cos \alpha)$. Coeficientul lui $\cos^n \alpha$ este evident egal cu 2^{n-1}.

Să notăm $\arccos x = \alpha$. Rezultă :

$$P_n(x) = \cos(n \arccos x) = \cos n\alpha = 2^{n-1}\cos^n \alpha - (C_n^2 + \\ + 2C_n^4 + \ldots)\cos^{n-2}\alpha + \ldots$$

Dar $\cos \alpha = x$. Deci

$$P_n(x) = 2^{n-1}x^n - (C_n^4 + 2C_n^2 + \ldots)\, x^{n-2} + \ldots.$$

ceea ce era de demonstrat.

b. Avem : $\cos(n \arccos x) = 0$, de unde : $n \arccos x = (2k-1)\frac{\pi}{2}$.

Rezultă $\arccos x = \frac{(2k-1)\pi}{2x}$ sau $x = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}$, unde $k = 1, 2, 3, \ldots n$.

Evident, cele n rădăcini sînt reale şi cuprinse între -1 şi $+1$.

Deoarece $0 < \frac{(2k-1)\pi}{2n} < \pi$, rezultă că pe măsură ce k creşte, x descreşte.

c. $P_n(x)$ este maxim cînd este egal cu 1. Deci vom avea : $\cos(n \arccos x) = 1$, de unde

$n \arccos x = 2k\pi$, $\arccos x = \frac{2k\pi}{n}$ şi $x = \cos \frac{2k\pi}{n}$, unde $k = 1, 2, 3, \ldots n$.

$P_n(x)$ este minim cînd este egal cu -1, adică $\cos(n \arccos x) = 1$, de unde $n \arccos x = (2k-1)\pi$ şi $x = \cos \frac{(2k-1)\pi}{n}$, unde $k = 1, 2, 3, \ldots n$.

d. Revenim la notaţia $x = \cos \alpha$. Trebuie să arătăm că :

$$2\cos n\alpha = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n + (\cos \alpha - i \sin \alpha)^n,$$

ceea ce este evident, dacă folosim formula lui Moivre.

e. Prin definiţie avem :

$$P_{n+1}(x) = \cos(n+1)\alpha = \cos(n\alpha + \alpha),$$

$$P_{n-1}(x) = \cos(n-1)\alpha = \cos(n\alpha - \alpha).$$

Adunînd, obţinem :

$$P_{n+1}(x) + P_{n-1}(x) = \cos(n\alpha + \alpha) + \cos(n\alpha - \alpha) =$$

$$= 2\cos \alpha \cos n\alpha = 2x P_n(x), \text{ adică } P_{n+1}(x) + P_{n-1}(x) = 2x P_n(x),$$

ceea ce era de demonstrat.

f. Pentru $n = 6$:

1. $P_6(x) = \cos(6 \text{ arc cos } x) = \cos 6\alpha = 2^5 \cos^6\alpha - 48\cos^4\alpha + 18\cos^2\alpha - 1 = 2^{6-1} x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$.

2. $P_6(x) = 0$, implică $6 \text{ arc cos } x = (2k-1)\frac{\pi}{2}$, de unde rezultă $x = \cos\frac{(2k-1)\pi}{12}$, unde $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Soluțiile sînt, în ordine descrescătoare,

$$x_1 = \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}; \quad x_2 = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad x_3 = \cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4};$$

$$x_4 = \cos\frac{7\pi}{12} = -\sin\frac{\pi}{12} = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}; \quad x_5 = \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$x_6 = \cos\frac{11\pi}{12} = -\cos\frac{\pi}{12} = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

și verifică ecuația.

3. Maximul lui $P_6(x)$ este 1 și se atinge pentru $x = \cos\frac{2k\pi}{6} = \frac{k\pi}{3}$, unde $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, rezultate care verifică.

Minimul lui $P_6(x)$ este -1 și se atinge pentru $x = \cos\frac{(2k-1)}{6}$, unde $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, rezultate care verifică.

4. Avem relația echivalentă

$2\cos6\alpha = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^6 + (\cos\alpha - i\sin\alpha)^6$

$2\cos6\alpha = (\cos6\alpha + i\sin6\alpha) + (\cos6\alpha - i\sin6\alpha)$

$2\cos6\alpha = \cos6\alpha + i\sin6\alpha + \cos6\alpha - i\sin6\alpha$,

ceea ce este evident.

5. $\cos7\alpha - 2\cos\alpha\cos6\alpha + \cos5\alpha = 0$, căci

$$2\cos\frac{7\alpha+5\alpha}{2}\cos\frac{7\alpha-5\alpha}{2} - 2\cos\alpha\cos6\alpha = 0,$$

ceea ce este evident.

Problema E: 2409

Într-o secție de lăcătușerie a unei întreprinderi pentru confecționarea unor panouri electrice, se taie plăci metalice în formă de triunghiuri dreptunghice avînd cateta $AB = 150$ cm și ipotenuza $BC = 170$ cm. La aceste plăci se decupează cîte o ferestruică dreptunghiulară $MNPA$ înscrisă în

triunghi (M pe AB, N pe BC și P pe AC) pentru introducerea mînerului de acționare la declașarea sau întreruperea curentului. Să se determine laturile dreptunghiului $MNPA$ știind că perimetrul său este de 174 cm.

La admitere în cl. IX-a, Ploiești 1965

Soluție dată de elevul *Ruse I. Lilion*, cl. VIII-a, Școala generală nr. 4 Pitești.

Din asemănarea triunghiurilor ABC și MBN, pe baza teoremei fundamentale a asemănării rezultă:

$$\frac{MB}{150} = \frac{BN}{170} = \frac{NM}{AC}; \quad AC = \sqrt{170^2 - 150^2} = 80 \text{ cm}.$$

Notînd pe MN cu x, avem: $MN = x$ și $NP = 87 - x$,
Rezultă: $MB = AB - 87 + x = 150 - 87 + x = 63 + x$.
De unde:

$$\frac{63+x}{150} = \frac{x}{80} = \frac{63+x-x}{150-80} = \frac{63}{70}.$$

Deci

$$\frac{x}{80} = \frac{63}{70}; \quad x = \frac{80 \cdot 62}{70} = 819 = 72 \text{ cm}.$$

Rezultă că $MN = 72$ cm; $NP = 87 - 72 = 15$ cm.

CHESTIUNI DE EXAMEN

Concursul de matematică 1966, etapa finală

Clasa a IX-a

7 664. a) Să se aducă la forma cea mai simplă expresia

$$E = \left[\frac{2\sqrt[3]{a^2} \quad 2\sqrt[3]{ab} - \quad 2\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2}+a \quad \sqrt[3]{ab}+ \quad \sqrt[3]{b^2}} - \frac{\sqrt[3]{a^2}-3 \quad \sqrt[3]{a}+2 \quad \sqrt[3]{b^2}- \quad \sqrt[3]{a}+ \quad \sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a^2}- \quad \sqrt[3]{b^2}} \right] \left(\sqrt[3]{a}+ \quad \sqrt[3]{b}\right.$$

b) Să se afle valoarea numerică a expresiei de la punctul a) pentru

$$a = \sqrt{\frac{81^{0,75} + \left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}}{(0,5)^{-1}}} \text{ și } b = \sqrt{a}$$

Augustin Matei, Cluj

c) Să se rezolve ecuația:

$$\frac{(b-c)(x+a)}{x-a} + \frac{(c-a)(x+b)}{x-b} + \frac{(a-b)(x+c)}{x-c} = 0$$

7665. Fie ABC un triunghi oarecare. Se duc MM' paralel cu BC, NN' paralel cu AB și PP' paralel cu AC și tangente cercului înscris

triunghiului ABC, respectiv în punctele J, L, K (M și P' sînt pe AB; M' și N sînt pe AC; N' și P sînt pe BC).

Fie D, E, F punctele de tangență ale cercului înscris triunghiului ABC respectiv cu laturile BC, AC, AB ale triunghiului ABC.

Să se arate că:

a) Suma perimetrelor triunghiurilor AMM', BPP', CNN' este egală cu perimetrul triunghiului ABC.

b) Triunghiurile DEF și JKL sînt egale.

c) Fie $Q \equiv JK \cap EF$, $R \equiv JL \cap EF$, $S \equiv JL \cap DE$,

$T \equiv DE \cap LK$, $U \equiv LK \cap DF$ și $V \equiv DF \cap JK$.

Să se arate că dreptele QT, RU, SV sînt concurente.

d) Dacă R este raza cercului circumscris triunghiului ABC și R_a, R_b, R_c, razele cercurilor circumscrise triunghiurilor respectiv AMM', BPP' FNN' atunci există relația

$$R_a + R_b + R_c = R$$

Simon Petru, Tg. Mureș

Clasa IX seral

7666. a) Să se arate că ecuațiile

$$a\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{a-b^2} = b,$$

$$b\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-b^2} = a$$

admit o rădăcină comună.

b) În ce caz această rădăcină comună este reală?

c) Se dă $\log_{20} a = 500$. Să se afle $\log_8 200$

7667. În triunghiul ABC ducem $AD \perp BC$; $DE \perp AC$; $EF \perp DC$ și fie I intersecția dreptelor AF și DE. Se dau $AB = 7$, $AD = 5$ și $AC = 13$ m

Să se calculeze segmentele AF și AI.

C.I.Ț.

7668. Să se arate că dacă intersecția diagonalelor unui patrulater inscriptibil $ABCD$ este mijlocul diagonalei BD, atunci există relația

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 = 2AC^2$$

Clasa a X-a

7669. a) Se dă ecuația

$$(a^3 - 4a^2 + 5a - 2)x^3 + x - 1 = 0$$

Să se formeze ecuația ale cărei rădăcini sînt inversele rădăcinile ecuației date și să se rezolve ecuația dată.

b) În ce caz toate rădăcinile sînt reale?

C.I.Ț.

7670. Să se afle restul împărțirii

$$(7\sin^{31}x + 8\sin^{13}x - 5\sin^{5}x\cos^{4}x - 10\sin^{7}x + \sin^{5}x - 2) :$$

$$:[\sin^{2}x - (1 + \sin x)(\cos^{2}x - 2)],$$ fără a se efectua împărțirea.

C.I.T.

7671. O placă triunghiulară ABC se îndoaie în jurul liniilor mijlocii ale triunghiului. Vîrfurile A, B, C se unesc formînd vîrful V al unui tetraedru $VA_1B_1C_1$ unde A_1, B_1, C_1 sînt mijloacele laturilor BC, AC, AB.

a) Să se arate că au loc relațiile :

$$\cos\alpha = \frac{2\cos A}{\sin B \sin C} - 1 = 1 - 2\operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C,$$

unde α este unghiul diedru corespunzător muchiei B_1C_1.

b) Să se exprime volumul tetraedrului în funcție de raza ρ a cercului circumscris unei fețe a tetraedrului și unghiurile triunghiului

C.Ionescu–Țiu

Clasa a XI-a

7672. Se consideră funcțiile

$$f_1(x) = 2\sqrt{|x|} + \sqrt{4|x| - x^2},$$

$$f_2(x) = 2\sqrt{|x|} - \sqrt{4|x| - x_2},$$

$$f_3(x) = 2\sqrt{|x|} - \sqrt{4|x| - x^2},$$

$$f_4(x) = -2\sqrt{|x|} + \sqrt{4|x| - x^2},$$

definite pentru $x \leqslant 4$.

a) Să se construiască graficele acestor funcții.

b) Fie $M_1[x_0, f_1(x_0)]$, $M_2[x_0, f_2(x_0)]$, $x_0 > 0$, situate pe graficele funcțiilor f_1 și f_2. Să se găsească valoarea x_0 pentru care segmentul M_1M_2 are lungimea maximă.

Cum sînt tangentele la cele două grafice în punctele M_1 și M_2 ?

c) Să se calculeze aria domeniului mărginit de graficele funcțiilor f_1, f_2, f_3, f_4.

I.Teodorescu, Galați

7673. Se dă cercul (O) și dreapta (Δ) de ecuații

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0, \quad bx - ay = 0.$$

Din mulțimea punctelor de intersecție ale tangentelor la cercul (O) cu paralelele la dreapta (Δ) considerăm acele puncte M pentru care avem $MT = MP$ și punctele N pentru care $NT = NQ$ (unde s-a notat cu T punctul de tangență, iar cu P și Q punctele unde o paralelă la (Δ) taie respectiv axele xx' și yy').

a) Punctele M aparțin unei hiperbole (H) cu unul din focare F pe Ox, iar punctele N unei hiperbole (H_1) cu F_1 pe Oy.

b) Cercul cu centrul în F și raza OF și cercul cu centrul în F_1 și raza OF_1 sînt tangente respectiv la (H_1) și (H), iar dreptele care unesc punctele de contact de pe fiecare hiperbolă, împreună cu (Δ) sînt trei drepte concurente pe cercul (O).

Gh.Bazacov, Tr.Severin

Școli profesionale — anul I

7674. O placă triunghiulară din oțel, cu greutatea specifică de 7,8 grf/cm³ și grosimea de 1 cm are laturile $AB = 5$ cm, $BC = 6$ cm, $CA = 7$ cm. Această placă se taie după o dreaptă paralelă cu latura BC, astfel ca figurile obținute să aibă același perimetru. Să se afle : a) Lungimea tăieturii. b) Aria plăcii trapezoidale. c) Greutatea fiecărei plăci obținute.

Emilian Bortaș, București

7675. Un trapez isoscel are baza mică de b metri, unghiul ascuțit de 60° și lungimea uneia din laturile neparalele de $\frac{3b}{2}$ metri. Să se afle :

a) Aria trapezului în funcție de b. b) Lungimea diagonalelor trapezului. c) Volumul prizmei care are ca bază trapezul de mai sus iar înălțimea-medie proporțională între cele două baze ale trapezului.

7676. Să se rezolve sistemul :

$$\frac{1}{x-3} + \frac{2}{y+1} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{2}{x-3} - \frac{4}{2y+2} = -\frac{1}{8}$$

Școli profesionale, anul II

7677. O schiță $ABCD$ de forma unui trapez are baza mare AB de 7 cm, baza mică de 1 cm iar înălțimea de 6 cm. La ce depărtare de baza mare trebuie dusă o paralelă EF cu ea, pentru ca schița să fie împărțită în două părți echivalente. Să se afle latura triunghiului echilateral echivalent cu trapezul $CDEF$.

7678. Secțiunea axială VAB făcută într-un vas de formă conică este un triunghi dreptunghic (unghiul $V = 90^0$) isoscel, a cărui arie este de 18 cm ². Printr-un mic orificiu se toarnă mercur în vas pînă la jumătate din înălțimea sa. Se cere :

a) Greutatea mercurului din vas, știind că densitatea mercurului este 13,6.

b) Să se afle cîtă tablă (exprimată în dm ²) este necesară pentru confecționarea vasului.

c) Mercurul din acest vas se toarnă în altul de forma unui paralelipiped dreptunghic cu lungimea de 70 mm, lățimea de 5 cm. La ce înălțime se va ridica mercurul în acest din urmă vas?

Școli pedagogice, anul VI

7679. Trei țesătoare au dat în prima săptămînă 948 m de pînză; prima țesătoare lucra la două războaie, a doua la 4, iar a treia la 5. În săptămîna următoare prima și a treia țesătoare au mai preluat cîte un război și atunci au dat toate împreună, la o aceeași productivitate 1164 m de pînză. În a treia săptămînă, cînd și cea de a doua țesătoare a preluat încă un război, cele trei țesătoare au dat 1248 m de pînză.

a) Cîți metri de pînză a dat în medie fiecare dintre țesătoare lucrînd o zi la războiul său? (o săptămînă are 6 zile lucrătoare).

b) Cîți metri de pînză dădea la un război fiecare țesătoare zilnic, dacă în a doua și a treia săptămînă, prima și a doua țesătoare ar fi dat aceeași cantitate?

c) Cîți metri de pînză trebuie să se adauge la 948 m pentru ca și în prima săptămînă cele trei țesătoare să fi lucrat la fiecare război în condițiile de la punctul b)?

7680. Un număr de 6 cifre începe cu 1. Dacă mutăm pe 1 de la stînga la dreapta, el devine de trei ori mai mare. Care este acel număr?

7681. Într-un eleșteu, într-o zi au fost pescuiți 1260 pești. Din aceștia, 1000 pești au fost marcați și apoi aruncați înapoi în eleșteu. După cîteva zile s-au pescuit din nou 841 pești din care s-au găsit 105 pești marcați. Cîți pești au fost aproximativ în acest eleșteu?

Școli tehnice de maiștri, anul I curs de zi

7682. Se duce paralela MN la latura BC a triunghiului ABC la o distanță x de BC mai mică decît jumătate din înălțimea AD a triunghiului. Paralela dusă din M la AC taie pe BC în Q, iar paralela dusă din N la AB taie pe BC în P. Se notează $BC=a$ și $AC=h$. Se cere:

a) Să se afle aria trapezului $MNPQ$.

b) Să se afle x așa fel ca aria trapezului $MNPQ$ să fie o treime din aria triunghiului ABC.

c) Să se afle volumul solidului obținut prin rotirea trapezului $MNPQ$ în jurul laturii PQ.

7683. Să se rezolve ecuația:

și să se discute rădăcinile ecuației după diferitele valori ale unghiului α.

$$x^2 - (2\operatorname{ctg}\alpha)x + 1 = 0$$

7684. O prismă triunghiulară $ABCDEF$ regulată are latura bazei de 4 dm și înălțimea de 6 dm. Să se afle cu cît trebuie prelungite, în același sens, muchiile laterale BE și CF pînă în G și I respectiv, astfel ca solidul rezultat să aibă aria laterală de 100 dm^2 iar segmentul GI egal cu 5 dm.

7685. a) Să se rezolve triunghiul ABC în care $AB = 5$, $AC = 6$ m și unghiul B egal cu dublul unghiului A.

b) Să se calculeze suprafața corpului născut prin rotirea triunghiului ABC în jurul laturii BC.

c) Să se afle volumul corpului obținut la punctul b).

PROBLEME PROPUSE *)

7686. Să se simplifice fracțiile următoare și să se compare la fiecare fracție domeniul de definiție al fracției reductibile cu al fracției ireductibile:

$$F(x) = \frac{x^3 - 7x + 6}{x^3 + x^2 - 5x + 3}$$

$$F_1(x, y) = \frac{5x^2 - 5x - 121y^2 + 11y}{9(x - 3y)^2 - 4(y - x)^2}$$

$$F_2(x, y) = \frac{(2x - y)^3 - (x + 3y)^3}{x^3 - 12x^2y + 48xy^2 - 64y^3}$$

Constanța Nicolescu, prof. Cîmpulung Muscel

7687 Într-un cerc O se iau două raze perpendiculare OA și OB și o coardă BC egală cu raza cercului. Se cere :

a) Să se calculeze perimetrul și aria triunghiului ABC în funcție de raza cercului.

b) Tangenta în C la cerc intersectează dreapta AB în D. Să se arate că raza cercului este medie proporțională între AC și BD.

Gh. Lupușor, prof. Pitești

7688. Fie fracția $\frac{103n + 102}{104n + 101}$.

Să se afle valorile lui n pentru care fracția se poate simplifica.

I. Velescu, profesor Pitești

7689 Se dă un dreptunghi $ABCD$. În A se duc două semidrepte perpendiculare una pe cealaltă ; una taie latura DC în N, iar cealaltă taie DC în E și latura BC în M.

Să se arate că :

$$a) \frac{ND}{DE} = \frac{MN^2 - NC^2}{EC^2} \; ; \qquad b) \frac{AM}{AN} = k \text{ (constant).}$$

b) Dacă triunghiul AMN este isoscel, atunci mijlocul lui MN și punctele D și B sînt coliniare.

Ilie Ionescu, Pitești

7690. Se dau ecuațiile :

$$x^2 + px + q = 0 \text{ și } q^2y^2 - (3pq - p^3)y + q = 0$$

Să se afle rădăcinile ecuației cu necunoscuta y în funcție de rădăcinile primei ecuații.

N. Peligrad

7691. Să se construiască un triunghi ABC fiind date latura $AB = c$; $\sphericalangle C$ și α, unghiul format de mediana vîrfului A cu latura AB.

N. Păun, prof. R. Vîlcea

---

*) IX (7686–7693); X (7694–7697); XI (7698–7713); S (7716–7617). Soluțiile se primesc pînă la 15 noiembrie 1966. Problemele de clasa IX sînt indicate și liceelor speciale.

7692. Să se simplifice expresia :

$$E = \frac{x^3 - 27x + (x^2 - 9)\sqrt{x^2 - 36} - 54}{x^3 - 27x + (x^2 - 9)\sqrt{x^2 - 36} + 54}$$

Mihai N. Ionescu, prof. Piteşti

7693. Să se rezolve sistemul :

$$x^2 + 2ay = a^2$$
$$y^2 + 2bx = b^2$$

N. Păun, prof. R. Vilcea

7694 Trei cercuri egale trec prin acelaşi punct P şi se intersectează două cîte două în punctele A, B şi C.

a) Să se demonstreze că triunghiul ABC este egal cu triunghiul centrelor celor trei cercuri O,O',O''.

b) În ce caz triunghiurile ABC şi $OO'O''$ au acelaşi ortocentru?

N. Petrescu, prof. Piteşti

7695. Se dau :

$$m = \frac{\sin(a-b)}{\cos(b+c)}\ ; n = \frac{\cos(b-c)}{\sin(a+b)}\ ;$$

$$p = \frac{2\sin(a+c)\sin(a-c)}{\sin(a+2b+c) + \sin(a-c)},$$

unde m, n şi p sînt constante date ·Se cere :

a) Să se arate că

$$E = \frac{p+m-n}{p-m+n} = -\frac{\cos 2a}{\cos 2c}.$$

b) Dacă $a + c = \frac{3\pi}{4}$, atunci $\operatorname{tg} 4a = \frac{(p-m)+n)(p+m-n)}{2p(m-n)}$

Ilie Ionescu, profesor Piteşti

7696. Să se demonstreze că expresia

$$E = 5^{5^3} + 5^{5^3 \cdot 3} + 5^{5^3 \cdot 5} + 5^{5^3 \cdot 7} + \ldots + 5^{5^3 \cdot 1003}$$

se divide prin 251.

Iulian Curelea, Piteşti

7697. Să se rezolve ecuaţia :

$$(1 + \operatorname{ctg} x)\sin^3 x + (1 + \operatorname{tg} x)\cos^3 x + \sin 3x - 2\sin x = \cos x + \cos 2x$$

I. Velescu, Piteşti

7608. Pe muchiile cubului $A_1A_2A_3A_4B_1B_2B_3B_4$ se consideră punctele M, N și P astfel încît să avem:

$$\frac{MA_1}{MB_1}=\frac{1}{4}\ ;\ \frac{NA_2}{NA_3}=\frac{2}{3}\ \text{și}\ \frac{PB_3}{PB_4}=\frac{1}{2}.$$

Să se găsească secțiunea determinată în acest cub de planul care conține punctele M, N și P.

Nicolae Peligrad, Pitești

7699. Se dă un triunghi ascuțitunghic ABC și un punct M în interiorul său. Notăm $\sphericalangle MBA=\alpha$, $\sphericalangle MCB=\beta$ și $\sphericalangle MCA=\gamma$. Să se arate că

$$a^2+b^2+c^2=2(aMC\cos\beta+bMA\cos\gamma+cMB\cos\alpha).$$

B. E. Lungulescu, elev Pitești

7700. Să se arate că

$$\prod_{k=1}^{n}(k!)^2\prod_{k=1}^{n}k^{2(k-1)}=(n!)^{2n}$$

M. N. Ionescu, profesor Pitești

7701. Să se calculeze expresia:

$$E=\frac{\left[\dfrac{1}{\operatorname{cosec}(a+b)}+\dfrac{1}{\operatorname{cosec}(a-b)}\right]\operatorname{cosec}2a}{\left[\dfrac{1}{\sec(a-b)}-\dfrac{1}{\sec(a+b)}\right]\sec 2b}\cdot\frac{\sec b}{\operatorname{cosec}a}$$

știind că $b\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$, $a+b=2\pi$ și $\log_3\operatorname{tg}b=-\frac{1}{2}$.

Gabriela Marinescu, Curtea de Argeș

7702. Se dă mulțimea piramidelor care au baza un poligon regulat fix cu $2n$ laturi, iar suma pătratelor muchiilor laterale constantă. Se cere locul geometric al dreptelor care unesc proiecțiile aceluiași vîrf pe două plane paralele date.

B. E. Lungulescu, elev Pitești

7703. Să se arate că dacă $\alpha+\beta=45^\circ$, atunci

$$\operatorname{cosec}^2\alpha(1-\operatorname{tg}\beta)^2+\operatorname{cosec}^2\beta(1-\operatorname{tg}\alpha)^2=2(\sec^2\alpha+\sec^2\beta)$$

N. Păun, prof. R. Vîlcea

7704. Să se arate că

$$\frac{6}{n(n+1)(n+2)}=3\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{1+n}+\frac{1}{n+2}\right)$$

și apoi să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{6}{k(k+1)(k+2)}$$

Gh. Rizescu, prof. București

7705. Într-un sistem de axe rectangulare se dă un punct fix A, care se proiectează pe axele de coordonate în B_1 și B_2, respectiv pe Ox, Oy. O dreaptă variabilă (D) trece printr-un alt punct fix C, aflat pe axa Oy. Punctele B_1 și B_2 se proiectează apoi pe dreapta variabilă (D) în B_1' și B_2' respectiv. Se cere:

a) Să se demonstreze că perpendiculara ridicată prin mijlocul M al segmentului $B_1'B_2'$ trece printr-un punct fix.

b) Să se afle locul geometric al punctului M.

c) Să se explice geometric locul găsit folosind rezultatul de la punctul a).

V. Butunoiu, elev Pitești

7706. Dacă n este un număr natural, să se arate că:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{n} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1$$

V. Butunoiu, elev Pitești

7707. Se dau trei puncte fixe A, B și C coliniare, o dreaptă fixă (D) și un punct M, mobil pe (D). Paralela dusă prin A la (D) întâlnește paralela dusă prin B la (MC) în P. Se cere:

a) Să se arate că dreapta (MP) trece printr-un punct fix.

b) Să se afle locul geometric al punctului în care se intersectează (MB) cu paralela la (MC) dusă prin A.

N. Peligrad, Pitești

7708. Să se stabilească domeniul maxim al funcției

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} + \sqrt{\log_a \frac{1-x^2}{1+x^2}} + \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

D. I. Manolache, profesor Curtea de Argeș

7709. Să se studieze variația funcției:

$$y = \sqrt{\frac{3x^2+3x+2}{x^2-1}}.$$

Să se facă graficul și să se afle ecuația tangentei prin $\left(-3, \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$.

Valentina Predescu, Pitești

7710. Se dă funcţia: $f(x) = \dfrac{1}{|\sqrt{-x^2+4x+5} - \sqrt{x^2-8x+15}|}$.

Se cere:

a) Domeniul maxim de definiţie.

b) Să se exprime $f(x)$ fără a folosi modulul.

Simion Sorin, prof. Piteşti

7711. Fiind dată ecuaţia:

$$\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2+y^3}} + \sqrt[3]{x-\sqrt{x^2+y^3}} = m,$$

să se găsească mulţimea soluţiilor întregi în m întreg ale lui x şi y (în legătură cu problema 6328).

N. Păun, prof. R. Vîlcea

7712. Fiind date funcţiile

$C_1(x) \equiv (x-2a) + y(y-2b) + p_1,$

$C_2(x) \equiv (x-2a) + ky(y-2b) + p_2,$

a) să se arate că pentru orice valori reale ale constantelor a, b, k, p_1, $p_2 \neq kp_1$ sistemul de ecuaţii $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ nu admite soluţie unică.

b) Ce legătură trebuie să fie între p_1 şi p_2 pentru ca sistemul să admită o infinitate de soluţii?

c) Care este porţiunea din planul axelor de coordonate rectangulare pentru care este valabilă inegalitatea $C_1C_2 < 0$?

Minasian Eduard, prof. Piteşti

7713. Să se afle domeniul de definiţie al funcţiei

$$y = \sqrt{1-2\sin 4x} + \sqrt{1+2\cos 2x}$$

şi valorile lui x pentru care funcţia ia valoarea 2 în intervalul $(0, 360°)$.

C. Ionescu-Ţiu

7714. Să se afle domeniul de definiţie şi graficul funcţiei

$$y = \sqrt{1+2\sin 2x} - \sqrt{1+2\cos 3x}.$$

C. Ionescu-Ţiu

7715. Fie într-un cerc coarda $AB = l_4$ şi M un punct mobil pe arcul mic subîntins de coardă iar M' punctul diametral opus lui M. Paralelele duse din M' la MB, MA taie pe AB, AM; AB, BM în A_1, A_2, B_1, B_2; să se arate că

$$\left(\frac{1}{A_1A_2} - \frac{1}{MB}\right)^2 + \left(\frac{1}{B_1B_2} - \frac{1}{AM}\right)^2 = 4\left(\frac{1}{MB_2^2} + \frac{1}{MA_2^2}\right)$$

N. Păun, prof. R. Vîlcea

7716. Să se stabilească relaţiile :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)\dots(n+p-1)}{q^{n-1}} = p\,!\left(\frac{q}{q-1}\right)^{p+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)\dots(n+p-1)}{(-1)^{n-1}q^{n-1}} = p\,!\left(\frac{q}{q+1}\right)^{p+1};\ (q>1)$$

N. Păun, prof. Rm. Vîlcea

7717. Să se reprezinte grafic

$$x(\sqrt{1-y^2}) + y(\sqrt{1-x^2}) = 0; \quad (1-x)\sqrt{y} + (1-y)\sqrt{x} = 0;$$

$$x(\sqrt{1-y^2}) - y(\sqrt{1-x^2}) = 0; \quad (1-x)\sqrt{y} - (1-y)\sqrt{x} = 0;$$

C. Ionescu-Ţiu

EXERCIŢII ŞI PROBLEME PROPUSE PENTRU CLASELE V-VIII *)

E :**2545**. Să se calculeze expresia :

$$307 - [83{,}33 - 2^3 \cdot (13{,}5 : 100 + 0{,}5^2 \cdot 19{,}46) : 0{,}8] : 1{,}1 \times 10$$

V. Ciobanu, profesoară Piteşti

E :**2546**. În anul 1965 au lucrat în agricultura patriei noastre 186 000 de : tractoare, semănători şi combine.

Să se afle cîte combine, semănători şi tractoare erau dacă numărul combinelor este mai mic cu 1600 decît $\frac{3}{5}$ din numărul semănătorilor, iar numărul tractoarelor întrece cu 16 000 numărul semănătorilor ?

M. C. Barbu, profesor Mierleşti-Argeş

E : **2547**. Trei lucrători au executat împreună o lucrare pentru care au primit o sumă de bani.

Primul primeşte a treia parte din cît primesc al doilea şi al treilea împreună ; al doilea primeşte a cincea parte din cît primesc primul şi al treilea împreună iar al treilea primeşte cu 400 lei mai mult decît primesc primii doi împreună. Ce sumă a primit fiecare ?

Gh. Lupuşor, prof. Piteşti

E : **2548**. Într-o şcoală generală de 8 ani, procentul elevilor cu note de 9 şi 10 este de 26% la calsele I—IV şi de 19% la clasele V—VIII. Să se afle procentul elevilor cu note de 9 şi 10 pe şcoală ştiind că raportul dintre numărul elevilor de la clasele I—IV şi numărul elevilor de la calasele V—VIII este $\frac{3}{4}$.

N. Petrescu, profesor Piteşti

---

*) V (E ; 2545—2547) ; VI (E : 2548—2551) ; VII (E : 2552—2556) ; VIII (2557—2559). Soluţiile se primesc pînă la 15 noiembrie 1966.

E : **2549**. Trei aliaje de argint au titlurile respectiv de 0,960 ; 0,720 și 0,640. Greutatea totală a argintului din cele trei aliaje este de 5,580 kg. Să se calculeze titlul aliajului obținut prin topirea împreună a celor trei aliaje știind că greutatea primului aliaj este 2/5 din greutatea celui de-al doilea, iar greutatea celui de-al treilea este de 1,5 ori mai mare decît greutatea primului aliaj.

Gh. Lupușor, prof. Pitești

E : **2550**. Să se determine restul împărțirii lui 16949^{56} prin 8.

B. E. Lungulescu, elev Pitești

E : **2551**. Să se determine numărul de trei cifre $\overline{abc}$ care are proprietatea

$$\overline{abc} = \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}.$$

D. Acu, Cluj

E : **2552**. Pe un cerc de rază R se iau arcele AB și AC de cîte $120°$ și arcul BD de $60°$. Coardele AC și BD prelungite se intersectează în E.

Să se arate că punctul C este pe mijlocul segmentului AE și că BD este o treime din BE.

Gh. Lupușor, prof. Pitești

E : **2553**. Fiind dat un cerc de diametru AB și în el coardele $AC = CD$ (punctele C și D fiind de o parte și de alta a diametrului AB) și notînd cu M intersecția lui CD cu AB, să se arate că $3 \sphericalangle CAB = \sphericalangle CMB$.

N. Păun, prof. R. Vîlcea

E : **2554**. Perpendiculara dusă într-un punct C al diametrului AB taie cercul în D și D'. Se construiește pătratul $ACEF$ cu latura AC, de aceeași parte cu D.

a. Să se afle poziția punctului C, astfel ca triunghiul CDF să fie isoscel cu vîrful în C și să se arate apoi că în acest caz, triunghiul ADF nu poate fi isoscel.

b. Tot în condițiile punctului a să se calculeze, în funcție de raza cercului r, perimetrul și aria triunghiului ADF.

N. Petrescu, profesor, Pitești

E : **2555**. Să se construiască un triunghi oarecare ABC, cunoscîndu-se vîrful A, direcția laturei AB, centrul cercului circumscris și lungimea înălțimii din A.

B. E. Lungulescu, elev Pitești

E : **2556**. Se consideră pe o dreaptă patru puncte A, B, C, D care se succed în ordinea arătată. Să se afle raportul în care punctul M, inte-

rior segmentului BC, împarte acest segment știind că același punct împarte segmentele BA și CD în rapoarte egale între ele.

Se rotesc segmentele BA și CD respectiv în jurul punctelor B și C, pînă ce ajung în pozițiile BA_1 și CD_1, perpendiculare pe BC, dar de o parte și de alta a lui BC. Să se arate că punctele A_1, M și D_1 sînt coliniare. În ce problemă de construcție poate fi utilizată această proprietate?

N. Peligrad, Pitești

E : **2557**. Se dă o prismă exagonală regulată dreaptă $ABCDEF\,A'B'C'D'E'F'$ a cărei arie laterală este 48 cm². Știind că înălțimea prismei este de 4 cm, se cere :

a) unghiul pe care $C'F$ îl face cu planul bazei,

b) proiecția lui CC' pe $C'F$,

c) latura pătratului a cărui arie este egală cu aria totală a prismei.

V. Ancuța, student Pitești

E : **2558**. Lucrînd împreună două echipe de muncitori ar putea să execute o lucrare în 24 de zile. Dacă prima ar lucra singură 4 zile, iar a doua 6 zile, ar executa 20% din lucrare. Să se afle în cît timp ar putea să execute această lucrare fiecare echipă singură.

D. Mîrzan, R. Vîlcea

E : **2559**. O cooperativă agricolă de producție a vîndut Statului grîu în două tranșe. În prima tranșă a vîndut cu 6 tone mai puțin decît jumătate din întreaga cantitate ce produsese, iar în tranșa a doua a vîndut o cantitate egală cu 0,6 din ceea ce vînduse pînă aci, după care mai avea în magazie încă 73,6 tone. Să se afle ce cantitate de grîu a produs această cooperativă agricolă.

D. Mîrzan, profesor R. Vîlcea

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME*

Pînă la 20 mai 1966 s-au mai primit soluții bune de la :

ABRUD. *L. 1* cl. IX Reșa Ioan (2447, 5, 7, 9, 76 ; 7317, 8, 25, 6, 8, 502, 8).

ADAMCLISI — Dobrogea. *L.* cl. VIII Ion Ion (E : 2430, 1, 42, 3, 52, 5, 60, 2, 74).

ADJUD (Bacău). *S. g. 1* cl. VII Băcăneț Paula (E : 2430—2, 4, 8—42, 4, 5), Mega Gh. (E : 2429—32, 4, 8, 41, 2, 5), Petrache Melania (E : 2430—2, 4, 8—42, 4), cl. VIII Capalb Gh. (E : 2430—2, 9, 41, 2, 4, 5, 50, 3, 60, 2), Cucu Adriana (E : 2431, 2, 7—42, 4—7, 50, 2—6, 60, 2, 5—7), Negoiță Doina (E : 2429—2, 4, 5, 8—42, 4—8) Petroiu E ugen (E : 2429—3 4, 5, 8—52, 4—8, 50, 2, 4, 6, 62, 5, 7, 80, 3, 8), *S. g. 2*cl. VII Groza Steluța (E : 2431, 3, 4, 8—42, 52, 6, 64), Zaharia Viorica (E : 2431, 2, 4, 8, 9, 42, 3—5, 61, 5, 7), *L. 1* cl. VIII Petroiu Gelu (E : 2429—32, 4, 5, 8—41, 4—7, 10, 2, 62, 5—7), 80, 3), cl. IX Giovani Georgeta (E : 2444—7, 9, 60—63 ; 7325, 26, 8, 97, 8), Miroslav Gh. (E : 2460—3, 7, 8, 92, 4 ; 7317, 8, 94—6, 8, 9, 527), Oprița Constantin (E : 2446, 60—3, 74, 8 ; 7317, 8, 28, 98, 437 8), Păuș Viorica (2444—7, 80—2 ; 7284, 325—8), Popa Ionel (E : 2444—7, 9, 60, 2, 3 ; 7317, 8, 25, 6, 8), Toderașcu Gh. (2444—9, 61, 2 ; 7325, 6, 8, 98), cl. X Apastu Gh. (7284—8, 95, 300, 9, 325, 6, 8, 413, 18), Berbec Elena (7284, 6—9, 91, 2, 30, 25, 6, 8, 98, 413), Can-

---

Evidențiații sînt scriși cu litere cursive.

teș Gh. (7278. 84—8, 91, 8—301, 8, 20, 3, 3, 5—8, 33, 9, 75, 9, 97, 401, 4, 13, 22), Gheța Toader (7285, 8, 8, 90—2, 300, 25, 6, 7, 79), Gorgan Constantin (7278, 84—7, 9, 91, 5, 6, 300, 25, 6, 8), Grigorescu Doinița (7317, 8, 20, 2, 4, 5, 6, 8, 74, 425, 6, 41, 95, 7), Ignat Jean (7284—8, 90, 1, 9, 300, 1, 314, 7, 8, 20, 2, 3, 5, 77, 9, 87, 97, 8, 423—5, 37, 41, 7), Sava Elena (7284—7, 9, 92, 322, 5, 6, 8, 30, 98).

ADJUD (Bacău) *L. 1* cl. X Stan Costel (7278, 84—7, 9, 91, 5, 8, 300, 26, 8), Vasiloiu Nelu (7317, 8, 20, 2, 3, 5, 8, 77, 9, 424, 5, 37).

AIUD (Cluj). *S. g.* cl. VII Maftei Doina (E : 2431, 2, 4, 8, 9, 42, 4, 5), cl. VIII Moldovan Tiberiu (E : 2430—2, 4, 40, 1, 5, 50, 3, 62), *L.* 1 cl. IX Letiția Tiberiu (E : 2444—6, 8, 60, 2; 7324—8, 85, 97, 9, 430, 1), Țarălungă Geta (E : 2444—8, 60—3, 74, 8; 7325, 6, 8).

ALBA IULIA. *L. 1* cl. X Măgda Mircea (7283—8, 91, 300, 17, 25, 6, 8, 73, 5, 6, 8, 85, 7, 402).

ALBENI-Oltenia *S. g.* cl. VII Belega Viorica (E : 2431, 2, 8, 9, 41, 2, 4, 50, 3—5, 60, 2), Burlan Elena (E : 2432, 8, 9, 41, 2, 53, 5, 60, 2).

ANINA (Banat). *L. 1* cl. IX Kalitzky Cornelia (E : 2449, 60, 1, 72, 4, 7, 8; 7317, 8, 25, 6, 8), cl. X Epure Ioana (7286, 7, 92, 300, 20, 3, 5, 6, 8, 72, 3, 7, 9, 91).

ANINOASA. *S. g.* cl. VII Stanca Constantin (E : 2429—32, 8, 9, 41, 2).

ARAD. *S. g. 14* cl. VIII Stoinescu Grigore (E : 2440, 2, 6, 7, 62, 71, 2, 7), *L. 1* cl. IX Albulescu Brad (E : 2444—9, 62, 72; 7325, 6, 8, 85), Bora Corneliu (E : 2444—7, 9, 60—2; 7316, 25, 6, 8), Boroneanț Constanța (E : 2444, 5, 7, 9, 60—3, 77, 8; 7325, 6, 8), Boșcaiu Voicu (E : 2460—3; 7324—8, 382, 5, 97, 9, 402), Bulzan Emiliu (2445—7, 9, 60—2, 76, 7; 7325, 6, 8), Butar Moise (E : 2444—7, 60, 62, 44, 7318, 25, 6, 8, 85), Vap Viorel (E : 2444—7, 9, 60, 2, 3, 74, 7; 7326, 8), Damian Liliana (E : 2445—7, 9, 60, 6, 74, 6, 7; 7325, 6, 8), Drăgan Dan (E : 2447, 60—3, 74, 76—8; 73—8, 28, 85), Ițu Mircea (E : 2444—6, 60, 3, 3, 74, 6, 8; 7326, 85, 99), Nădran Dorin (E : 2460, 3, 74, 6, 7, 9, 92, 4; 7399, 477, 8, 94, 5, 502), Novac Mărioara (E : 2445—8, 60—2, 73, 6—8; 7325, 6, 8), Stroescu Dan (E : 2444—7, 9, 60, 2, 74, 7; 7318, 25, 6, 8, 85), Valea Emilian (E : 2460—3, 74, 6—8; 7318, 25, 85, 99), cl. X *Befea Dan* (7313, 4, 7, 8, 20, 3, 5—8, 30, 3—5, 7, 9, 60, 4, 73, 5—9, 82, 5, 7, 8, 91—3, 7, 423—6, 8, 32, 7), *Bola Ioan* (7113, 4, 7, 8, 20—8, 30—5, 7—9, 41, 51, 60, 4, 71—8, 82, 5, 7, 91, 5, 402, 4), Chirilă Florea (7317, 8, 20, 2, 3, 5—8, 60, 4, 72, 3—5, 7, 9, 423, 5, 6, 37, 8, 90, 1, 4, 5), Kuligovschy Ienț (7314, 7, 8, 20—3, 5, 6, 8, 35, 87, 402), Lucuță Petru (7312—4, 7, 8, 20—8, 30, 2, 3, 5, 7—9, 45, 51), Neamțu Sorin (7357, 8, 20, 5, 6, 8, 35, 494—7, 9, 500), Pehovici Ionel (7318, 20, 3, 5, 8, 77, 423—5, 90, 5, 7, 9), Savick L. (7314, 7, 8, 20, 3, 5, 6, 35, 7, 82, 5, 7), Morariu Eugen (7266, 82, 7, 9, 318, 20, 6, 7, 30, 74, 7, 82—4), cl. XI Onceanu Pavel (7318, 20, 6, 8, 30, 2, 73, 7, 9, 86, 91, 413, 23, 5), L. 2. cl. VI Poelea Delia (E : 242, 32, 41, 4, 53, 5, 66, 7), Zabb Mia (E : 2429, 44, 53—5, 65—7), cl. IX Lagsaghi Lucian (E : 2426, 8, 45—7; 7284, 5, 7, 317, 8, 26, 8), *L. 3* cl. IX Cartoșan Iancu (E : 2428, 44—7, 9, 61, 2; 7284, 6, 328), Hălmăgean Claudia (E : 2446, 7, 60—3, 72, 5, 8; 7326, 6, 8), Kiss Elena (E : 2445—7, 9, 61—3, 74, 7, 8; 7352, 6, 8), *L. 4* cl. IX Franz Adalbert (E : 2444—9, 60—2; 7325, 6, 8), Hirsch Ladislau (E : 2444—8, 60—2, 74; 7325, 6, 8), Hornoiu Titus (E : 2444—7, 9, 60, 2, 74, 7, 8, 19, 4; 7325, 6, 9, 475), cl. X Kerner Adalbert (7284—7, 90, 3, 9, 300, 26, 8, 37, 8), cl. XI Berger Henrieta (7278, 82, 4—8, 303, 4, 20, 6, 8, 39, 43, 5, 64, 72, 3, 7, 84, 413), fără freccență cl. IX Kinda Zelma (E : 2445—7, 9, 60, 2, 74, 6—8; 7325, 6, 8, 442), *anul I* profesională Hotăran Petru (E : 2429, 34, 5, 8—41, 8, 50, 2, 3).

AVRIG (Hunedoara) *L. 1* cl. X *Berghelea Vasile* (7272, 8, 3, 9, 90, 314, 20, 1, 35, 9, 32, 66, 72—5, 7, 85, 93, 7—9, 402, 3, 5, 10, 23, 6, 8, 37, 8, 42, 50, 2, 4, 67, 76, 7, 9, 80, 90, 4, 9, 50, 2, 14, 6, 20, 4, 5, 7).

BALA (Oltenia) *S. g.* cl. VIII Crăciun Ilie (232 4, 8, 9, 41, 51, 5, 60, 2).

BACĂU. *S. g.* 4 cl. VIII. Rotaru Adrian (2430, 1, 4, 8, 40, 1, 3, 5—7), *S. g. 5* cl. VII Morguhuis Ionel (2429—32, 4, 8, 9, 41), cl. VIII Măzăreanu Ștefan (2429, 31, 2, 4, 41, 2, 4, 5), Munteanu Radu (2450, 2, 3, 5, 62, 71, 2, 4, 9, 80, 3—5, 8—90), *S. g. 8* cl. VII Andorache Gabriela (2429—31, 4, 44, 5, 50, 2—4), Cîrlan Carmen (2431, 4, 45, 50, 3—5, 61), Cociormei Victor (2429, 31, 4, r45, 50, 2—4), *L. 1* cl. VI Knoll Nina (2432, 8, 9, 41, 2, 40, 3—5), cl. VII Wenger David (2429—32, 4, 8, 40, 5), cl. IX Amarghioalei Gelu (2444—7, 60, 2, 3, 7184, 5, 7, 8, 321, 5, 6, 8), Knoll Frady (2449, 60—3, 7318, 21, 5, 6, 85, 9, 401), Knoll Raul (2449, 50—3; 7317, 8, 21, 4, 6, 8, 85, 99), Mazilu Viorel (2444—7, 8, 62, 74, 5, 7, 8; 7325, 6), Sofronie Gh. (2445, 9, 60—3, 76; 7326, 8, 85, 437, 44), cl. X Tarălungă Lucian (7313, 4, 7, 8, 20—3, 5, 6, 8, 494), cl. XI Andrei Nicolae (7317, 8, 20, 6, 8, 9, 72, 5, 7—9, 95, 423, 4, 30), *L. 2* Popovici Magda (7317, 8, 20, 72, 3, 7, 423, 45, 50, 2, 94—6), *L. 3* cl. VIII Giurgian Valeriu (2449—32, 4, 5, 8—42, 4—8, 50—5, 61, 2, 4—70; 7325, 7, 97)

L. 4 cl. X Macovei Costică (7318, 20, 7873, 5, 7, 9, 85, 7, 99, 423, 4, 52), Verdeș Dan (7318, 23, 5, 6, 8, 75, 7, 9, 85, 7, 423, 5, 8, 50), Cristea Dan (2429—31, 51—3, 65—7).

BAIA MARE. Bond Ioan (2440—6, 8), *S. g. 3* cl. VII Horgoș Viorica (2432, 4, 7, 9, 41, 2, 54, 5), Jorza Gh. (2430—2, 4, 8, 9, 41, 4, 50), Martin Alexandru (2432, 4, 8, 9, 41, 2, 4, 55), Rendies Ecaterina (2432, 4, 6, 8, 9, 41, 4, 55), *S. g. 9* cl. VIII Torsin Aurora (2432, 8, 9, 41, 9, 54, 60, 2), *L. 1* cl. IX Srom Maria (2444—9, 60—3; 7325, 6, 8), cl. XII Oprea Alexandru (727, 6, 86, 7, 90—2, 5—7, 9, 300, 9, 17), Pop Vasile (7266, 72, 5, 6, 83, 90, 2, 300, 4, 20, 6, 8, 39, 40, 3), Radu Mircea (7292—8, 90, 2, 9, 301—4, 14, 7, 8, 20, 3, 30) 42, 3, 73, 7), cl. X. Apșan Dan (7331, 8, 9, 91, 402, 16, 8, 24, 37—9, 47, 50, 2—4, N).

BAL[illegible]. *L. 1* cl. IX Lăceanu Ion (2445—9, 63, 74, 6—8; 7325, 97, 401), cl. X Băbuț Gh. (7284, 6—8, 95, 300, 13, 7, 22, 3, 5, 6, 8, 30, 74, 5, 9, 98, 402, 4), Osiceanu Petre (7384, 6—8, 93, 5, 300, 13, 7, 21—3, 5, 6, 8), cl. XI Tudor Nicolae (7312, 4, 7, 8, 20, 2, 3, 39, 56, 64, 66, 72, 3, 5, 7, 83, 4, 7).

BĂBENI (Argeș) *L. 1* cl. VI Muja Gelu (2464—8, 79—82, 9, 8, 9, 91), cl. X Constantinescu Gh. (7282—4, 6—8, 92, 300, 17, 8, 20, 5, 6, 8, 64, 72, 3, 5, 7, 9, 423—5, 37, 32, 80, 4—7, 9). Dicu Constantin (7282—8, 92, 300, 17, 8, 25, 6, 8, 64, 72, 3, 5, 7, 423—5, 37, 50), Roșianu Gh. (7282—8, 92, 300, 17, 8, 25, 6, 8, 64, 72, 3, 5, 7, 423—5, 37, 50, 2, 75, 7—9, 90, 4—7, 9), Gheordurescu Gh. (7318, 20, 5, 6, 8, 64, 75, 7, 9, 423—5, 37, 52), Grigore Alexandru (7317, 8, 20, 3, 64, 6, 72, 3, 5, 7—9, 82, 5, 8, 403, 25, 52, 4), Păloiu Gh. (7318, 20, 5, 6, 8, 64, 75, 7, 9, 423—5, 37, 52).

BĂICOI. *L. 1* cl. VIII Popa Zoglu (2445, 6, 9, 60, 2, 74, 6, 8; 7325, 6, 8), cl. IX Antonescu Dan (2444—7, 60, 2; 7284, 5, 7, 8, 325, 6), Bădărău Gh. (2444—7, 60, 2; 7284, 5, 7, 8, 325, 6), cl. X Andrei Constantin (7317, 8, 20, 3, 5, 6, 8, 77, 9, 404, 11, 7), Ciufu Constantin (7282, 3, 5, 7, 8, 30, 2, 3, 5, 6, 75), Stadler Petre (7320, 3, 6, 75, 7, 9, 42, 6, 52, 77, 95—7).

BĂILE HERCULANE, *s.g.* cl. VII Horescu Alexandrius (2450, 3, 5, 64—7, 83).

BĂLCEȘTI (Oltenia) *L. 1* cl. XI Diaconu Constantin (7263, 83—5, 8, 9, 93, 300, 1, 3, 14, 7, 8, 20, 2, 3, 4, 6, 8, 35, 9, 42, 3, 54, 73, 5, 7, 9, 94, 6), Diaconu Teodor (7317, 8, 22, 64, 73, 5, 7, 9, 84, 95, 411, 4), Landache Lucian (7364, 7, 72, 5, 7—9, 83, 4, 6, 7, 9, 403' 14).

BĂNEASA (Dobrogea), Absolvent Filimon Nicolae (7272, 6, 82—9, 91, 2, 5, 300, 1, 8).

BĂNEȘTI (Cîmpina). *S. g.* cl. VI Stănculescu Neguț (2429, 32, 8, 50, 67, 71, 80, 1, 3, 4, 9).

BĂRBĂTEȘTI (Oltenia). *S. g.* cl. VIII Ciungu Stelian (2450, 2—4, 62, 72, 7, 80, 3—5, 8—92).

BECHET (Oltenia), *L. 1* cl. X Cojocaru Ion (7364, 72—9, 87, 91, 8, 9, 401—7, 17, 8).

BEIUȘ (Crișana) *L. 1* cl. VII Covaci Iosif (2438, 9, 41, 2, 50, 3, 5, 9), cl. VIII Zore Viorica (2440, 6, 52—4, 60, 2, 7, 71, 2).

BEREȘTI (Galați). *L. 1* cl. V Chiuculiță Elena, Simpetru Silvia, Spanacje Nicoleta (2429, 31, 2, 50, 2, 3, 65, 6), cl. IX Constandache Dumitru, David Aurel, Filer Aurel, Sasu Constanța, Ursu Maria (2444—7, 60—3, 77, 8, 73—25, 8, 31), Constantin Veronica, Dică Ion (2444—7, 60—3, 74, 7, 8; 7325).

BISTRIȚA (Cluj) *L. 1* cl. IX Pop Eugen (2444—8, 60, 2; 7317, 21, 5, 6, 8, 82, 5), Suciu Petre (2444—9; 7317, 8, 21, 5, 6, 8), Timofte Corneliu (2474—6, 8, 92, 4; 7423, 75—8, 91, 4—6), cl. X Catie Ioan (7317, 4, 5, 8, 21—3, 5, 6, 8, 30, 5, 9, 72, 5, 8, 82, 5, 7, 97, 9, 402, 6, 23—6, 37, 42, 50, 2, 4), Gagea Alexandru (7314, 9, 21—3, 30, 5, 9, 72, 82, 5, 7, 99, 402), Mreneș M. Teodor (7284—8, 92, 8—31, 17, 8, 22, 3, 8, 6, 8, 34, 5), Vădan Ion (7314, 8, 20—3, 5, 6, 8, 30, 5, 9, 72, 5, 6, 62, 5, 7, 91, 5, 7, 91, 5, 7, 9, 402, 13), cl. XI Fucă Tomescu Sergiu (7312, 4, 5, 7, 8, 30—3, 5, 6, 35, 9, 43), *L. 2.* Crișan Radu (7284—7, 96, 300, 17, 8, 23, 5, 6, 8, 35).

BÎLTANELE (Oltenia) *S. g.* cl. VIII Bigligiu Sabina (2464, 5, 80, 1, 3, 5, 90, 1), Jianu Elena (2464, 5, 7, 8, 71, 2, 90, 1).

BÎRCA (Oltenia). *L. 1* cl. VIII Proca Ștefan (2448, 52, 65, 8, 71, 2, 6; 7318, 8, 30), cl. IX Popa Ștefan (2444—9, 60—3; 7324—6, 8, 30).

BÎRLAD. *L. 1* cl. IX Bîrlan (2445—7, 9, 60, 2, 3, 74; 7325, 6, 8, 438), Copceac Dumitru (2444—7, 9, 60—2, 74, 8; 7325, 42), Tofan Elena (2444—7, 9, 60, 2, 74, 8; 7325, 6, 8, 30, 438), *L. 2* cl. VIII Spînu Dan (2429—32, 4, 9—42, 5—7), cl. IX Costache Victor (2444—8, 62, 7284—7, 326, 8), cl. X Cristea Bogdan (7326, 35, 97, 8, 402, 3, 5, 6, 24, 5, 50, 2, 4), cl. XI Badea Ion (7311, 5, 7—28, 32—5, 7, 9, 41, 3—5, 7, 9, 54, 6, 7, 9, 60, 2, 4, 6, 9, 71—8, 80, 2—4, 7—95, 7, 9, 400, 2, 3, 9, 13, 6, 8, 21, 2), *L. 3* cl. VI. Bichir Ionel (2429—32, 4, 8—42, 4—8), cl. VII Vasiliu (2421—31, 4, 8, 9, 41, 50, 3, 64), cl. VIII Asultanei Mariana (2430—2, 4, 9, 41, 2, 7, 50, 3, 5), cl. IX Rădulescu Mura (2444—7, 9, 60—3; 7325, 6, 8), cl. X Iacomi Mihail (7282—6, 8, 90—2, 6, 317, 20, 3, 5, 8, 39, 66, 75, 7, 99, 402, 6).

BOCȘA (Bañat). *L. 1* cl. VI Brebener Tiberiu (24,38, 9, 41, 8, 53—5), cl. X Iorgaman Gh. (7314, 7, 8, 20, 3, 5, 6, 73, 5, 6—8), *S. prof.* cl. IX Ciolaca Adan (2440—2, 4—9; 7317, 8, 85).

BOLDEȘTI (Ploiești). *S. g. 1* cl. VI Enescu Daniela (2424, 31, 2, 4, 8, 39, 50, 3).

BOLINTINUL DIN VALE (București), *L. 1* cl. X Antonescu Dan (7314, 7, 8, 20, 2, 32, 8, 66, 72, 3, 5, 7, 87, 91, 402, 23, 6, 46, 7, 54), Grigore Nicolae (7317, 8, 26, 9, 39, 48, 64 74, 5, 8, 9, 85, 98, 400, 2, 6, 24, 5, 8, 30, 7, 48, 50, 3, 70, 514).

BOROAIA. *S. g.* cl. VIII Covătaru Mariana, Petrescu Viorica (2482—4, 8—92).

BOTOȘANI. *L. 1* cl. X Goldenberg Daniel (7318, 20, 2, 3, 5, 5, 6, 8, 73, 5, 7, 9, 91, 423—5, 37), *L. 2* cl. VII Fecioru Marian (2430—2, 4, 8, 9, 41, 2, 4, 5, 50, 3).

BOZOVICI (Banat). *S. g.* cl. VIII Pîslea Iulian (2440, 5, 6, 52, 65, 74, 80, 3, 4, 9; 7238), *L. 1* cl. VIII Crașovan Marița (2429—32, 4, 8—41, 4—8; 7326), Piescu Călina (2460, 4—7, 70—2, 4, 5, 7, 8), cl. X Danela Ion (7317, 25, 6, 8, 32, 7, 75, 7, 424, 30, 79, 90, 4, 6, 9), cl. XI Burac Iacob (7278, 82, 3, 6, 7, 9, 300, 1, 3, 18, 20, 5, 6, 8, 32, 5, 7, 9).

BRAD (Hunedoara). *S. g.* cl. VI Kovacs Ligia (2429, 31, 2, 8, 9, 41, 2, 4, 67), Năstăsoiu Elly (2430, 2, 7—9, 41, 2, 5), Pîrva Violeta (2432, 4, 8, 91, 41, 2, 4, 6, 7), cl. VII Spînu Petru (2430—2, 4, 8, 9, 41, 2, 4, 50, 3, 5, 6), cl. VIII Beușan Grigore (2430—2, 4, 8, 9, 41, 4, 50, 2, 62), Morica Ionel (2430, 1, 4, 9, 41, 50, 5, 62, 4—7), Onea Dorin (2431, 2, 4, 9, 41, 2, 62, 4, 5), cl. XI Iabky Alexandru (7320, 2, 3, 32—40, 2, 3, 5, 6, 56, 9, 64, 73—5, 7, 8, 406, 16).

BRAȘOV. *S. g. 2* cl. VII Vlase Sorin (2429—32, 4, 5, 8—42, 4—6), *S. g. 3* cl. VIII Danilescu Florin (2445—7, 60, 2, 74, 6, 7), *S. g. 5* cl. VIII Grama Luciana (2431, 8, 9, 41, 5—7, 9), *S. g.* 6 cl. VI Szido Eva (2429—32, 4, 8—41), cl. VII Silianu Andrei (2429—32, 4, 40, 50, 3, 65, 7), cl. VIII Runceanu Elena (2434—41, 6, 50, 4, 5, 62), cl. VII Pavel Florin (2429, 38, 9, 41, 2, 5, 54, 61, 74), *L. 1* cl. X Batatorescu Anton (7267, 9, 72, 5, 6, 9, 96, 7, 317, 8, 22, 3), *L. 3* cl. IX Coșurba Mihai (2444—7, 9, 62, 3; 7318, 21, 5, 6, 8), Pitiș Nicolae (2425—8, 44—7, 7284, 8, 325, 6, 8), Slușaru Ileana (2444—6, 9, 62, 3; 7318, 21, 5, 6, 8, 85), *L. 4* cl. V. Boamfă Ion (2429—32, 4, 45, 53, 64), Ivanovici Dan (2429—32, 4, 45, 53, 64), cl. VI Dițescu Dan (2430—2, 4, 9, 40, 5, 50, 1, 3—5, 61, 4—70, 2), cl. VII Bocanu Mihaela (2420—32, 4, 8, 40, 2, 5), Butnaru Mihaela (2432, 40, 50, 1, 65, 7, 85, 9), Constantinescu Silvia (2450, 3, 65—8, 83, 5, 90), Gaș Patricia (2429—32, 4, 40, 2, 5), Mănărta Ileana (2429, 32, 4, 8, 42, 53, 5, 67), Mircea Emil (2430—2, 4, 9, 40, 2, 5), Nistor Andrei 2429—32, 4, 9, 41, 5, 50, 5, 61, 4—9, 72, 84), Paraschiv Camelia (2438, 40, 61, 5, 7, 8, 72, 83, 9), Popovici Elena (2429—32, 4, 40, 2, 50, 1, 67) Paremschi Aniuța (2429—3, 4, 40, 5, 50, 67), cl. VIII Barbu Gabriela (2440, 2, 4, 6, 50, 2, 3, 5, 60, 2, 4, 5, 7, 8, 71, 2, 4, 5, 9—35, 8—91), Bătrînu Niculina (2450, 3—5, 60, 2, 71, 8), Grigoraș Dumitru (2431, 2, 4, 8, 9—42, 5, 6, 60, 65, 71, 2, 5, 8, 83, 5, 90), Grigoraș Viorica (2464, 78, 83, 4, 8, 9, 90, 2), Nedelcu Eugenia (2450, 5, 62, 71, 8, 83, 8, 92), Olteanu Valentina (2439—41, 4—7, 50, 2—5, 60), Velican Mircea (2429—32, 4, 40, 4—6, 8), cl. X Cojocaru Daniela (7313, 8, 20, 1, 3, 5, 6, 35, 73, 5, 8, 87, 402, 54), cl. XI Cotora Gh (7317, 8, 21—3, 6, 30, 5, 9, 51, 73, 402), Pitiș Gh. (7263, 4, 6, 71, 6, 8, 82—4, 6, 7, 92, 5, 6, 8—304, 8, 12, 4, 17, 8, 20, 3, 5—8, 30, 5, 9, 40, 2, 3, 5, 7), *S. muzică* cl. VIII Alexandrescu Nicolae (2430, 1, 4, 4—7, 50, 3, 62, 71, 2, 6), cl. IX Varga Andrei (2444—7, 9, 60—3, 76; 7318, 25, 6, 8, 25, 438).

BRANISTEA (București). *S. g.* cl. V Sorici Gh. 2429—32, 50—5) cl. VI Drăgănescu Ion, Ghiulea Florica, Giugiucă Mariana, Vișan Ion (2464—9, 71, 2).

BRĂDEȘTI (Oltenia). *S. g.* cl. VII Bejan Liana (2429, 31, 2, 4, 9, 41, 50, 66).

BRĂILA. *S. g. 2* cl. VIII Bășuță Tudorel (2450, 2—5, 61, 2, 7), Bat Viorica (2435, 8, 9, 41, 5, 54, 5, 62), Jipa Adriana (2431, 2, 4, 8, 9, 41, 5, 55, 62), *S. g.* 4 cl. VIII Ciolac Valeriu (2429—32, 9—41, 5, 6), *S. g. 7* cl. V Nistor Valentin (2464—80, 2, 3), *S. g.* 12 cl. V Ciupercă Viorica (2429—32, 50, 3, 69, 5), Toma Săndica (2429, 31, 2, 50, 1, 64—6), cl. VIII Lăzărescu Lucian (2431, 2, 50, 64, 5, 8, 71, 2, 6), *S. g. 15* cl. VIII Mitu Gh. 2429—32, 4, 9, 40, 50, 3—5, 62), *S. g. 16* cl. V Ciocea Rodica (2429—31, 50, 65, 3, 65, 7; 7325), *S. g. 18* cl. VII Răducu Ion (2430, 2, 4, 8, 64—8, 70—2), Vintilă Tiberiu (2431, 2, 4, 8, 40, 4, 5, 8), *S. g. 22* cl. VI Mărgean Georgeta (2430—2, 4, 8, 9, 41, 2, 50, 1, 4, 5), cl. VII Mihăilescu Cornelia (2430—2, 4, 8, 9, 41, 2, 4, 50, 2—8, 70), Zodilă Fănica (2430—2, 4, 8, 41, 2, 4), Enache Marin (2431, 2, 4, 8—42, 4), Strîmbeanu Ion (2429—31, 4, 9, 40, 5, 6, 50), *L. 3* cl. IX Cărbunaru Mihai (2444—7. 9, 61—3, 74; 7318, 8, 2, 5, 6, 37), cl. X Bucur Camelia (7317, 8, 20—3, 5—8, 73, 85, 7, 99), Climescu Alexandrina (7314, 7, 8, 22, 3, 5, 6, 8, 85, 7, 99, 425), Enciu Dan (7317, 8, 20, 6, 64, 73, 7, 423—5, 52), Nicolescu Gabriel (7314, 8, 8, 20—3, 5—8, 35, 7), Pincu Mia (7317, 8, 20, 1, 3, 6, 75, 7, 99, 425, 52, 4), cl. XI Teodorescu Cristian (7311, 7, 8, 20, 3, 5, 6, 8, 37, 40, 75, 7, 430), L. cl. X Cioroiu Gh. (7317, 8, 22, 3, 5, 6, 8, 75, 7, 9, 423—5, 30), *L. seral* cl. IX Barac Ștefan (2444—9; 7314, 7, 8, 24—8).

BREASTA (Oltenia). *S. g.* cl. VII Ungureanu Victor (2429—31, 4, 9, 41, 50, 3, 62, 4, 7).

BREAZA (Ploieşti). *L. 1* cl. V Bunea Mircea, Duricu Ion, Mureşan Cristian, Olaru Viorel 2430—2, 50, 1, 3, 64, 7), Cucu Luminiţa, David Gabriela, Lămoşanu C., Moise Rodica, Tunet Mihai (2429—32, 51—3, 64, 7), Radu Dan (2429—32, 50, 2, 3, 64), cl. VIII Covalciuc Sorin (2480, 2—5, 8, 90—2, 4), cl. IX Barbu Gheorghe (2445—7, 9, 60—3, 74, 6; 7325, 6, 8), Boncu Simion (2444—7, 9, 60—2, 4; 7284, 5, 8, 325, 6, 8), Colţoiu Constantin (2444—7, 9, 60, 2, 74, 8; 7325, 6, 8), *L. militar* cl. X Andrei Vasile (7314, 7, 8, 20—3, 5, 35, 77, 405, 45, 50), Bălănescu Ion (7371, 8, 22, 5, 6, 32, 66, 72, 3, 7, 8, 424—6, 80—2 2, 94, 5, 7), Blăjan Petru (7314, 7, 22, 3, 5, 6, 8, 32, 3, 5, 7, 42, 64, 72, 3, 82, 97, 400, 2, 6, 23—5, 37, 49, 52), Branca Sorin (7317, 8, 20, 3, 6, 30, 5, 9, 77, 405, 42, 5, 50), Cîrtoaje Vasile (7272, 6, 8, 82—301. 8. 13, 4, 7, 9, 20—30, 2, 3, 5, 8, 9, 42, 7, 51), Cojocaru Gh. (7314, 20, 3, 5, 6, 8, 35, 9, 405, 25, 95), Cornea Marian (7317, 8, 20, 3, 6—8, 35, 74, 405, 45, 50, 2), Drăgan Stan (7357, 8, 20, 3, 5, 6, 8, 35, 9, 51, 405, 25, 95, 6, 9), Gabriloaia Gh. (7314, 8, 20, 3, 33, 5, 73, 7, 405, 23—5, 30, 45, 50, 2, 514), Gurbet Gh. (7314, 8, 20, 1, 3, 5—8, 33, 5, 77, 405, 25, 45, 50, 2), Iermuţan Eugen (7318, 20, 3, 5—8, 35, 42, 7, 72, 5, 8, 423, 5, 30, 47, 53, 4), Iliescu Gh. (7318, 20, 3, 5, 6, 8, 35, 405, 24, 5, 99, 50, 90, 95, 7, 505), Ioniţă Dan (7314, 7, 8, 20, 3, 6, 8, 35, 9, 51, 405, 35, 99), Luca Ioan (7317, 8, 20, 3, 5, 6, 8, 35, 77, 405, 25, 50, 2), Manole Nicolae (7314, 7, 8, 20, 3, 5, 6, 8, 35, 9, 87, 405, 25, 95), Matciu Ştefan (7314, 8, 20, 3, 6—8, 35, 77, 405, 45, 50), Mihai Valeriu (7314, 7, 8, 20, 3, 5, 6, 8, 35, 73, 77, 450), Miloş Ion (7318, 20, 2, 3, 5, 6, 37, 77, 87, 405, 25, 8, 9, 54), Moise Ion (7314, 7, 8, 20, 1, 3, 5, 6, 8, 35, 35, 77, 405, 45, 50, 2), Nedelcu Nicolae (7314, 7, 8, 20, 3, 6, 8, 33, 5, 77, 405, 50, 2), Nicola Octavian (7318, 20, 2, 3, 5, 6, 8, 7, 405, 24, 5, 50, 4, 95, 7, 9, 505), Onrotevi Pompilian (7314, 7, 8, 20, 3, 5, 8, 35, 77, 405, 50, 2), Pete Romulus (7313, 4, 7, 8, 20, 2, 3, 5, 6, 8, 32, 5, 7, 64, 73, 5, 7, 87, 402), Rădulescu Constantin (7318, 20, 3, 5, 6, 8, 39, 405, 24, 5, 95, 9), Scarlat Emil (7314, 7, 20, 13, 5, 8, 35, 6, 9, 51, 405, 25, 95), Scorţan Mihai (7317, 8, 22, 5, 30, 2, 72, 3, 7, 87, 424—6, 38, 49, 54, 78, 80, 2, 4, 95, 7), Stoian Florentina (7313, 20, 2, 3, 6, 8, 35, 405, 24, 5, 90, 5, 6, 9, 505), Sandu Nicolae (7317, 8, 20, 3, 5, 6, 8, 35, 73, 7, 50, 2), Schiopu Laurenţiu (7313, 8, 20, 2, 3, 5, 6, 8, 33, 48, 55, 72, 3, 5, 7, 423, 5), Ştefan Stelian (7314, 7, 8, 20, 1, 3, 5—8, 335, 72, 3, 5, 7, 405, 25,45, 50, 2), Săleanu Constantin (7423—6, 30, 2, 7, 8, 42, 3, 6—50, 2—4, 63, 4, 8, 70, 4), cl. XI, Nenciu Iulian (7318, 20, 3, 7, 8, 30, 3, 5, 9, 42, 55, 75, 7, 97, 409, 16, 8, 22, 54, 70), Puiaru Ion (7283—9, 92, 9, 300, 1, 3, 4, 20, 5, 6, 8, 33, 5, 42, 51, 9, 75).

BROŞTENI (Oltenia). *S. g.* cl. VII Bejan Violeta (2429—32, 4, 8—43).

BUCUREŞTI. *S. g. 1.* cl. VIII Ştefănoiu Călin (2429—32, 4, 8—42, 4—9; 7317, 8, 25, 6, 8, 34), *S. g. 3* cl. VII Iotcu Magdalena (2479—83, 8, 90, 1), Schvefelberg Alexandru (2430, 47, 50, 60, 2—5, 82, 6, 94), *S. g. 4* cl. VI Brădeţeanu Mihaela (2432, 41, 6, 50, 5, 60, 4), Brade Silvian (2430—2, 4, 8, 40, 4, 5), *S. g. 5* cl. VI Cristache Daniela (2431), 2, 4, 9, 41, 2, 50, 3, 4), Lazăr Anca (2420—32, 4, 8, 41, 2), Streja Dan (2430—2, 4, 8, 9, 41, 2), Ştefan Carmen (2431, 2, 4, 8, 41, 2, 54, 5), cl. VII Ţiţeica Ştefania (2429—31, 40, 1, 5, 7, 9), *S. g. 8* cl. VIII Rosner Ştefan (2432, 8, 9, 41, 7, 61, 45, 7, 71, 2), *S. g. 10* cl. V Mărgărit Laurian (2429—32, 4, 50, 3, 64, 5, 7), Mihăilescu Crina (2444—7, 9, 61—3), cl. VI Statovici Mihai (2429—32, 4, 8, 50, 3, 4, 6), Vlăsceanu Marian (2429—31, 4, 8—41, 6, 7, 50, 3, 6), cl. VIII Weintraub Andrei (2429—32, 8—41, 4—6), *S. g. 13* cl. VI Costache Nicolae (2432, 8, 9, 41, 50, 2—4), Badea Olga (2450, 2—5, 61, 5—7, 72), *S. g. 23* cl. VII Dumbrava Bianca (2429, 41, 50, 2—3, 66, 7), Ionescu Gabriela (2450, 2—5, 61, 7, 8, 70, 2), Voiculescu Rodica (2429—31, 4, 50, 3, 71—3), cl. VIII Fotache Emilia (2431, 4, 8—41, 4—6, 55, 60—2), Georgescu Magdalena (2431, 4, 8—42, 5—7), Ghiţoiu Mariana (2429—31, 4, 9—41, 5, 6, 8, 50, 2, 3, 60, 2), Pretoriam Magdalena (2434, 9, 40, 7, 9, 50, 3, 60, 2, 5, 75), *S. g.* 25 Plămădeală Ileana (2429, 31, 53, 64, 5, 7, 79, 81), *S. g. 26* cl. VI Barbu Ştefan (2450, 2, 3, 6, 64—8), *S. g. 30* cl. V Gabrilaş Constantin (2429, 31, 50—3, 64, 5, 7), *S. g. 30* cl. V. Şerban Sorinel (2429—31, 50, 64—7), cl. VIII Boblingher Florentina (2460, 2, 74, 88—92), *S. g. 41* cl. VIII Sandu Iulian (2430, 2, 4, 40, 4, 53, 62, 70, 1), *S. g. 50* cl. VII Ianuş Gh. (2445—50, 2—6, 60—5, 7, 8, 71—3, 6—8, 80—5, 8—92, 4; 7494—6), *S. g. 56* cl. VIII Manciu Adrian (2429—32, 4, 8—42, 5—9), *S. g. 103* cl. VIII Marinescu Viorel (2430, 1, 4, 40, 1, 4—6), *S. g. 111* cl. VII Seculea Anda (2430, 1, 4, 44, 5, 50, 65, 7), *S. g. 121* cl. VIII Donescu Florin (E: 2454, 5, 7, 9—63, 8—77, 83, 4), *S. g. 122* cl. VI Blitzstein Emilia (2452, 3, 5, 6, 64—7, 70), cl. VII Brătescu Anca (2439, 64, 5, 7—73, 6, 7), *S. g. 128* cl. V Rogobeta Nicoleta (2428, 30, 2, 4, 5, 8, 44, 6), cl. VI Matei Cornel (2429, 30, 2, 4, 8, 41, 2, 4), Popa Mihaela (2430, 1, 4, 9—4, 53), *S. g. 145* cl. VII Comana Mariana (2448, 56, 64—75, 7), Dinculiţă Victor (2430, 1, 4, 38, 9, 41, 2, 5), Dumitrache Eiger (2447, 50, 3—5, 64, 5, 7, 8, 73, 6), Grămescu Anca (2430—2, 41, 2, 64, 8, 72), Mihai Leonard (2429, 31, 2, 4, 5, 8, 41, 2, 4, 5, 7, 73), cl. VIII Gîcu Marian (2432, 8, 41, 53, 64, 5, 8, 8, 80, 2, 5), Stoica Silvia (2429, 31, 2, 4, 8—40, 2, 6, 60, 2, 74), *S. g.*

146 cl. VIII Bădescu Smaranda (2429—32, 4, 8—42, 4—6, 9; 7317, 8, 22, 5), Dumitrescu Călin (2429, 31, 2, 4, 40—2, 4—6, 7), Petrescu Gheorghe (2430, 1, 8, 9, 41, 2, 5—7), Zaharescu Sorin (2471, 3, 4, 83, 4, 9—2), *S. g.* 164 cl. VI Ţăranu Daniela (2441, 5—7, 9, 50, 3—5, 61—3), Vasilescu Paula (2431, 2, 8, 9, 41, 2, 54, 5), *S. g. 166* cl. VII Cernescu Gabriela (2440, 5, 6, 8, 50 — 6), *S. g. 169* cl. VII Hilo Mihaela 2429 — 31, 4, 5, 8, 9, 41, 2, 4—6), Hoisescu Nicolae (2429—32, 4, 5, 8, 9, 41, 4—7), *S. g. 173* cl. VI Andreievici Bogdan 2429—32 4, 9, 41, 2, 4—6), *S. g. 189* cl. VIII Domini Sotirescu (2460—2, 74—8° 7397, 9), *S. g. V. Alecsandri*)Ionescu Daniel (2444—6, 50—5, 7, 61), *L. 1 N. Bălcescu* cl. IX Bochez Liliana (2445—7, 9, 60, 2, 74, 8, 7321, 6, 8, 418), Oprea Elena (2425, 6, 8, 44—7; 7386, 7, 318, 25ℓ 6), Zielinski Maximilian (2445, 6, 9, 62, 76; 7318, 21, 5, 6, 8, 39, 85), cl. X Corf Victor (7314, 5, 7, 8, 22, 3, 5, 6, 8, 72, 3, 7, 99, *Georgescu D. Cristian* (119—24, 29—32, 8220—6, 334, 5, 7, 42, 73—8, 82. 5, 7, 91, 5, 9, 400) *Georgescu Michael* (7312—4, 7, 8, 20—23, 5, 6, 8, 32—5, 7, 9, 42, 64, 73—5, 7, 8, 82, 5, 7, 91, 2, 9, 404, 9, 10, 13, 8, 23—5, 8, 54, 3, 4, 74), Mireanu Mihaela (7312, 4, 8, 20, 3, 5, 6, 8, 32, 4, 7, 9, 42, 64, 77, 82, 5, 7, 91—3, 404, 5, 9, 10, 8, 23, 5, 74). Sbîrnea Mihai (7313, 4, 7, 8, 20—8, 30, 2, 3, 5, 7, 42, 7, 9, 51), Şerbănescu Marius (7313, 4, 7, 8, 20—3, 5, 6, 8, 35, 7), Teişanu Cornel (7313, 4, 20—2, 34, 7, 66, 72—5, 7, 99, 402, 25), *L. 2* T. Vladimirescu cl. XI Nicolae Dan (7318, 26, 8, 35, 56, 64, 72, 6, 8, 72, 3, 7, 84, 5, 91, 418), *L. 5* cl. XVI Babrim Mihaela (2429—31, 4, 8—41, 53, 9), Banu Radu (2464—8, 79—84), Chitic Cătălina (2429—32, 4, 5, 8, 41, 2), Dumitrescu Gabriela (2429—31, 4, 8, 9, 50, 2, 3), cl. VII Manicatide Ioana (2432, 8—42, 4, 5, 54, 6, 71, 2), cl. VIII Burileanu Alexandru (2431, 8, 9, 41, 6, 54, 5, 62), *L. 6* cl. VIII Weiner Irina (2429—32, 4, 8, 40—2, 5—9, cl. XI Frăţilă E. (7311—3, 5—8, 20, 3, 5, 6, 8, 33, 43, 59, 60, 72—4, 6—9, 83, 4, 6, 9, 90, 5, 8, 403, 12, 3, 23, 5, 30, 52), *L. 7* cl. VIII Agent Dan (2429—2, 4, 8—41, 4, 6, 7), Lev Tatiana (2430, 8, 9, 41, 55, 60, 2, 3, 74, 5), Niculescu Irina (2430—2, 4, 5, 7—47, 9), Redlinger Daria (2429—32, 4—49), cl. IX Blagoiev Branislava (2444—7, 9, 60—3, 74, 8; 7318, 25, 6, 8, 98, 437, 41) Taler Adriana (2445—9, 60, 2, 3, 74, 8; 7317, 8, 25, 6, 8, 98), cl. X George Ion (7320, 3, 5—8, 42, 7, 52, 60, 4, 72—9, 85, 91, 5, 402, 5, 8, 73, 23, 5, 32, 51, 2, 64, 8—70), *L. 8* cl. VI Adler Tamara (2430—1, 8, 9, 41, 3, 4—6), Cazimirski Anca (2430—2, 9—42, 4, 6), Comstantinescu Dan (2429—32, 4, 8, 9, 41, 2, 4), Dincă Adrian (2420—31, 4, 8, 9, 41, 2, 4), Dumitrescu Florin 2420—32, 4, 8, 9, 41, 2), Feram Cristian (2429, 30, 4, 8, 9, 41, 2, 4, 6), Ionescu Mihnea (2430—2, 8, 9, 41, 2, 4, 5, 8), Marmazin Bogdan (2421—21, 4, 8, 9, 41, 4—6, 8). cl. VII Ionescu Mihai (2429—32, 4, 40—2, 8), Sacerdăţeanu Dan (2449—31, 4, 8, 44—6), cl. IX Leonte Silvia (2444—9; 7314, 8, 21, 5, 6, 8), Montanu Dana (2444—8; 7314, 8, 21, 5, 6, 8, 30), Tacu Dana (2445—7, 9, 60, 1; 7314, 8, 21, 5, 6, 8), cl. XI Leroy Roger (7312, 4, 7, 20, 2, 3, 5, 6, 30, 5, 77, 83, 4). Toma Mihai (7314, 7, 8, 20, 7, 30, 5, 7, 9, 40, 2), *L. 10* cl. VI Angheluţa Marcel (2432, 4, 8—42, 53, 5, 64), cl. VII Gafiţa Gabriel (2429, 31, 2, 4, 8—42, 4, 5, 50, 1, 3, 5, 64, 7317), *L. 11* cl. IX Constantinescu Dan (2444, 60, 1, 74, 5, 7, 8; 7317, 8, 82, 5, 98), Petrescu Corneliu (2444—9, 62; 7317, 8, 25, 6, 8, 9), Tudor Mauriciu (2444, 8, 61—3, 78; 7318, 21, 2, 5, 6, 8, 99), cl. X Dănilă Valentin (7317, 8, 20, 3, 6, 8, 75, 7, 425, 79—81), Leţu Sanda (7323, 5—8, 33—5, 7, 72, 5, 7, 9, 98, 9, 402, 6), *L. 12* cl. V Marinescu Cristina (2429—32, 53, 64—6), Popa Veronica (2420—32, 50, 2, 3, 64), Preda Monica (2429—32, 50, 2, 3, 64), Vinter Adina (2429—32, 50, 3, 64, 5), cl. VI Chiriban Oartemie (2429—32, 4, 9, 41, 2), Rizescu Marieta (2445, 50, 2—6, 83), cl. VII Stăncioiu Sorin (2434, 41, 50, 65, 7, 71—3), cl. IX Abedeanu Sanda (2444—7, 9, 62; 7325, 6, 8, 30, 7, 85), cl. X *Bărcănescu Şerban* (7356, 8—60, 2, 4, 6, 71—80, 7, 91, 5, 6, 7, 9, 400, 2, 3, 7—10, 3, 6—8, 20, 2—6, 30, 2, 7, 8, 41—4, 6, 7, 9, 50, 2—4, 60, 3, 4, 6), *Rales*Eu *Dan* (7219, 63, 7—9, 61, 9, 81, 5, 8, 9, 92, 3, 6, 9, 203, 4, 10, 1, 3, 4, 6—29, 32, 4, 5, 9, 40, 2, 3, 6, 9—53, 7, 62—4, 78—305, 8, P.N. Rogalski Mircea (7312—4, 7, 8, 20—3, 5—8, 30, 1, 3, 5, 9, 42), *L. 13* cl. IX Blitz Andrei (2445—7, 9, 61, 2, 78, 92, 4; 7325, 6, 8), cl. X *Petrescu Andrei* (7312—4, 7, 8, 20—3, 5—31, 3, 5, 7—9, 51, 66, 71—4, 5, 7—9, 98, 9, 402, 3, 5, 23, 6, 32, 7, 44, 8, 5, 2, 4), cl. XI Badiu D. Octav (7311, 2, 4—8, 20, 3, 5, 6, 8, 37, 42, 3, 51, 4), Capră Livia (7313, 4, 7, 8, 20—3, 9, 66, 77, 82, 5), Popescu Lucian (7311, 2, 20, 2, 6, 7, 8, 33, 8, 51, 66, 72, 3, 5), Stoenescu Vladimir (7312, 4, 21—3, 7—30, 8, 9, 72, 3, 5, 9, 99, 402, 3, 5, 24—6, 37, 48, 50), *L. 15* cl. V Cernica Ruxandra (2429—32, 4, 8, 9, 41, 2, 4, 5), cl. VI Dan G. Liliana (2432, 4, 9, 41, 2, 4, 5, 54), Ionescu Adriana (2432, 8, 9, 41, 4, 54, 5), Stredie Aurora (2432, 4, 9, 41, 2, 4, 54, 54, 5), cl. IX Antonescu Bogdan (2445—9, 60—3; 7325, 6, 8), cl. X Dincă Ştefan (7314, 7, 8 20, 2, 3, 33, 5, 9, 47, 51, 62, 62, 75, 7, 8, 87, 91—3, 402, 9, 16, 9), cl. XI Vutescu Gabi (7311, 4, 7, 8, 20, 3, 5, 6, 8, 39, 43, 72—4, 6, 7), *L. 16 seral* cl. VIII Drăguşin Alex. (2430, 2, 9—48; 7325, 8, 35), *L. 17* cl. IX Roman Cornel (2446, 7, 62; 7313, 4, 7, 8, 21, 5, 24, 51, 97, 9), L. 18 cl. X Gheorghiu Radu (7371—3, 5, 7, 82, 5, 7, 99, 424, 5, 8, 30, 52, 4), Musceleanu Ion (7312, 6, 21—4, 33, 7, 47, 56, 9, 76, 8, 83, 4, 8, 90, 5, 402, 24, 5, 50), Scheian D. Alexandru (7314, 7, 8, 20—6, 8, 30, 3, 5, 8, 9), *L. 19* cl. X Barbu Dorin (7314, 7, 9, 20,

2, 3, 33, 5, 64, 6, 72, 402), *L. 21* cl. X Bercaru Roxana (7317, 8, 22, 3, 33, 5, 64, 72—5, 405), Voiculescu Dan (7235, 46, 86, 7, 8, 305, 7—10, 31, P. N), *L. 22* cl. IX Atanasiu Dragu (2444, 94; 7312, 4, 7, 8, 21—3, 5—7, 35), Roşca Dan (7371, 3, 5—9, 423—6, 32, 52, 67), Strene Alex. 7311, 8, 22, 3, 5, 6, 8, 30, 66, 74, 5, 9, 437, 52), cl. XI Georgescu Mihai (7311, 21, 3, 4, 7, 8, 33, 7, 48, 51, 6, 9, 60, 7, 72, 5, 7, 8, 82, 5, 6, 95), Merlan Mihai (7312, 5—8, 23—6, 8, 42, 51), *L. 23* cl. IX Gavrebiţeanu Lucian (2444—7, 9, 61, 2, 74, 7318, 8, 26, 8, 85), cl. XI Zaharia Dragoş (7311—4, 7, 8, 20, 5—8, 35, 9, 40), *L. 24* cl. VI Alexandrescu Silvia (2429—32, 4, 8, 40—2, 4), Herescu Rodica (2429—32, 4, 8—42, 5), cl. VIII Frişov Puşa (2432, 4, 8—40, 4, 5, 53, 4, 60, 2, 75), Onescu Dorina (2431, 2, 8—9, 41, 2, 60, 5, 71, 2), *L. 26* cl. X Cotariu Roland (7318, 20—3, 5—7, 33, 5, 75, 7, 87), *L. 17*, cl. VII Teodorescu Luiza (2431, 8, 9, 41, 50, 3—5, 67, 73, 4), *L. 28* cl. VIII Arsene Vladimir (2430—2, 9—42, 6), Chira Florentina (2450, 2, 4, 5, 62, 71, 2, 83, 90), Stroe Marian (2429—32, 4, 6, 8—42, 5—9; 7325, 6, 8), cl. X Derera Dan (7314, 7, 8, 20, 2, 3, 45, 7, 62, 423—5, 32, 52), Teodorescu Daniela (7314, 7, 8, w20, 2, 3, 33—5, 7, 402, 5, 53), Vişinescu Dan (7314, 7, 8, 20, 2—5, 7, 72, 423—5, 32, 52), *L. 30* cl. VIII Mitan Eugenia (2438, 41, 4, 57, 9—62), *L. 32* cl. VII Celenti Dan (2450, 2—6, 60—2), Popovici Liviu (2429—34, 6—9, 41—5), Săndoiu Mihai (2430—2, 4, 8—42, 4, 5, 7325, 8), *L. 33*, cl. VI Petcu Lucian (2429, 31, 4, 9, 41, 50, 5, 65, 8), cl. VII Niţa Mariana (2450—5, 64, 6—8, 70—2, 4, 5), cl. XI Mitrescu Vasile (7314, 20, 3, 8, 42, 59, 60, 72, 9, 91, 424, 5), *L. 34* cl. VI Popeniciu Liviu (2429—31, 4, 8, 9, 41, 55), Enache Roxana (2413, 28, 38, 41, 53, 5, 6, 61), *L. 37* cl. X Biro Leonida (7314, 7, 8, 23, 73, 400, 23—5, 37, 50, 2, 4), Dobre Elena (7317, 8, 20, 3, 6, 8, 35, 79, 429, 37, 52, 96), Duţică Elisabeta (7318, 20, 3, 5, 6, 8, 35, 79, 437, 52, 96, 505, 9), Gheţu Maria (7317, 8, 20, 3, 5, 6, 8, 75, 9, 425, 37, 52, 96, 505), Iordan Constanţa (7318, 20, 3, 5, 6, 8, 75, 7, 9, 425, 37, 52), Ionescu Victoria (7317, 8, 20, 2, 3, 5, 6, 8, 51, 77, 9, 425), Kalisz Eugenia (7318, 23, 5, 6, 8, 35, 418, 235, 50, 79, 94) Stan Elena (7314, 7, 8, 20, 3, 5, 6, 8, 35, 77, 9, 87, 425), Ştefănescu Marilena (7314, 8, 20, 2, 3, 5, 8, 35, 6, 8, 35, 77, 9, 425, 50), cl. XI Gheorghe Gh. (7314, 7, 8, 20, 3, 6, 39, 75, 7, 9, 91, 425, 30, 2), Preoteasa Cornel (7312, 4, 7, 8, 20—3, 5, 6, 8, 39, 75, 7, 83, 4, 94, 6), Stancu Nicolae (7311, 4, 8, 20, 1, 3, 39, 40, 5, 55, 68, 75, 7, 9, 83, 4, 6, 90, 1, 4, 6, 412, 3, 22), Surugiu Ioan (7317, 8, 20, 23, 75, 7, 8, 91, 423—5, 7, 8, 30, 2), *S. muzică 2* cl. V Vernescu Despina (2429—32, 4, 50, 2, 3).

BUŞTENI (Ploieşti) *Ş. g. 1* cl. VII Manoşescu Horia (2429, 32, 4, 8, 9, 41, 2, 4), S. p. an I Pîrlog Nicolae (2438, 9, 41, 50, 2, 5, 61, 2).

BUZIAŞ (Banat) *L. 1* cl. V V. Vesztroczy Dittmer (2429—34, 44, 50), Rausch Geidrun (2421—32, 4, 5, 3, 64, 7).

BUSAG (Baia Mare). *Ş. g. 20* cl. VI Cozma Sabin (2431, 9, 54, 5, 65, 7, 84, 9), Pop Gheorghe (232, 9, 55, 65, 7, 84, 9), cl. VII Dragomir Gh. (2465—70, 81, 3, 4, 8, 9), 55, 65, 7, 84, 9), cl. VII Dragomir Gh. (2465—70, 81, 3, 4, 7, 9), cl. VIII Gita Cornel (2442, 5, 6, 52, 4, 5, 60—2, 75, 8, 70).

BUZĂU. *Ş. g. 9* cl. VI Cărbuneanu Constantin (2431, 4, 40—2, 79, 83, 90, 4), *L. 1* cl. VIII Constantinescu Ştefania (2452, 4, 5, 72, 83, 4, 8, 90), Cocaci Alexandru (2431, 2, 4, 8, 9, 41, 2, 53, 61), Croitoru Viorica (2429, 32, 8—41, 4—7, 9, 53, 5, 62, 72), cl. X Andreescu Florin (7314, 7, 8, 21—3, 5, 6, 75, 9, 97, 432), Bobicea Mariana (7314, 7, 8, 20, 2, 3, 5, 6, 8, 35, 75, 7, 87, 403), Ivănescu Anatol (7314, 7, 8, 20—3, 5, 6, 8, 75, 9, 97), Mihăiescu Tiberiu (7317, 8, 20—3, 5, 6, 8, 31, 2, 5, 7, 9, 48), Săraru Aurel (7382, 3, 5, 5—7, 82, 5, 8, 424—6, 8, 37, 42, 52, 4), cl. XI Gheorghe Petre (7317, 8, 20, 3, 5, 6, 8, 35, 42, 62, 72, 3, 5, 7, 83—5, 7, 92, 4, 7, 402), Manea Nicolae (7356—9, 9—62, 4, 6, 7, 72—8, 82—4, 90—2, 4, 5, 7, 402, 3, 5, 9, 14, 8, 21, 2).

CALAFAT. *L. 1* cl. X Pecheanu Nicolae (7314, 7, 8, 20, 2, 3, 5, 6, 8, 33, 5, 6, 72—5, 8, 82, 5, 7, 95, 7, 402), cl. XI Marinescu Marius (7337, 9, 43—5, 409, 11—3, 56, 64, 5, 7).

CARANSEBEŞ. *L. 1* cl. VII Kunz Barbara (2429, 30, 2, 4, 8, 50, 61, 84), Simeria Petru (2430—2, 4, 8, 41, 2, 50, 3, 5), cl. X Brebu Ion (7390, 402, 13, 23, 5, 7, 37, 54, 94—7).

CARAULA (Oltenia) *Ş. g.* cl. VIII Dondonel Victoria (2483, 4, 6—92, 4), Ionică Florica (2483, 6, 92, 4).

CARTOJANI — VIDELE. *Ş. g.* cl. V Cristea Ion (2429—31, 50, 2, 3, 64, 5, 7).

CĂLAN (Hunedoara). *L. 1* cl. VII Bal Corneliu (2429—31, 4, 8, 40—2, 4—7; 7325), cl. IX Anghel Tamara (2444—7, 9, 60, 2, 3, 74; 7325, 6, 8), Oană Marius (2444—7, 60—2, 74, 8; 7325, 6, 8), cl. X. Găşpăreanu Gh. (7313, 4, 7, 8, 20, 2, 3, 5, 6, 8, 35, 5).

CĂLĂRAŞI (Bucureşti) *Ş. g. 1* cl. 6 Nihai Nela (2432, 8, 52, 5, 65, 7, 8, 70), *L. 1* cl. X Miţa Gh. (7317, 8, 20—3, 5, 6, 8, 30, 3, 5), *L. 2* cl. IX Pană Ştefan (2444—7, 60—2, 74, 8; 7325, 6, 8), cl. X Manolache Ion (7317, 8, 20, 2, 3, 5, 8, 30, 2, 3, 5), Mihăescu Teodor (7317, 8, 20, 2, 3, 5, 6, 35, 9, 75, 7, 427, 80, 94, 5, 7).

CEICA (Crişana) *Ş. g.* cl. VII Troie Valeriu (2450—3, 7, 61, 4—8, 70—3, 61, 7397).

CELARU (Oltenia) *Ş. g.* cl. VI Ilie Ilie (2431, 2, 4, 41, 2, 54, 64, 83, 4, 9), Ion Marioara (2431, 2, 4, 8, 41, 2, 64, 81, 4, 9), Tudor Marin (2431, 2, 4, 8, 9, 41, 2, 83, 4), cl. VIII Andrei Carmen (2431, 2, 4, 8, 9, 41, 2, 54, 5, 61, 84, 9), Fănuci Oprica (2432, 4, 8, 9, 41, 2, 54, 84, 9), Tudor Alexandra (2430, 2, 50, 3—5, 83, 4, 9).

CERNA (Dobrogea) *L. 1* cl. X Grigore Dumitru (7313, 73, 17, 8, 23, 5, 6, 60, 79, 96, 403, 23, 5, 404).

CERNAVODA (Dobrogea) *Ş. g.* cl. VIII Isăroiu Luminiţa (2434, 9, 54, 60—13, 8).

CHICHISA (Cluj). *Ş. g.* cl. VI Olar Pop Maria (2429, 31, 2, 4, 5, 8, 4,1, 4).

CHIPEREŞTI. *Ş. g.* cl. VII Sandu Cezar (2429—32, 4, 50, 3—6).

CHIŞINEU CRIŞ. *Ş. g.* cl. VI Secui Lucia (2432, 8, 9, 41—3, 54, 5).

CIOCÎRLIA (Bucureşti) *Ş. g.* cl. VII Voloianu Angela (2429—32, 4, 8—42, 4, 5, 8).

CÎLNIC (Oltenia). *Ş. g.* cl. VII Draica Adrian (2429—31, 4, 50, 3, 64, 6—8), Lăudat Nicolaei (2430—3, 4, 8—41, 50, 3, 6, 66, 7).

CÎMPENI (Cluj). *L. 1* cl. IX Mucea Ioan (2460—3, 76; 7314, 7, 22, 7, 82, 5, 97—9, 402, 37).

CÎMPIA TURZII. *Ş. g. 4* cl. VII Fetiţa Alexandru (2432, 8, 9, 42, 55, 67, 73, 84, 9), Nemeş Dan (2432, 4, 8, 9, 41, 2, 5, 4, 67, 73, 84, 9), Nagy Emil (2432, 4, 8, 9, 41, 2, 5, 3, 5, 67, 73), Santei Petru (2431, 2, 4, 8, 9, 41, 5, 54, 5, 84), *L. 3* cl. VIII Parduţiu Mircea (2429—32, 4, 40, 4—7), Romaşcanu Emil (2430, 1, 4, 8—40, 2, 4—7, 9, 50, 2, 3, 61, 2, 5, 7, 8, 71), cl. X Teoader Iosif (7313, 4, 20—3, 5, 6, 8, 9, 33, 5, 9, 45).

CÎMPINA (Ploieşti) *L. 1* cl. IX Albu Elena (2460—2, 74, 5, 7, 8, 92, 4; 3477, 8, 94), Ciucă Gh. (2428, 44—7, 62; 7318, 21, 4, 6, 8, 85), Ghingold Mariana (2444—7, 9, 60, 2, 74, 8; 7325, 6 , 8), Tudor Ion (2444—7, 60, 2, 75, 94; 7325, 8, 97, 477, 8), Vlad Lucian (2444—7, 9, 70—3, 78; 7325, 6, 8), cl. X Alexandru Doru (7313, 5, 7, 8, 20—3, 5—8, 30, 3, 5, 7—9, 47, 51), Andrei Gh. (7320, 2, 35, 72—5, 97, 423—5, 30, 7, 41, 50, 2, 4, 75, 7, 82, 3, 90, 4—7, 9), Catrina Vasilica (7318, 23, 5, 6, 8, 72, 5, 7, 97, 9, 437, 52), Dumitru Rodica (2317, 8, 22, 3, 5—8, 423—5, 52, 73), Franga Elema (7317, 8, 23, 5, 6, 8, 72, 5, 7, 9, 425, 37, 52), Iosif Ion (7321, 6, 72, 97, 1, 403, 23, 5, 6, 30, 7, 50, 2), Văcăroiu Ioana (7320, 35, 73, 4, 7, 9, 423—6, 37, 41, 4, 6, 50, 2), *L. 2* cl. X Cosmineanu Vasile (7318, 20, 1, 3, 6, 8, 75, 7, 9, 87, 423—5, 32).

CÎMPULUNG MOLDOVENESC. *Ş. g. 3* L. Pavel (2430—2, 4, 40, 4—6), cl. VII Rusu Cărduneanu (2429—31, 4, 8, 9, 41, 6), L. militar cl. X (Ababei Mihai (7320, 2, 30, 5, 66, 73, 5, 7, 9, 85, 7, 423—5, 8), Balaban Mihail (7318, 20, 3, 5—7, 73, 7, 9, 91, 423, 5), Constantinescu Gh. (7317, 8, 20, 2, 3, 5—7, 74, 7, 9, 91, 423—5), Hartonie Stelian (7317, 8, 20, 2, 3, 5, 6, 8, 73, 7, 9, 91, 423—5), Rusu Mihai (7360, 72—5, 7, 9, 98, 1, 402, 3, 5), Sofronie Corneliu (7322, 3, 5, 6, 8, 35, 9, 75, 454, 77, 94), Ţăranu Gh. (7317, 8, 20, 3, 5, 6, 8, 75, 7, 9, 92, 423, 37, 77), Văideanu Costică (7317, 8, 20, 3, 5, 6, 8, 73, 7, 9, 91, 9, 423—5, 38, 52, 77—80, 4—7, 9, 505, 27).

CÎMPULUNG MUSCEL. *Ş. g. 2* cl. VII Tudose Florin (2421—32, 4, 8—41), *L. 1* cl. IX Ivanovici Dprin (2479—81, 4—5, 8—94, cl. X Hurdubeţu Sorin (7317, 4, 7, 9, 21, 3, 5, 33, 5, 9, 424, 6, 52, 4, 76—80, 90, 3—6, 9), *L. 2* cl. X Iacob Aurel (7317, 8, 202, 8, 33, 74, 402, 4, 6, 24, 6, 47, 8, 50, 2, 4).

CLUJ. *Ş. g. 2* cl. VIII Comănescu Sorin (2429—32, 4, 5, 8—49), *Ş. g. 3* cl. VI Murariu Mihaela (2431, 2, 4, 8, 9, 45, 4, 5, 8), *Ş. g. 7* cl. VII Zglobin Nicolae (2431, 2, 4, 8—41, 4, 5), *Ş. g. 14* cl. VII (Cădălean Alexandru (2429, 30, 2, 4, 8, 9, 41, 50—3), L. M. Eminescu 2 cl. VIII Ghidel Dan (2421—31, 4, 40, 4—7, 91), *Ş. g. G. Coşbuc* cl. VI Băjănică Stela (2438, 41, 6, 8, 50, 3, 4, 67, 8), Petcu Romana (2432, 8, 9, 41, 52, 67, 8, 70), *Ş. g. E. Racoviţă* cl. V 3herciu Alin (2429—32, (2429—32, 50, 3, 64—7), Constantinescu Cristina (2431, 2, 3, 8, 50, 3, 64—7), Dragoş Fulvius (2429—32, 4, 8, 54, 64—7), Pană Teodor (2429, 31, 3, 44, 6, 50, 3, 65), cl. VI Şerban Monica (2464—6, 79, 80, 2, 4, 6), Tecşa Ileana (2429—32, 8, 41, 4, 64—5, 7), cl. VII Şurtea Monica (2432, 4, 9, 41, 2, 4, 50, 80, 3), cl. VIII Cena Mircea (2430—2, 4, 9—42, 4, 6, 9), Goga N. (2430—2, 4, 45, 50, 2, 3, 5, 60—2), *L. 5* cl. VI Roşcău Manuela (2429—31, 4, 44—6, 8), Silaşi Constantin (2429—32, 4, 8, 9, 41), cl. VII Iancic Bubu (2445, 50, 6, 65, 7, 71, 2; 7325), cl. X Grigore Cornel (7314, 8, 22, 3, 5, 35, 60, 73—5, 7, 85, 92, 400, 2), *L. 7* cl. VIII Geltc Elisabeta (2431, 2, 8—41, 5, 50, 3, 64, 6, 7, 8, 78), *L. 8* cl. V Mureşan Diana (2429—32, 4, 53, 64, 5), cl. VI Borda Adrian (2430—1, 4, 8, 9, 41, 3, 4), Moima Dan (2432, 8, 9, 41, 2, 54, 5, 70), Samfir F. Manuela (2430—2, 41, 50, 3—5), Stamate Mircea (2429—31, 4, 42, 4, 50, 2, 64), cl. VII Moldovan Mircea (2434, 8, 9, 41—4, 55), Toth Vasile (2430, 1, 4, 9, 50, 2, 3, 67), cl. VIII Coldea Adrian (2429—32, 4, 8—42, 4—9, 54, 5, 7, 60, 23; 7325, 8), Meseşan Minodora (2452, 62, 80, 1, 3, 4, 8, 90), Moina Ioan (2432, 8, 9, 41, 2, 54, 5, 62), Niciu Monica (2431, 50, 5, 60, 2, 8, 71, 2), Popovici Dorin (2432, 8, 9, 41, 2, 4, 55, 62), Voroneanu Gh. 2462, 8, 71, 2, 4, 83, 8, 96), cl. X Bortoş Andrei (7314, 7, 8,

20, 2, 5, 6, 8, 77, 9, 87, 99), Lazăr Aurel (7312—4, 20, 1, 4, 33, 5, 7, 77, 98—400), *L. 10* cl. VI Mişan Ioan (2431, 2, 4, 8, 9, 42, 50, 3, 5), *L. 11* Gufort Maria (2429—32, 6, 8, 41, 2), cl. VII Csehi Vera (2429—32, 4, 9—41, 4, 5), Sagyeba Ladislau (2430, 2, 4, 8, 9, 41, 2), cl. IX Csetri Klara (2444—9; 7313, 4, 7, 8, 21, 4, 6, 8, 51), Halmos Catalin (2444—8; 7313, 21, 4—8), cl. X Méder Akos (7313, 7, 8, 20—3, 5—8, 33, 5, 7, 51), Szasz Unige (7314, 7, 8, 20, 2—8, 33, 5, 7, 51), *L. 12* cl. X Vitcă Gavril (7313, 4, 8, 20, 2, 3, 5, 33, 5, 8, 42, 87), c. XI Burlui Nastasie (7314, 7, 8, 20, 2, 3, 6, 8, 38, 9, 73, 5, 7, 90, 403, 25, 7, 505), *L. 15* cl. V Onea Gabriela (2450—4, 64), cl. VI Iancis Peprinella (2450, 2, 3, 6, 65, 7, 70, 2), Vartolomei Elena (2438, 9, 41, 6, 54, 64, 5, 7), cl. VII Astaloş Cristiana (2432, 4, 8, 9, 41, 2, 4, 55, 67), Moldovan Cornel (2432, 4, 8, 9, 41, 4, 54, 5), Schi0pu Ninela (2430—3, 4, 9, 41, 4, 5, 7), Tripan Antoaneta (2434, 8, 1, 41, 2, 4, 53, 64).

COMARNIC (Ploieşti). *Ş. g.* cl. VIII Vişan Gh. (2430, 1, 4, 53, 60—3), *L. 1* cl. X Aldasorv Augustin (7313, 4, 7, 8, 20, 2, 3, 5, 6, 8, 33, 64, 6, 72, 3, 5, 7—9, 87, 97, 402), Baciu Mihai (7317, 8, 20, 2, 3, 5, 6, 39, 75, 7, 9, 423—5), Buzatu Constantin (7313, 4, 8, 22, 3, 5, 6, 8, 33, 72, 3, 5, 6, 9, 87, 402), Cojocaru Ion (7318, 20, 2, 3, 5, 73, 5, 7, 8, 99, 423, 52, 4), Enoaie Ion (7317, 8, 20, 2, 3, 5, 6, 73, 5, 7, 9, 423—5), Oprea Lucian (7317, 8, 20, 3, 5, 6, 8, 73, 5, 423, 4, 6).

COMĂNEŞTI (Bacău). *L. 1* cl. VIII Botezatu Floricel (2431, 2, 40, 1, 5—7; 7328).

CONSTANŢA. *Ş. g. 5* cl. VII Lolea Mihaela (2429, 31, 2, 4, 5, 8, 9, 40), Manolescu Veroniza (2429—32, 4, 8, 9, 41), Moldoveanu Adriana (2429, 31, 2, 4, 5, 8—41), Ruse Maria (2429—32, 4, 8—9, 41), *Ş. g.* 12 cl. VI Neguţ M. Dan (2430—2, 4, 8—42, 4, 5), cl. VIII Ivaneş Mircea (2429, 31, 24, 8, 40, 1, 4—7), Topoloneanu Gh. (2431, 40, 1, 5, 50, 2—5, 62, 71, 2, 4, 5), *Ş. g. 24* cl. VII Seit Ozan (2430—24, 8—41, 53, 5), cl. VIII Manari Carmen (2431, 2, 9—42, 50, 3, 5, 60, 2, 71, 2, 8), *L. 1* cl. VI Vintilă Mihai (2434, 8, 9, 41, 2, 54, 5, 68), cl. VII Pasapai Dan (2429, 30, 2, 4, 39, 41, 50, 2), Răcească Eugen (2429—31, 4, 8, 9, 41, 5), cl. IX Ioniţă Lucia (2444—6, 9, 60, 2, 3; 7236, 8, 402, 4, 18), Persei.Radu (2444—7, 9, 60—3; 7318, 39, 413, 73), cl. X, Chiriac Călin (7313, 4, 7, 8, 21, 2, 8, 34, 5, 91, 442, 4), Duţu Gabriela (7314, 8, 20, 2, 6, 8, 34, 77, 9, 424—6, 52), Manea Eugen (7314, 7, 8, 20, 2, 3, 34, 5, 7, 75,, 9, 87, 425), Mitu Traian (7314, 7, 8, 20, 2, 3, 33—5, 7, 74, 5, 9, 87), Omer Adrian (7317, 22, 74, 8, 413, 24—6, 30, 2, 50, 4, 64), *L. 2* cl. X Blana Ionel (7312, 4, 7, 8, 20, 2, 3, 5—7, 33—5, 7, 9, 42, 6, 7, 51), Obacia Niculaie (7364, 5, 72—5, 7, 85, 8, 98, 402, 23—6, 32, 42, 7, 50, 294), cl. XI Colţoiu Dan (7371, 3—9, 85, 423—5, 7, 32, 5, 57), *L. 3* cl. VIII Urechescu Dan (2430-2, 8, 40—2, 6—8), cl. XI Mocanu Eugenia (7335, 7, 40, 2, 64, 70—2, 4—7), *L. 4* cl. IX Mircea Maria (2444—8, 7313, 5, 7, 8, 21, 5, 6, 8, 30, 5, 9, 44, 5, 7, 51), cl. X Gologan Traian (7318, 20, 3, 33, 5, 75, 7, 402, 24, 37, 77, 9, 80, 2, 96, 9, 513, 27), Niţu Nicolae (7314, 7, 8, 22, 3, 7, 8, 30, 5, 9, 42).

CORABIA. *Ş. g. 2* cl. VIII Vîrdol Aurel (2430, 1, 9, 41, 4, 53, 62, 71, 80—3, 8, 90—2), *L.* cl. X Mihai Gh. (7313, 4, 7, 8, 21—2, 6, 34, 75, 402, 6).

CORBU (Argeş) *Ş. g.* cl. VI Diaconescu Eugen (2429—31, 4, 9, 41, 4, 5).

COSTEŞTI (Argeş) *Ş. g.* cl. VII Ghiţă Gh. (32, 7—9, 41, 2, 50, 1, 3), *L. 1* cl. IX Constantinescu Liviu George (7325, 6, 8; 2444—7, 9, 62, 3, 74, 5, 8), Nicolae Constantin (2444—8, 61, 2, 74, 6—8, 7325, 6, 8).

COSTISA (Bacău) *Ş. g.* cl. VII Cosma Elisabeta (2429—32, 41, 2, 53, 61), cl. VIII Răuţă Silviu (2431, 2, 41, 2, 50, 3, 62, 71), Surdu Vasile (2331, 2, 40—2, 5, 40, 2, 3, 71).

COŢATCU (Ploieşti) *Ş. g.* cl. VII Iorga Gh. (2430—2, 4, 9—41, 5, 7).

CRAIOVA. *Ş. g. 4* Antonevici Silviu (2445—9, 61, 2; 7325), *Ş. g. 7* cl. VII Posoiu Paul (2432, 4, 9, 41, 50, 3—5), cl. VIII Popa Constanţa (2480—4, 8—90, *Ş. g. 9* cl. VII Voicu Eugen (2430—2, 4, 8, 9, 41, 2, 5, 50, 2—5), cl. VIII Drăghici Marieta (2431, 45, 7, 9, 50, 5, 62, 8, 71, 2), *Ş. g. 10* cl. VIII Mărinică Emilia (2439, 41, 5—7, 9, 60, 2), *Ş. g.* 21 cl. VIII Draga Violeta (2431, 2, 4, 8—42, 4—6, 9, 50, 2—5, 60, 2, 3, 71, 85, 4, 5, 8), *Ş. g. 24* cl. V Enescu Mircea (2429—32, 50, 2, 64, 7), cl. VIII Ivan Marcel (2429—32, 4, 9—42, 9, 50, 2, 3, 60, 2, 5, 7, 8, 70—2), cl. VIII Georgescu Sergiu (2431, 2, 8, 41, 2, 5—7; 7326, *L. 1* cl. VII Pogonaru Florin (2429—32, 4, 8—42, 4, 5, 7), cl. VIII Cîrtgo Radu (2480, 2—5, 8—90, 2), Ponovescu Cristiana (2431, 81—41, 5—7, 50, 2, 3), cl. IX Terpu Adrian (2444—7, 9, 60—3, 74, 8; 7325, 6, 8, 437), cl. X Banţă Valeriu) 7312—4, 7, 9, 20—8, 30, 2—9, 41, 2), Bălan Virgil (7313, 4, 21, 3, 33, 8, 9, 42, 72, 7, 8, 404), Damian Viorel (7313, 7, 8, 20, 2, 3, 5—8, 30, 5, 7, 9, 42, 8), Diamandescu Aurel (7313, 4, 7, 8, 20—8, 33, 5, 7, 9, 42, 7), Neagu Gabriel (7313, 4, 7, 8. 20, 2, 3, 5—8, 30, 3, 7, 48), *Pâtra Cristian* (7337, 3, 42, 60, 73, 4, 8, 98, 400, 3, 4, 13, 8, 22—6, 30, 2, 7, 40—2, 8, 50, 2, 4, 64, 77, 9, 80, 2, 3, 90, 4, 6, 9, 524), Popescu Adrian (7314, 7, 8, 20—3, 5—8, 30, 3, 5, 7, 9, 42, 7, 8), Turcu Ilie (7324, 5, 7, 8, 31, 2—4, 7—9, 49, 51), Ţepuş Nicolae (7313, 7, 8, 20—3, 5—8, 30, 3, 5, 7, 9, 42, 7, 81), cl. XI Dediu Luminiţa (7423—6, 8, 9, 32, 7, 50, 4, 76, 8, 85, 90, 4—6). *L. 2* cl. IX Astefanei Ion (2444,7, 9, 61—3, 74—6, 8, 7328, 437), Cergă Viorel (2445—7, 9, 60—3, 74, 6; 7398, 437,

41), Dumitrana Irina (2460—3, 74, 6; 7317, 21, 85, 98, 437—9, 41, 2), Stănescu Ovidiu (2445, 6, 8, 9, 60—2, 74, 6, 8; 7325, 6, 8), cl. X Circiumărescu I. Dan (7314, 7, 8, 20, 2, 3, 5, 6, 73—5, 85, 7), Georgescu Adriana (7317, 8, 20—3, 5—7, 33, 5, 7, 8, 42, 9, 64, 73—9, 85, 91, 7, 405, 23—5, 32, 7, 41, 50, 2, 4), Turturică Elena (7316, 8, 20 2, 3, 5, 6, 8, 75, 7—9, 85, 418, 23—6, 33), *L. 3* cl. VIII Pribeanu Alexandra (2429, 30, 4, 8, 9, 41, 2, 4, 6, 7325, 6, 8) cl. X Muscalagiu Nicolae (7314, 7, 8, 20, 2, 3, 5, 6, 8, 423, 5, 8, 30, 7), Popa Ion (7314, 22, 72—5, 7, 8, 91, 423, 5, 8, 32, 7), cl. XII Nicolae Maria (7311, 7, 8, 20, 2, 3, 5, 6, 8, 30, 5, 9, 40, 3, 72, 3, 5, 7), *L. 4* cl. IX Dănescu Constantin (2427, 8, 44—6, 9, 60, 2; 7285, 8, 326, 8), Ristoiu Veronica (2444, 9, 60—3, 74, 6, 8, 92; 7325, 8), *L. 5* cl. IX Bouleanu Zina şi Laurenţiu (2445—7, 9, 60, 2, 3, 74, 8; 7325, 6, 8, 437), cl. XI Moreş Florica (7325, 6, 8, 35, 9, 42, 3, 56, 9, 62, 72, 3, 5, 7, 8, 90). Păpăroiu Marin (7317, 8, 20—3, 5, 6, 8, 35, 7, 8, 42, 73, 5, 7, 83, 4, 7, 90, 400).

CRISCIOR (Hunedoara) *Ş. g.* cl. VII Iovan Dorin (2432, 4, 8, 9, 41, 2, 50, 5).

CUGIR. *L. 1* cl. X Munteanu Traian (7317—5, 7, 8, 20—3, 5—8, 35), cl. XI Dologa Ion (7313—5, 7, 8, 20—3, 5, 6, 8, 39).

CURTEA DE ARGEŞ (Argeş) *L. 1* cl. X Mihăilescu Nicolae (73,13, 4, 7, 8, 22, 35, 66, 73, 6, 7—9, 426), Niţulescu Gh. (7314, 7, 8, 22, 3, 5, 8, 47, 73, 5—9).

DEJ (Cluj). *L. 1* cl. VIII Acsel Margareta (2430—2, 4, 44—6, 8), Szilaggy A. (2430—2, 8, 40, 1, 3, 4), 7), Vaida Liviu (2429—32, 4, 8—42, 4—6), Fargha Layas (2340, 2, 4, 9—41, 4, 5, 7), Vary Istavn ((2430—2, 4, 8—40, 5—7), cl. IX Matis Istoan (2444—9, 62; 7318, 21, 5, 6, 8), cl. X Bujor Lucreţia (7313, 4, 7, 8, 20, 5, 6, 8, 72, 3, 423, 5), cl. XI Suciu Horia (7317, 23, 35, 59, 62, 4, 6, 7, 72—5, 7—9, 98, 423, 5, 33, 52), *L. 2.* cl. VII Maniu Ioncenţiu (2431, 2, 4, 8, 9, 41, 2, 4, 50, 3—5), cl. IX Precup Romulus (2426, 8, 45, 6, 9, 62; 7284—7, 326, 8) Borth Ferenc (7314, 7,8, 20—2, 5, 6, 8, 33, 5, 7).

DETA (Banat). *L. 1* cl. VI Ciurea Mioara (2431, 5, 50—6), Nicoli Tiberiu (2464—73, 5), cl. IX König Hedwig (2445, 7, 60—2, 74, 6—8; 7325, 99, 442), Stein Herta (2444, 7, 60—2, 74, 6—8; 7325, 99, 442).

DEVA (Hunedoara) *L. 1* cl. V Răşcăneanu Ion (2429—32, 53, 64, 5, 80).

DOBREŞTI (Bucureşti), *Ş. g. 61* cl. VII Angheţ Constanţa (2451, 3—6, 79—85, 8, 9, 97), Iacob Elisabeta (2451, 3, 4, 6, 79—83, 5, 8, 9, 97).

DOROHOI (Suceava), *Ş. g.* cl. VII Dorneanu Ionel (2450, 3, 4, 79, 83, 4, 9, 90), cl. VIII Beleşică Marcel (2429, 31, 2, 4, 8—41, 7), Bunduc Constantin (2464, 5, 7, 8, 83—5, 8—90), Corniciuc Dumitru (2454, 5, 69, 78, 80, 2, 5, 9; 7494, 5), Repciuc Ion (2450, 2—4, 62, 4, 5, 78, 83—5, 9, 90, 4), *Ş. g. 2* cl. VII Fania Maria (2438, 9, 41, 2, 50, 2—5, 65—7, 71—3, 6, 80, 1, 3, 4, 9), *L. 1* cl. IX Livianu Corneliu (2460—3, 74, 6, 8; 7382, 5, 97, 9, 418, 31, 41), *L. 2* cl. VIII Inghel Sara (2430, 1, 8, 9, 46, 9, 53, 5), Zelingher Clara (2431, 2, 8, 9, 41, 2, 5 50, 3—5, 62, 71—3,)cl. UX Jaluba Petru (2445—7, 61, 75, 92, 4; 7325, 8, 37, 8, 97).

DRĂGĂNEŞTI-OLT (Argeş) *L. 1* cl. VI Mihalache Florica (2440, 5, 50, 2—6), cl. X Enache Victor (7313, 7, 8, 20, 1, 3—8, 34, 5, 7, 9, 42, 79, 98), Păduraru Paul (7313, 8, 20, 2, 3, 5, 6, 8, 424, 5, 32, 7), Rotaru Alex. (7317, 8, 20, 2, 3, 6, 8, 78, 85, 7, 425, 37), Tîrcă Constantin (7320, 37, 9, 72, 7, 423—5, 37, 41, 2, 50, 2), Tîrnoveanu Ilie (7318, 9, 20, 2, 3, 5, 6, 8, 72, 3, 5, 7, 8, 85, 7, 99, 423—5, 8, 37), Văduva Floarea (7318, 20—3, 5, 6, 8, 35, 72, 99, 423, 37, 41).

DRĂGĂNEŞTI VEDE (Bucureşti) *Ş. g.* ck. VIII Giurgiuveanu Mariana (2429, 31, 2, 8, 9, 41, 2, 4), Stancu Marin (2429—32, 4, 8—42, 4—8).

DRĂGĂŞANI (Argeş) *Ş. g. 2* cl. V Enache Mircea (2429, 31, 2, 4, 50, 3, 4, 7), Voiculescu Sever (2430, 4, 50, 3, 64, 5), cl. VI Căzănescu Luminiţa (2429—32, 4, 8—42, 4, 5, 8),, Popescu Gh. (2429—31, 4, 8, 42, 4, 50, 50, 3, 67), cl. VIII Voiculescu Romaniţa (2430—2, 4 8—40, 2, 5, 6). cl. VII Brănescu Valentin 2431—2, 4, 8, 41, 2, 50, 3—5). *L. 1* cl. X Stănculescu Ilie (7318, 26, 8, 35, 60, 72, 3, 5, 7, 98, 423—6, 37, 50).

DUDEŞTI (Galaţi) *Ş. g.* cl. VII Neguţ Ştefan (2430—2, 4, 8—41).

DUDEŞTI VECHI (Banat). *L. 1* cl. VIII Budur Ecaterina 2426—8, 45, 60—2, 47). Velciov Petronela (2426—8, 45, 7, 60—2).

DUMBRĂVENI (Braşov) *L. 1* cl. X Widmann Vilhelm (7360, 7, 72—5, 7—9, 97—400, 23—6, 40, 2, 7, 8, 41—4, 8—50, 2, 75—80, 90 1, 3—7, 9, 500, 2, 4, 5).

DUMBRĂVENI (Oltenia) *Ş. g.* cl. VI Toarnă Matei (2431, 2, 5, 8, 9, 41, 2, 4, 54), cl. VIII Ciucur Ionia (2431, 2, 40, 5, 53—5, 60, 2).

FĂGĂRAŞ. *L. 1* cl. IX Cosgarea Gh. (2444—7, 9, 60—2; 7325, 6, 8, 30, 97).

FĂGET (Banat) *L. 1* cl. X Babescu Marius (7371—8, 85, 7, 98, 9, 401, 2, 4, 23—6, 8, 32, 7, 41, 2, 4, 9, 50, 2, 4), cl. XI Otescu Elena (7318, 20, 2, 3, 5, 6, 8, 77, 425, 94, 5, 9)

FĂLTICENI. *L. 1* cl. X Nicolau Fănică (73—20, 3, 6, 8, 35, 24, 64, 72, 4, 5, 8, 97, 8, 402, 5), *L. 2* cl. IX Alionte T. Dan (2447, 60—2, 74, 5, 8; 7318, 25, 6, 402, 30), cl. X Crilă Neculai (7317, 8, 25, 6, 8, 35, 72, 5, 7, 9, 402, 23—5, 50), Pohoaţă Dumitru (7317, 8, 2, 5, 6, 8, 35, 42, 72, 7, 8, 402, 24, 5, 50), Gorovei Sorin (2430, 1, 4, 40, 5—7, 9; 7317, 8, 20, 5). (va urma).

1966 AUG 31

CĂTRE REZOLVITORII DE PROBLEME

Corespondenții care ne trimit probleme rezolvate trebuie să redacteze fiecare problemă separat, însoțind-o de toate calculele necesare și de figuri desenate cu îngrijire.

Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceeași foaie.

Evidențiații trebuie să aibă cel puțin 35—40 soluții bune.

Problemele care se propun de către colaboratorii revistei să fie clar alcătuite și însoțite de soluții, să fie personale, iar nu luate din cărți sau reviste. Elevii sînt sfătuiți să înceapă a propune probleme numai după ce au rezolvat un număr destul de mare de exerciții și probleme. Problemele propuse, dar necorespunzătoare, nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse au fost publicate în cărți sau reviste, este rugat să arate precis volumul și pagina unde a mai apărut enunțul sau soluția problemei respective.

Solicităm probleme interesante legate de practică.

— *Problemele propuse urmînd a fi publicate ținînd seama de predarea la clasă a materiei respective, autorii lor sînt rugați să trimită problemele din vreme însoțite de una sau mai multe soluții îngrijit scrise precum și observări, discuții sau uneori generalizări, arătînd și modul cum au fost stabilite.*

— *Problemele propuse* (P), *note matematice* (N), *articole* (A), *materiale privind cercurile de elevi* (C), *se vor trimite redacției* G.M.-B. *de preferat într-un plic separat de problemele rezolvate.*

Corespondentul nostru care a citit și a înțeles deplin multe din soluțiile publicate, a rezolvat multe din problemele propuse poate și este îndemnat să încerce să schițeze cîte o notă rezultată dintr-o observație făcută cu ocazia rezolvării unei chestiuni mai grele Aceste note să fie *revăzute de mai multe ori înainte de a fi trimise*, pentru ca redactarea lor să fie *cît mai clară și concisă*. Figurile să fie făcute separat. În redactare se vor evita prescurtările.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

La publicarea problemelor rezolvate se vor menționa rezolvitorii care au dat o bună redactare și o soluție interesantă sau mai multe metode de rezolvare.

Elevii claselor a IX-a pot trimite soluții și la problemele propuse pentru clasa VIII-a. Problemele rezolvate trebuie să fie din ultimile trei numere apărute în G.M.B. *Problemele rezolvate*, vor fi expediate în cursul unei luni și vor fi însoțite de un borderou cu numărul problemelor, scrise în ordinea crescîndă. Pe plic se va scrie școala, clasa și localitatea revolvitorului. Problemele propuse vor fi separate, corect rezolvate și citeț semnate. Desenele să fie făcute îngrijit pe foi separate.

Elevii claselor V—VIII vor fi anunțați în rubrica rezolvitorilor de probleme dacă trimit odată cel puțin 8 probleme bine rezolvate, iar elevii claselor IX—XI, pentru cel puțin 12 probleme bine rezolvate.

Autorii sînt rugați să semneze clar la sfîrșitul lucrării personale pe care o trimit pentru publicat și să dea adresa lor exactă.

★

În vederea stimulării elevilor clasei XI premiați la olimpiadele internaționale de matematică sau olimpiadele interne (etapa finală), care devin studenți ai facultății de matematică-mecanică sau fizică de la Universități, conducerea Ministerului Învățămîntului a hotărît să li se acorde următoarele forme de sprijin material:

a) bursă în primul an de studii, indiferent de situația lor materială. În următorii ani de studii bursa să fie menținută în aceleași condiții dacă obțin media generală cel puțin 9,00.

b) la începutul primului an de studii să li se acorde cărți și manuale de specialitate în valoare de 500 lei.

c) în vacanțele anului I de studii să fie trimiși cu prioritate la odihnă în taberele studențești (iarna sau vara la alegerea studentului) dacă rezultatele școlare sînt foarte bune.

★

Tirajul fiind limitat, gazetele se trimit mai întîi abonaților și de aceea rugăm colaboratorii noștri să se aboneze de îndată. Prețul este de 2 lei exemplarul. *Abonamentele se pot face prin oficiile poștale locale.*

I.P. „Informația" – c. 3571

INDEX 41601

Lei 2

E 1426

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE
DIN REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA

GAZETA MATEMATICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XVII — septembrie 1966

9

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

GAZETA MATEMATICĂ
SERIA B
Anul XVII, nr. 9 — septembrie 1966

SUMARUL

		Pag.
1.	La început de an şcolar de Al. Bojin	385
2.	Nicolaie Coculescu de Constantin Drâmbă	387
3.	Din istoricul numerelor de Ion Bitea, Timişoara	390
4.	Reprezentarea parametrică a conicelor de Ileana Kaflikiewicz	395
5.	Unele observaţii cu privire la poligoanele regulate de Justin Cornea, Arad	401
6.	Probleme rezolvate (7227, 7231, 7232, 7233, 7234, 7235, 7236, E: 2357, 2359, 2364, 2365)	404
7.	Chestiuni de examen (7718 — 7725)	412
8.	Probleme propuse (7726—7761)	415
9.	Problemele propuse la cea de-a VIII-a O. I. M. (7662—7667)	421
10.	Exerciţii şi probleme propuse pentru clasele V — VIII (E: 2560 — 2571)	422
11.	Rubrica rezolvitorilor de probleme	425

ANUL XVII 9 SEPTEMBRIE

O mare parte din materialele publicate în acest număr a fost asigurată de către filiala Banat a Societăţii de ştiinţe matematice din Republica Socialistă România.

COMITETUL DE REDACŢIE

Dincă N., profesor; *Grosu A.*, profesoară; *Ionescu-Bujor C.*, prof. univ. emerit; *Ionescu-Ţiu C.*, profesor, redactor şef adjunct; *Kiss E.*, conf. univ. (Cluj); *Kovacs K.*, conf. univ. (Cluj); *Muşat I.*, profesor; *Ottescu C.*, profesor; *Plăviţu M.*, profesor; *Sacter O.*, conf. univ., redactor şef; *Simionescu Gh.*, conf. univ.; *Ţene L.*, profesoară şi *Voinea R.*, prof. univ.

REDACŢIA G. M-B: Str, Academiei, 14 — Tel. 14.46.53. — Bucureşti

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică a şcolilor, precum şi orice material informativ se vor trimite pe adresa de mai sus.

OR.SZ.KÖZ.MŰSZAKI KÖNYVTÁR DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1963

GAZETA MATEMATICĂ

SERIA B

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul LXVII, nr. 9 Septembrie 1966

LA ÎNCEPUT DE AN ȘCOLAR

AL. BOJIN, Director general adjunct în Ministerul Învățământului

După numai un an de la Congresul al IX-lea al Partidului Comunist Român, învățământul din patria noastră cunoaște o dezvoltare multilaterală evidentă. Directivele Congresului în domeniul învățământului au început să prindă viață, prin înființarea liceelor de specialitate, prin preconizarea unor măsuri de prelungirea învățământului obligatoriu, prin consolidarea și dezvoltarea bazei materiale, care să permită desfășurarea procesului instructiv-educativ în condițiile exigențelor sporite ale stadiului actual al societății noastre socialiste. Sarcina îmbunătățirii conținutului învățământului prin perfecționarea programelor, a manualelor, a materialului didactic s-a realizat și continuă să se realizeze prin ample consfătuiri cu specialiști, urmate de studii și de măsuri concrete menite să ducă la modernizarea învățământului, la punerea lui de acord cu ultimele date ale științei și tehnicii mondiale.

Folosirea tradițiilor progresiste ale învățământului și științei pedagogice românești, precum și a progreselor realizate în științele pedagogice mondiale se realizează în mod armonios, cu o evidentă sporire a calității învățământului.

Deschiderea noului an școlar — 1966—1967 — are loc, ca atare, în condiții incontestabil mai bune, superioare anilor anteriori. Științele matematicii, fizico-chimiei, biologiei, fără subaprecierea celor umaniste, ocupă un loc însemnat în planurile actuale de învățământ liceal și al școlilor generale. Elevii dobîndesc în școlile actuale o solidă pregătire

în domeniul științelor exacte, prin ansamblul măsurilor luate de factorii de răspundere în stat.

Un fapt semnificativ, care ilustrează grija forurilor competente pentru pregătirea matematică a actualelor și viitoarelor generații de tineri școlari, este înființarea, începînd cu acest an școlar, a unor clase de matematică, în centrele universitare din țară, în cadrul unor licee.

Selectarea elevilor, încadrarea claselor respective cu cadre corespunzătoare, intervențiile necesare în planul de învățămînt și în programe duc în mod pregnant la făurirea unor noi serii de viitori oameni de știință în domeniul matematicii, care să continue tradițiile frumoase ale acestei științe în țara noastră. Gazeta matematică, concursurile și olimpiadele de matematică, continuînd și în viitor antrenarea unor mari contingente de elevi să adîncească știința respectivă, slujesc, stimulînd, îndrumînd și promovînd, interesele majore ale învățămîntului, în această direcție, în patria noastră socialistă.

În ansamblul unor astfel de condiții, aplecarea spre studiu tot mai profund a elevilor, pasiunea lor pentru știință este și o necesitate și o datorie. Dezvoltarea impetuoasă a științelor moderne, cerințele sporite cu fiecare zi ale dezvoltării societății noastre, implică o muncă asiduă a tineretului, fără de care formarea lor ca cetățeni și oameni bine pregătiți este iluzorie. Viața societății noastre cere oameni bine pregătiți în toate domeniile, și în deosebi în acela al matematicilor.

Fiind considerată, pe drept cuvînt, principal izvor de cultură și factor de civilizație în epoca modernă, școala își îndeplinește cu cinste acest nobil țel încredințat de partid, de stat.

Profesorii de specialitate, convinși de însemnătatea operei ce desfășoară, vor veni și acum, ca și în anii precedenți, în întîmpinarea noului an școlar, cu același elan, cu aceeași dăruire de sine pentru pregătirea științifică temeinică a viitoarelor cadre de specialiști.

Este necesar ca, și la finele acestui nou an școlar, să putem constata că rezultatele muncii în școală sînt la nivelul cerințelor actuale, la nivelul țelurilor fixate învățămîntului de partidul nostru comunist.

NICOLAE COCULESCU

de CONSTANTIN DRÂMBĂ directorul Observatorului astronomic, Bucureşti, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România

S-au împlinit o sută de ani de la naşterea (31 iulie/12 august 1866) lui Nicolae Coculescu, profesor de astronomie şi mecanică cerească (1895—1937) la Universitatea din Bucureşti, fondatorul şi primul director (1908—1937) al Observatorului Astronomic din Bucureşti.

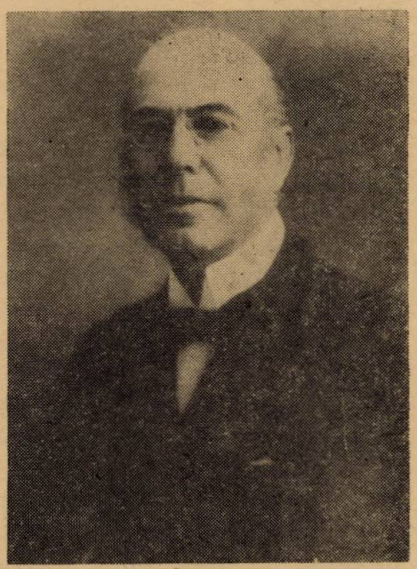
Tatăl său, Nicolae Cocu, român din Macedonia, localitatea Clisura de pe malul lacului Ohrida, s-a stabilit la Craiova unde în 1866 s-a născut

★

Nicolae Coculescu. Ceilalţi copii au fost: Paul, Eugenia şi Leontina. Mama, Maria Dimitriu-Coculescu, severă şi iubitoare de literatură, s-a preocupat în mod deosebit de educaţia copiilor.

Nicolae Coculescu termină la Craiova şcoala primară şi cele 7 clase secundare, iar în 1883 el se înscrie ca student la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti, cu dorinţa de a studia matematica şi astronomia.

La Universitate a avut ca profesori pe: Constantin Gogu la geometrie analitică, Dimitrie Petrescu la astronomie, Spiru Haret la mecanica raţională, David Emmanuel la algebra superioară şi teoria funcţiilor, Jacques Lahovary la calculul infinitesimal, Grigore Ştefănescu la mineralogie, Emanoil Bacaloglu la fizică, Alexe Marin la chimia analitică.



NICOLAE COCULESCU

Succesele deosebite obţinute de Spiru Haret şi Constantin Gogu în probleme fundamentale de mecanică cerească, primul cu privire la stabilitatea sistemului planetar, al doilea cu privire la perturbaţiile mişcării Lunii, au întărit pe Nicolae Coculescu în hotărîrea sa de a aprofunda studiul mecanicii cereşti.

După terminarea la Bucureşti, în martie 1889, a studiilor universitare, Nicolae Coculescu obţinînd o bursă pleacă la Paris. În decembrie 1889, Coculescu începe să lucreze ca stagiar la Observatorul din Paris, pentru a învăţa să efectueze observaţii şi calcule. Concomitent cu această activitate Coculescu a intreprins cercetarea teoretică a unei probleme fundamentale de mecanică cerească, studiul funcţiei perturbatoare în problema celor trei corpuri. În acel timp, marele matematician Henri

Poincaré descoperise metode noi pentru studiul problemelor de dinamică, în general şi de mecanică cerească, în special. Acest fapt a avut o influenţă binefăcătoare asupra preocupărilor lui Nicolae Coculescu care era atras de problemele mecanicii cereşti încă din vremea studiilor la Universitatea din Bucureşti.

La Observatorul din Paris, Nicolae Coculescu este foarte apreciat. Cu ocazia eclipsei totale de Soare din 16 aprilie 1893, Nicolae Coculescu este solicitat să participe la expediţia condusă de Deslandres. Tînărul astronom român a trimis o notă asupra acestui fenomen, care a fost publicată în Analele Academiei Române, tomul XVI, sub titlul „Eclipsa totală de Soare de la 5(16) aprilie 1893, observată la Foundiougne (Senegal)". Extragem un pasagiu din această notă... „Satisfacţiunea ce simte observatorul în aceste momente este nemărginită. Mai mult ca ori cînd e cuprins de admiraţiune pentru cea mai exactă dintre ştiinţe şi pentru geniile care au creat-o !"... Aceste rînduri ne arată cît de impresionat a fost tînărul Coculescu de fenomenul observat.

La 5 noiembrie 1895, Nicolae Coculescu obţine gradul de doctor în matematici la Facultatea de Ştiinţe din Paris, unde a prezentat ca teză lucrarea „Sur les expressions approchées des termes d'ordre élevé dans le développement de la fonction perturbatrice". Comisia a fost alcătuită din Félix Tisserand ca preşedinte, avînd ca examinatori pe Paul Appell şi pe Henri Poincaré.

În lucrarea aceasta, Nicolae Coculescu reuşeşte a evalua partea principală a coeficienţilor de ordin înalt din dezvoltarea în serie a funcţiei perturbatoare extinzînd, la un caz mai general, calculele efectuate de Poincaré. Tînărul savant român a dovedit o deosebită îndemînare şi cunoştinţe temeinice în teoria funcţiilor de variabilă complexă, pe care le-a aplicat cu succes la problema ce îl preocupa. Nicolae Coculescu studiase lucrările lui Cauchy şi ale lui Darboux, care i-au folosit în rezolvarea problemei. Cînd au apărut în 1905 cele trei volume „Leçons de mécanique céleste" ale lui Henri Poincaré , marele geometru citează rezultatele obţinute de N. Coculescu.

Înainte de prezentarea tezei în 1905, Coculescu a publicat trei note în Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris. În prima notă „Sur la stabilité du mouvement dans un cas particulier du problème des trois corps", tomul 114, pag, 1339—1341 din 1892, el se ocupă de stabilitatea mişcării în cazul problemei restrînse a celor trei corpuri. Considerînd una din curbele echipotenţiale (Hill) şi un invariant integral al problemei, Coculescu demonstrează că mişcarea celui de al treilea corp (corpul cu masă neglijabilă) este stabilă, atît în sensul lui Hill cît şi în sensul lui Poisson. Celelalte două note publicate în Comptes rendus (tomul 118, pag. 59 şi tomul 120 pag. 32) se referă direct la lucrarea de teză, adică la dezvoltarea în serie a funcţiei perturbatoare.

La 1 noiembrie 1895, Nicolae Coculescu este numit profesor suplinitor de astronomie şi mecanică cerească la Universitatea din Bucureşti. Pentru definitivarea sa prin concurs în funcţia de profesor a fost numită o comisie avînd ca preşedinte pe Neculai Culianu, profesor de astronomie

la Universitatea din Iaşi, iar ca membri pe Spiru Haret şi David Emmanuel, profesori la Universitatea din Bucureşti. Comisia se întruneşte în mai 1896 şi constată că prof. Coculescu poate fi numit profesor titular fără îndeplinirea formalităţilor de concurs avîndu-se în vedere lecţiile predate, deosebit de clare şi riguroase şi care au deşteptat un viu interes. Timp de 42 ani (1895—1937), Nicolae Coculescu a desfăşurat o activitate exemplară ca profesor, atît prin lecţiile sale atrăgătoare cît şi prin manualele de astronomie şi de mecanică cerească pe care le-a publicat. Profesorul Coculescu a transmis studenţilor săi pasiunea pentru studiul astronomiei şi a format mulţi elevi care s-au consacrat acestei discipline.

Un merit deosebit revine lui Coculescu prin întemeierea în 1908 a Observatorului Astronomic din Bucureşti învingînd multe piedici, datorită autorităţii lui şi prestigiului de care se bucura. Cu un deosebit simţ de răspundere, Coculescu a prevăzut rolul pe care trebuia să-l îndeplinească Observatorul Astronomic, fixîndu-i o dublă destinaţie : efectuarea de lucrări pentru practica necesară studenţilor ce urmau cursurile de astronomie şi de mecanică cerească, precum şi dezvoltarea observaţiilor moderne în ţara noastră, pe baza unui program sistematic.

Clădirea principală a Observatorului a fost terminată în 1908 şi este situată în parcul care astăzi se află pe str. Cuţitul de Argint nr. 5. Încă din 1908, Coculescu a comandat cele două instrumente importante : marele ecuatorial Merz-Prin (cu obiectiv fotografic 60—600 cm şi cu obiectiv vizual 59—600 cm.) instalat în 1912 şi marea lunetă meridiană Steinheil-Prin (obiectiv 19—235) cm instalată în 1926, cu întîrziere din cauza primului război mondial.

În acelaş timp, Coculescu s-a preocupat de formarea astronomilor şi a trimis treptat la specializare pe cîţiva dintre studenţii săi. Dintre aceştia citäm pe acad. Gh. Demetrescu şi pe prof. Maria Teohari. Timp de 55 ani (1908—1963), acad. Demetrescu a contribuit substanţial la dezvoltarea Observatorului din Bucureşti al cărui director a fost (1943—1963), urmînd după acad. Constantin Popovici care a fost director în intervalul 1937—1943. Prof. Maria Teohari a lucrat la Observator în intervalul (1908—1930).

În perioada iniţială au mai lucrat la Observatorul din Bucureşti ca astronomi : Avram Teodosiu, Constantin Pîrvulescu(1912), Alexandru Georgiade, Traian Popp (1919 — 1929), ca meteorologist Spiridon Plachide (1918—1947).

Din următoarea generaţie de astronomi, elevi ai profesorului Coculescu au intrat succesiv la Observator : Constantin Drîmbă (1928), Gheorghe Petrescu (1928), Virgil Claudian (1929), Nicolae Dinulescu (1930), Călin Popovici (1930).

Fiind dotat cu instrumente mari şi care comportau o foarte bună precizie, la Observatorul din Bucureşti au fost efectuate lucrări importante sub direcţia profesorului Coculescu şi sub îndrumarea permanentă a profesorului Gh. Demetrescu, care la 1 martie 1928 a fost numit prim astro-

nom şi vice director al Observatorului. Dintre aceste lucrări menţionăm programul sistematic al determinărilor precise, pe cale fotografică, ale poziţiilor de mici planete şi comete în coordonate ecuatoriale, observarea fenomenelor solare fotosferice, determinări orare, participarea la determinările mondiale de longitudini (octombrie-noiembrie 1933). De asemenea au fost efectuate lucrări teoretice cu privire la determinarea polului (nord) pe cale fotografică, determinarea elementelor orbitale ale primilor patru sateliţi ai planetei Jupiter, determinări ale latitudinii geografice cu marea lunetă meridiană, determinarea unor soluţii noi în problema celor trei corpuri (ciocnirile duble imaginare), determinarea apexului solar, etc.

La 1 iunie 1951, Observatorul Astronomic din Bucureşti a fost transferat de la Universitate la Academia R.P.R. Profesorul Coculescu, încă în viaţă a avut satisfacţia să vadă începutul unei noi perioade de dezvoltare a instituţiei pentru care îşi dăruise toată priceperea şi energia.

N. Coculescu a publicat tratate şi manuale de astronomie şi de mecanică cerească care se disting prin claritate şi prin expunerea riguroasă a problemelor. Coculescu poate fi considerat primul dintre profesorii Facultăţii de Ştiinţe care a scris despre activitatea altora dintre profesori (Spiru Haret, Constantin Gogu) analizînd realizările lor spre a le face cunoscute.

În intervalul 1 noiembrie 1928—10 martie 1932, Coculescu a fost decan al Facultăţii de Ştiinţe.

N. Coculescu a înfiinţat Comitetul Naţional de Geodezie şi Geofizică în 1929 şi Comitetul Naţional de Astronomie în 1930, prin care ţara noastră a devenit membră la cele două mari Uniuni Internaţionale : Uniunea de Geodezie şi Geofizică Internaţională şi Uniunea Astronomică Internaţională. În prezent, legăturile de colaborare internaţională ale Observatorului din Bucureşti s-au dezvoltat foarte mult. Acest fapt contribuie la creşterea prestigiului ştiinţei româneşti, peste hotare.

La 5 noiembrie 1952 s-a stins din viaţă Nicolae Coculescu iubit şi regretat de elevii săi, de care fusese foarte legat şi cărora le revine sarcina grea şi înaltă de a-i continua opera.

DIN ISTORICUL NUMERELOR

Ion Bîtea, conferenţiar Timişoara

Oamenii din ţările civilizate contemporane se obişnuiesc cu numerele din fragedă copilărie. Din această cauză ei îşi formează părerea că numerele (în special numerele naturale) sînt noţiuni cu totul obişnuite şi că oamenii le-au avut întotdeauna. Cu toate acestea numerele au o istorie frămîntată ca istoria oricărei creaţii a spiritului uman.

Nu există documente din care să ne putem da seama, cum au apărut numerele naturale la popoarele antice. Despre starea cunoştinţelor

popoarelor vechi în acest domeniu putem judeca numai prin analogie cu ceea ce se petrece la populațiile care pînă nu demult puteau fi considerate primitive.

Din cercetările etnografice rezultă că pînă nu de mult au existat triburi în Polinezia la care șirul numerelor naturale era format din „unu", „doi" și „mai mult". Prin urmare, aceste triburi nu ajunseseră cu dezvoltarea noțiunii de număr nici pînă la cinci. Au existat triburi primitive, care pentru numărul cinci aveau termenul „mînă", pentru numărul 20 aveau termenul „tot omul". Aceasta ne arată că noțiunea de număr natural s-a format din compararea mulțimilor finite ca anumite mulțimi tip, ca mulțimea degetelor de la o mînă, mulțimea degetelor de la mîini și de la picioare etc.

Afară de aceasta au existat triburi care aveau termeni diferiți pentru colecții de obiecte diferite cu același număr de obiecte : spre exemplu un anumit termen pentru 5 mere și altul pentru 5 vînători etc. Aceasta ne arată că a fost o fază în dezvoltarea noțiunii de număr, în care acesta apărea ca o calitate a obiectelor, întocmai ca duritatea, culoarea etc.

Acest lucru nu trebuie să ne mire. Noțiunea de „roșu" este o noțiune abstractă formată în urma comparării obiectelor care aveau această culoare. Există triburi primitive care în loc de „roșu" spun „ca sîngele", altele care în loc de „tare" spun „ca piatra". Aceasta ne arată că la respectivele triburi încă nu s-au format noțiunile de „roșu", „tare" etc.

Așa s-a întîmplat și cu numerele. La început ele au fost concepute ca proprietăți ale obiectelor din natură și se exprimau ca adjective. Numai după o lungă perioadă de timp noțiunea de număr s-a desprins de obiectele la care s-a referit și a fost apoi concepută în mod abstract.

Un progres însemnat în formarea noțiunii de număr natural s-a realizat după ce s-a descoperit scrierea. Atunci a devenit posibil să se inventeze semne pentru numere. Prin intermediul acestor semne numerele se fixau, se transmiteau ușor din generație în generație, se desprindeau de obiecte, se abstractizau într-un grad din ce în ce mai mare. Cu ajutorul scrierii a fost posibil ca numărul să ia forma unui simbol abstract, ușor de manevrat. Cînd omul scria simbolul pentru 5 nu se mai gîndea la mînă, cînd scria simbolul pentru 20, nu se mai gîndea la „tot omul" etc.

Prin înaintarea în civilizație au apărut colecții de obiecte din ce în ce mai mari (populația orașelor, soldați din armate, turmele de oi, etc.) care trebuiau numărate. Au apărut deci numere din ce în ce mai mari, a fost nevoie de multe semne pentru scrierea lor. Dar dacă pentru fiecare număr s-ar fi scris un semn deosebit, reținerea lor din memorie ar fi fost dificilă. Deci s-a simțit nevoia unei notații sistematice, cu puține semne. O astfel de notație au avut Romanii de exemplu, care prin combinarea literelor I, V, C, D, M, L, X puteau scrie cu ușurință numere pînă la o mie. Egiptenii au avut scrierea hieroglifică, folosind tot semne hieroglifice și pentru numere. Cu hieroglife notează numerele pînă în ziua de azi chinezii și japonezii.

Sumerienii și mai tîrziu caldeenii au avut sistemul de numerație cu baza 60. Ei utilizau puține semne grafice pentru notarea numerelor, pe care le scriau după principiul pozițional. Au avut chiar și un semn cu care indicau absența unităților de un anumit ordin. Dar n-au folosit

consecvent acest din urmă semn (nu-l puneau la sfîrşitul numerelor cînd lipseau unităţile de exemplu). Deci ei n-au putut desăvîrşi sistemul poziţional de scriere a numerelor.

Meritul de a fi descoperit un sistem simplu de notaţii pentru numere şi de a fi perfecţionat scrierea poziţională pe baza sistemului cu baza 10, revine indienilor. Ei au introdus cifrele care stau la baza notaţiilor actuale, inclusiv semnele pentru zero, pe care l-au numit cu echivalentul cuvîntului vid. De la indieni acest sistem a fost împrumutat de arabi, de la care, prin intermediul Spaniei — a trecut în Europa, începînd din secolul XII e.n. Introducerea definitivă a sistemului de numeraţie cu cifrele arabe a avut loc în secolul XV, deşi chiar în acest timp în Europa se mai foloseau în calendare numerele romane.

Avantajele sistemului poziţional de scriere a numerelor sînt considerabile. El poate fi învăţat cu uşurinţă de către oricine. Prin urmare orice copil poate învăţa să scrie şi să citească numerele înainte de a avea o idee precisă despre ele. Acesta este un fapt de o însemnătate deosebită : avînd un sistem comod de scriere şi de numire a numerelor dispunem de o mulţime etalon, necesară pentru procesul de numărare.

Egiptenii şi caldeenii n-au stabilit teoreme generale despre numere. Ei aveau numai reguli empirice pentru rezolvarea unor categorii de probleme practice. Deabea la Greci s-a ajuns la noţiunea de număr natural oarecare, s-a ajuns la formarea mulţimii numerelor naturale. Grecii au considerat numerele naturale ca obiecte de studiu, asupra cărora şi-au exercitat ascuţimea minţii, stabilind teoreme cu caracter general. Trebuie să menţionăm că grecii au considerat că numerele au realitate obiectivă, independentă de conştiinţa oamenilor şi pe această bază au căutat să le stabilească proprietăţile. Adepţii lui *Platon* socoteau că numerele există — ca realizare independentă de conştiinţa oamenilor — în lumea ideilor pure şi că oamenii iau cunoştinţă despre ele prin raţionament. (*Socrate* spunea prin amintire).

Este util sub acest raport, să amintim definiţia pe care a dat-o *Euclid* numărului natural. Numărul este o colecţie de unităţi. Din această definiţie se vede clar originea noţiunii de număr, ca echivalent abstract al unei mulţimi de obiecte. Tot din definiţie se vede că chiar la greci numărul era o mulţime deci nu se desprinsese complet de obiectele din care s-a născut prin abstractizare. Fiind o mulţime, numărul are o existenţă obiectivă, ca orice mulţime de obiecte din natură. Această definiţie a numărului natural a dominat în Europa pînă la *Newton* şi ecouri ale ei se găsesc şi azi prin cărţile de şcoală. Este important să semnalăm încă de pe acum că numărul natural în general este o noţiune abstractă, formată în contact cu mulţimile de obiecte din practică, din intuiţie, dar nu este nici într-un caz o colecţie de unităţi.

Noţiunea de „şapte" este unică şi indivizibilă, ea nu se compune din şapte numere naturale egale cu „unitatea". Acelaşi lucru este valabil bineînţeles, despre orice număr natural.

Dar, încă odată, această definiţie a numărului natural oglindeşte procesul său de geneză, reflectă condiţiile materiale în care el a apărut.

Newton a dat o altă definiţie pentru număr : Numărul nu este atît o colecţie de unităţi, cît raportul a două mărimi dintre care una este luată ca unitate de măsură.

Această definiție mai fusese dată prin 1200 de către matematicienii din Asia Mijlocie. Ea înlocuiește mulțimile din vechea definiție cu o noțiune nouă, adică, noțiunea de „mărime". Dar ce înțelegeau acești matematicieni și ce înțelegea Newton prin noțiunea de mărime ? Ei spuneau cam în felul următor : se numește mărime sau cantitate tot ce poate fi „mai mare" sau „ mai mic", tot ceea ce se poate mări sau micșora.

Nu este greu de văzut că această definiție nu este de loc riguroasă, ea este în întregime scoasă din intuiție și această formă nu poate duce la concluzii durabile. Ordonarea mărimilor prin relația „mai mare" sau „mai mic" era scoasă din intuiție, ea se aplică mărimilor din viață practică, adică mărimilor reale, existente obiectiv în afara conștiinței oamenilor.

Este acuma important să vedem cum s-au născut operațiile cu numere naturale.

Adunarea nu este decît echivalentul reuniunii colecțiilor finite disjuncte de obiecte din practică. Astfel a aduna numărul natural n cu numărul natural p înseamnează să formăm un număr q care să cuprindă atîtea unități cîte au numerele n și p împreună. Definiția aceasta a fost dată în antichitate, dar ea se regăsește și în sec. XVII și XVIII, ba ea se mai regăsește și azi în cărțile de aritmetică destinate elevilor începători. Din această definiție se vede că adunarea numerelor naturale corespunde (aproape se confundă) cu reuniunea mulțimilor finite. Deci, pentru vechii matematicieni, ea avea o semnificație reală, ea exista efectiv în realitate, nu era considerată ca o operație construită de mintea omenească. În mod analog stau lucrurile cu scăderea. A scădea numărul p din numărul n, însemnează să scoatem din n atîtea unități cîte are numărul p. Și aici legătura cu practica, cu intuiția, este evidentă. De asemenea, este evidentă semnificația obiectivă a scăderii, ca reflectarea unui proces obiectiv din viață, a unui proces care are loc în afara conștiinței oamenilor.

Înmulțirea se pare că a apărut ca proces de numărare a colecțiilor egale. Pentru a număra o turmă de oi se procedează cam în felul următor : la intrarea lor în staul se trage o dungă pe răboj făcîndu-se grupe de cîte 5 dungi, pe urmă se socotesc cîte grupe de 5 dungi au fost trase.

Așadar înmulțirea se reduce la adunarea de termeni egali. Din această cauză se poate socoti că și înmulțirea corespunde unui proces real din natură, că și ea există obiectiv independent de voința și cunoștința oamenilor. Împărțirea a fost definită astfel : a împărți numărul n cu numărul p înseamnează a lua unitățile lui n și a face din ele grupe de atîtea unități cîte are p. Sau se scade pe p din n de atîtea ori de cîte ori este posibil.

După cum se vede din cele de mai sus, operațiile cu numerele naturale au apărut în cadrul practicei speciale a oamenilor. Ele erau echivalentul operațiilor cu colecțiile finite de obiecte (operații cu care aproape se confundă).

Începînd cu grecii antici, matematicienii au încercat să demonstreze proprietățile operațiilor cu numere naturale. Toate demonstrațiile date au fost mai mult sau mai puțin intuitive, deci nici una n-a fost riguroasă. Multe din aceste demonstrații n-au fost în realitate decît verificări ale proprietăților operațiilor. Abia atunci cînd proprietățile operațiilor au fost demonstrate cu ajutorul raționamentului prin recurență s-a ajuns la demonstrații satisfăcătoare. Dar să remarcăm că raționamentul prin

recurență se bazează pe o proprietate generală a mulțimii numerelor naturale care a fost recunoscută ca atare în urma practicii științifice din sec. XVII, XVIII, XIX, dar care n-a fost demonstrată. Ea se ia azi ca axiomă ceea ce din punctul de vedere al teoriei cunoașterii echivalează cu afirmația că nu putem defini numerele naturale și trebuie să le acceptăm, așa cum rezultă ele din procesul genetic care a avut loc de-alungul veacurilor. Așadar stadiul la care s-a ajuns azi în studiul numerelor naturale este aproximativ următorul:

Numerele naturale, care s-au format în decursul veacurilor în cadrul practicii sociale a oamenilor, au cîteva proprietăți generale care sînt luate ca proprietăți de bază. Acestea sînt formulate ca axiome și toate proprietățile numerelor naturale sînt deduse din ele prin raționamente și concluzii logice.

În cele de mai sus ne-am oprit numai asupra cîtorva din momentele istoriei numerelor naturale, căutînd să scoatem în evidență legătura lor genetică cu experiența practică, cu experiența socială a oamenilor.

Din cele mai vechi timpuri însă, viața a pus oamenilor și alte probleme care au dus la formarea de noțiuni cu caracter aritmetic. Astfel oamenii au fost nevoiți să măsoare segmente de dreaptă, să măsoare suprafețe agricole, să măsoare capacitatea vaselor etc. Dar rezultatul măsurării nu era totdeauna un număr natural. Astfel încă din timpuri străvechi pe lîngă noțiunea de număr natural au apărut și noțiunea ca: o jumătate o pătrime, o optime etc. La vechii egipteni au apărut noțiunile acestea adică fracții cu numărătorul 1 și cu numitorul o putere a lui doi: $\frac{1}{2}\ \frac{1}{2^2}\ \frac{1}{2^3}$ etc.

Pentru fiecare din aceste fracții aveau cîte un simbol hieroglific. Din cercetările etnografice rezultă că la început și fracțiile au avut caracter concret; ele erau o proprietate a lucrurilor. Astfel exista un termen special pentru o jumătate dintr-un anumit obiect, și alt termen pentru o jumătate, din alt obiect. Cu timpul s-a format noțiunea abstractă de jumătate, apoi de o treime, etc. Extrem de sporadic s-au întîlnit și fracții cu numărătorul diferit de unitate.

Grecii antici au lucrat cu fracțiile, dar nu le considerau numere. Ei le numeau rapoarte de numere naturale (rapoarte de numere, căci pentru greci numai numerele naturale erau numere). Fracțiile au fost studiate și de matematicienii indieni (sec. V—XV) și de matematicienii musulmani (sec. IX—XV e.n.). Concepția generală despre fracție, obținută în aceste timpuri poate fi concretizată prin definiția: fracția $\frac{p}{q}$ este o colecție de p părți dintr-un întreg împărțit în q părți egale.

Conform cu această definiție, numărul fracționar a fost redus la numărul natural (colecție de unități) și deci el n-a provocat dificultăți matematicienilor. Din cauza originii sale, din cauza semnificației sale practice, numărul fracționar a fost și el considerat ca avînd existență obiectivă în lumea reală, ca fiind independent de conștiința umană. Proprietățile fracțiilor au fost deduse ținînd seama de această interpretare practică a lor. Simplificarea și amplificarea fracțiilor s-a justificat pe exemple date de practică. Adunarea fracțiilor cu același numitor se reducea

la adunarea numerelor naturale. De exemplu a aduna pe $\frac{3}{8}$ cu $\frac{2}{8}$ înseamnă să formăm o fracție care are atîtea optimi (acestea sînt unitățile) cîte optimi au aceste două fracții împreună. Se vede că aceasta este tocmai definiția adunării numerelor naturale ca un echivalent al reuniunilor finite de mulțimi finite disjuncte.

Scăderea se definea în mod analog cu scăderea numerelor naturale. Dificultățile au existat în privința înmulțirii și împărțirii. Aceste dificultăți au fost parțial înlăturate prin definiția lui Newton: a înmulți un număr a cu un alt număr b înseamnă a face asupra lui a operațiile pe care le-am făcut cu unitatea pentru a obține pe b.

Conform cu aceasta, produsul fracțiilor $\frac{q}{p} \cdot \frac{p'}{q'}$ este fracția $\frac{qp'}{q'p}$.

Nici nu se punea problema dacă operațiile cu fracții există și dacă sînt unice. Ele existau în mod obiectiv și erau analoage cu operațiile cu numere naturale (sau se reduceau la acestea).

Este însă bine să remarcăm că proprietățile fracțiilor și proprietățile operațiilor cu ele n-au fost pe deplin lămurite decît în sec. XIX, cînd fracția a fost interpretată ca o pereche ordonată de numere naturale, și cînd operațiile au fost definite fără nici o referire la numerele naturale sau la obiectele din natură. Ținînd seama de definiția modernă a fracțiilor, teoria lor devine extrem de simplă și de unitară, dar pierde orice legătură cu intuiția. Ea devine o teorie a unor noțiuni abstracte care au fost — e drept — elaborate de mintea omenească pe baza datelor experienței practice și a experienței cu numerele naturale.

REPREZENTAREA PARAMETRICĂ A CONICELOR

de *ILEANA KAFLIEKIEWICZ*, profesoară, Arad

1. *Generalități.* Să presupunem că coordonatele unui punct sînt funcții de un parametru variabil între limite admisibile. Punctul este deci mobil, iar locul geometric al pozițiilor punctului este o curbă de ecuații parametrice

$$x = f(t); \quad y = g(t).$$

Dacă $x = f(t)$ este definită pe mulțimea A, iar $y = g(t)$ este definită pe mulțimea B, curba există pe mulțimea $A \cap B$.

Tangenta într-un punct are coeficientul unghiular

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)} = \frac{y'}{x'}.$$

Asimptote. Dacă pentru $t \to t_1$, $y \to \infty$ și $x \to a$ atunci $x = a$ este o asimptotă paralelă cu Oy.

Dacă pentru $t \to t_2$, $x \to \infty$ și $y \to b$, atunci $y = b$ este o asimptotă paralelă cu Ox.

Dacă pentru $t \to t_0$, $x \to \infty$ și $y \to \infty$, coeficientul unghiular a asimptotei oblice (dacă ea există) este dat de

$$m = \lim \frac{y}{x} = \lim_{t \to t_0} \frac{g(t)}{f(t)}. \tag{1}$$

Ecuația asimptotei oblice este $y = mx + n$.
Pentru a determina valoarea lui n, avem:

$$n = \lim (y - mx) = \lim_{t \to t_0} [g(t) - m f(t)]. \tag{2}$$

Curbe unicursale. Dacă $f(t)$ și $g(t)$ sînt funcții raționale de t de forma

$$\frac{F(t)}{G(t)} \text{ și } \frac{H(t)}{G(t)},$$

atunci

$$x = \frac{F(t)}{G(t)}; \quad y = \frac{F(t)}{G(t)},$$

$F(t)$, $H(t)$, $G(t)$ fiind polinoame în t.
Curba se numește în acest caz *unicursală*.
Gradul curbei unicursale se obține după numărul de puncte în care această curbă este intersectată de o dreaptă $Ax + By + C = 0$.
Punctele de intersecție sînt rădăcinile ecuației în t:

$$A \frac{F(t)}{G(t)} + B \frac{H(t)}{G(t)} + C = 0$$

sau

$$A \cdot F(t) + B \cdot H(t) + C \cdot G(t) = 0.$$

Deoarece ecuația are atîtea rădăcini cît este gradul ecuației, gradul curbei unicursale este egal cu gradul ecuației în t.
2. *Ecuațiile parametrice ale conicelor*
Să considerăm ecuațiile parametrice:

$$x = \frac{a_1 t^2 + b_1 t + c_1}{a_3 t^2 + b_3 t + c_3}, \qquad y = \frac{a_2 t^2 + b_2 t + c_2}{a_3 t^2 + b_3 t + c_3}.$$

Dreapta $Ax + By + C = 0$ intersectează curba pentru valorile lui t date de ecuația

$$A \frac{a_1 t^2 + b_1 t + c_1}{a_3 t^2 + b_3 t + c_3} + B \frac{a_2 t^2 + b_2 t + c_2}{a_3 t^2 + b_3 t + c_3} + C = 0$$

sau

$$(Aa_1 + Ba_2 + Ca_3) t^2 + (Ab_1 + Bb_2 + Cb_3) t + Ac_1 + Bc_2 + Cc_3 = 0, \tag{3}$$

ecuația în t fiind de gradul al doilea, ne dă două puncte de intersecție a curbei cu orice dreaptă.

Dar curbele care intersectate cu orice dreaptă dau două puncte de intersecție sînt conicele : elipsa, hiperbola, parabola, propriu zise sau degenerate în drepte și în cazuri limită, cerc sau dreaptă.

Deci

$$x = \frac{a_1 t^2 + b_1 t + c_1}{a_3 t^2 + b_3 t + c_3}, \qquad y = \frac{a_2 t^2 + b_2 t + c_2}{a^2 t_3 + b_3 t + c_3}$$

sînt ecuațiile parametrice ale conicelor.

Direcțiile asimptotice sînt date de

$$m = \lim \frac{y}{x} = \lim_{\substack{t \to t_1 \\ \text{și } t \to t_2}} \frac{a_2 t^2 + b_2 t + c_2}{a_1 t^2 + b_1 t + c_1},$$

unde t_1 și t_2 sînt valorile care anulează numitorul $a_3 t^2 + b_3 t + c_3$.

Avem de studiat următoarele cazuri posibile

I. $a_3 \neq 0$

a) Dacă t_1 și t_2 sînt imaginare conica nu are ramură infinită, deci este elipsă.

b) Dacă t_1 și t_2 sînt reale distincte, conica are două asimptote și este hiperbolă, iar ecuațiile curbei sînt

$$x = \frac{a_1 t^2 + b_1 t + c_1}{a_3 (t - t_1)(t - t_2)}, \qquad y = \frac{a_2 t^2 + b_2 t + c_2}{a_3 (t - t_1)(t - t_2)}.$$

c) Dacă t_1 și t_2 sînt reale egale $t_1 = t_2 = t_0$, direcțiile asimptotice sînt aceleași ; ecuațiile curbei sînt :

$$x = \frac{a_1 t^2 + b_1 t + c_1}{a_3 (t - t_0)^2}, \qquad y = \frac{a_2 t^2 + b_2 t + c_2}{a_3 (t - t_0)^2}.$$

În acest caz $m = \dfrac{a_2 t_0^2 + b_2 t_0 + c_2}{a_1 t_0^2 + b_1 t_0 + c_1}$,

$$n = \lim_{t \to t_0} \left[\frac{a_2 t^2 + b_2 t + c_2}{a_3 t^2 + b_2 t + c_3} - \frac{a_2 t^2 + b_2 t_0 + c_2}{a_1 t_0^2 + b_1 t_0 + c_1} \cdot \frac{a_1 t^2 + b_1 t + c_1}{a_3 t^2 + b_2 t + c_3} \right] =$$

$$= \lim_{t \to t_0} \frac{(a_2 b_1 - b_2 a_1) t t_0 + (a_2 c_1 - c_2 a_1)(t + t_0) + (b_2 c_1 - c_2 b_1)}{a_3 (t - t_0)(a_1 t_0^2 + b_1 t_0 + c)_1} = \infty,$$

deci asimptota este aruncată la infinit ; conica este parabolă.

II. $a_3 = 0$ și $b_3 \neq 0$.

$$x = \frac{a_1 t^2 + b_1 t + c_1}{t - t_1}, \quad y = \frac{a_2 t^2 + b_2 t + c_2}{t - t_1}, \tag{4}$$

conica nu poate fi elipsă.

Direcțiile asimptotice le avem pentru $t \to t_1$ și $t \to \infty$.

$$m_1 = \frac{a_2 t_1^2 + b_2 t_1 + c_2}{a_1 t_1^2 + b_1 t_1 + c_1}, \; m_2 = \frac{a_2}{a_1}.$$

a) $m_1 \neq m_2$ conica este hiperbolă.

b) $m_1 = m_2$, $t_1 = -\dfrac{a_2c_1 - a_1c_1}{a_2b_1 - a_1a_2}$, conica este parabolă.

III. $a_3 = 0$ și $b_3 = 0$, $\quad x = a_1t^2 + b_1t + c_1$, $\quad y = a_2t^2 + b_2t + c_2$,

$$m = \frac{a_2}{a_1}.$$

conica este parabolă.

Cazuri particulare. $x = \dfrac{a_1t^2 + b_1t + c_1}{a_3t^2 + b_3t + c_3}$, $\quad y = \dfrac{a_2t^2 + b_2t + c_2}{a_3t^2 + b_2t + c_3}$.

Coeficientul unghiular al tangentei este

$$m = \frac{y'}{x'} = \frac{(a_2b_3 - a_3b_2)t^2 + 2(a_2c_3 - a_3c_2)t + b_2c_3 - c_2b_3}{(a_1b_3 - a_3b_1)t^2 + 2(a_1c_3 - a_3c_1)t + b_1c_3 - c_1b_3}. \tag{5}$$

Dacă m = constant pentru orice t conica devine dreaptă.
Condițiile ca m = constant pentru orice valoare a lui t sînt

$$\frac{a_2b_3 - a_3b_2}{a_1b_3 - a_3b_1} = \frac{a_2c_3 - a_3c_2}{a_1c_3 - a_3c_1} = \frac{b_2c_3 - b_3c_2}{b_1c_3 - c_1b_3} \tag{6}$$

Condițiile (6) sînt de fapt consecințele unei singure condiții care se poate găsi astfel: Pentru ca să se reducă la o dreaptă, coordonatele x, y trebuie să verifice ecuația ei, oricare ar fi t. Deci dacă $Ax + By + C = 0$ este ecuația dreptei, trebuie să putem determina pe A, B, C pentru ca

$$(Aa_1 + Ba_2 + Ca_3)t^2 + (Ab_1 + Bb_2 + Cb_3)t + Ac_1 + Bc_2 + Cc_3 = 0.$$

Aceasta cere ca sistemul omogen:

$$Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0\,;\ Ab_1 + Bb_2 + Cb_3 = 0\,;\ Ac_1 + Bc_2 + Cc_3 = 0$$

să admită soluții diferite de cea banală, deci

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ sau } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Se știe însă că dacă un determinant e nul, atunci complementele algbrice a două linii (coloane) oarecare sînt proporționale și tocmai acest lucru este exprimat de (6). Prin urmare, condiția sub forma cea mai simplă este ca determinantul coeficienților să fie nul.

3. *Determinarea conicei.* Intersectînd conica cu o dreaptă paralelă cu Oy, $x = \lambda$ și cu una paralelă cu Ox, $y = \mu$ obținem două ecuații în t, care determină domeniul de definiție al conicei și valorile lui y între care există funcția.

Astfel pentru $x = \lambda$, $y = \mu$, avem:

$$\frac{a_1t^2 + b_1t + c_1}{a_3t^2 + b_3t + c_3} = \lambda,\ \frac{a_2t^2 + b_2t + c_2}{a_3t^2 + b_3t + c_3} = \mu\,;$$

$$(a_1 - a_3\lambda)t^2 + (b_1 - b_3\lambda)t + c_1 - c_3\lambda = 0\,;$$

$$(a_2 - a_3\mu)t^2 + (b_2 - b_3\mu)t + c_2 - c_3\mu = 0.$$

Conica există pentru valorile lui λ și μ pentru care aceste ecuații admit rădăcini reale, adică

$$\Delta_1 \geqslant 0 \qquad \text{și} \qquad \Delta_2 \geqslant 0;$$

$$(b_1 - b_3\lambda)^2 - 4(a_1 - a_3\lambda)(c_1 - c_3\lambda) \geqslant 0, \text{ respectiv}$$

$$(b_2 - b_3\mu)^2 - 4(a_3 - a_3\mu)(c_2 - c_3\mu) \geqslant 0.$$

Pentru valorile lui t pentru care $\Delta_1 = 0$ și $\Delta_2 = 0$, obținem un dreptunghi. Laturile dreptunghiului sînt tangente la conică.

În cazul elipsei, conica este cuprinsă în acest dreptunghi.

În cazul hiperbolei, conica este situată în afara dreptunghiului.

În cazul parabolei, laturile dreptunghiului sînt aruncate la infinit.

Centrul dreptunghiului în cazul elipsei sau hiperbolei este centrul conicei.

Exemple.

1. *Elipsă.* $x = \dfrac{t^2 - 4t + 3}{t^2 - 4t + 5}$; $y = \dfrac{t^2 - 3t + 8}{t^2 + 4t + 5}$.

Făcînd $x = \lambda$, $y = \mu$ obținem:

$$x \in [-1, +1]; y \in \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right].$$

Coeficientul unghiular al tangentei este

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y'}{x'} = \frac{t^2 - 3t + 1}{2(t-2).} \qquad \operatorname{tg}\alpha = 0, \text{ pentru } t = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2},$$

$$\text{pentru care } x = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}; \; y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \infty \text{ pentru } t = 2 \text{ și } t = \infty,$$

pentru care $x = \pm 1$; $y_1 = 1$; $y_2 = 0$.

Centrul elipsei se află în $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$.

Pentru a determina axele intersectăm elipsa cu o dreaptă variabilă ce trece prin centrul ei:

$$y - \frac{1}{2} = \lambda x,$$

adică

$$(1 - 2\lambda)t^2 - 8(1 - \lambda)t + 11 - 6\lambda = 0 \qquad (1)$$

Determinăm pe λ astfel ca pentru același t tangenta să aibă direcție perpendiculară pe direcția λ.,

$$\frac{t^2 - 3t + 1}{2(t-2)} = -\frac{1}{\lambda}$$

sau

$$\lambda t^2 - (3\lambda - 2)t + \lambda - 4 = 0 \qquad (2)$$

Ecuațiile (1) și (2) au rădăcini egale cînd

$$\frac{1-2\lambda}{\lambda} = \frac{8(1-\lambda)}{3\lambda-2} = \frac{11-6\lambda}{\lambda-4}, \text{ de unde } \lambda_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{17}}{4}.$$

Ecuațiile axelor sînt $y = \frac{1\pm\sqrt{17}}{4}\,; x + \frac{1}{2}$.

Reprezentarea elipsei este dată în fig. 1.

2. *Hiperbolă.* $x = \frac{t^2-7t+12}{t^2-3t+2}$, $y = \frac{t^2+3t+2}{t^2+3t+2}$.

$x\,(\in -\infty, -7-4\sqrt{3}\,]\cup[-7+4\sqrt{3}, \infty)$, $y \in (-\infty, -17-12\sqrt{2}\,]\cup[-17+12\sqrt{2}, \infty)$

Direcțiile asimptotice: $m_1 = \lim\limits_{t\to 1} \frac{t^2+3t+2}{t^2-7t+12} = 1$, $m_2 = \lim\limits_{t\to 2} \frac{t^2+3t+2}{t^2-7t+12} = 6$,

$n_1 = -10$, $n_2 = 25$.

Ecuațiile asimptotelor sînt $y = x - 10$; $y = 6x + 25$.

Centrul se află în punctul lor de intersecție ($x = -7$, $y = -17$).

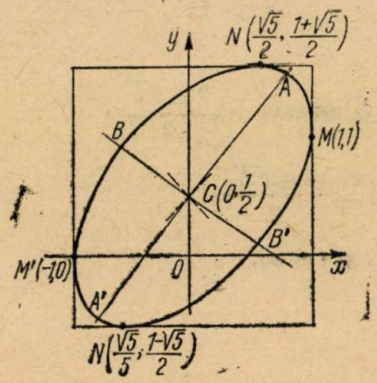


Fig. 1

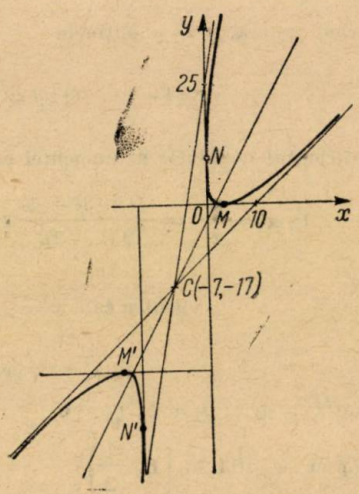


Fig. 2

Axele hiperbolei sînt bisectoarele asimptotelor.
Ținînd seama de aceste elemente, obținem graficul din fig. 2.

3. *Parabola.* $x = \frac{t^2-7t+12}{t^2-2t+1}$, $y = \frac{t^2+2t+3}{t^2-2t+1}$;

$$x \in \left[-\frac{1}{24}, \infty\right), \quad y \in \left[\frac{1}{3}, \infty\right).$$

$$m = \lim \frac{t^2+2r+3}{t^2-7t+12} = 1, \quad n = \infty.$$

Determinăm vîrful pentru acel t în care tangenta este perpendiculară pe direcția asimptotică.

Vîrful are coordonatele

$$x = \frac{77}{96}, \quad y = \frac{113}{96}.$$

Ecuaţia axei este $y - \frac{113}{96} = x - \frac{77}{96}$.

Cu aceste elemente putem trasa forma curbei (fig. 3).

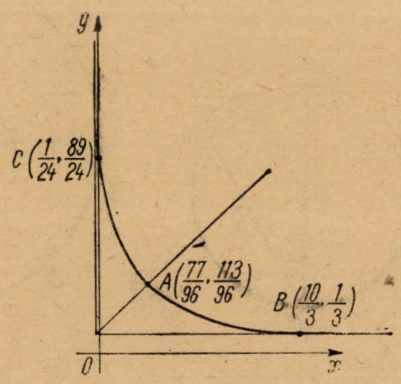


Fig. 3

NOTE MATEMATICE

26. Unele observaţii cu privire la poligoanele regulate

Problema înscrierii poligoanelor regulate în cerc, cu ajutorul riglei şi compasului, se rezolvă în cazul general pe baza teoremei lui *Gauss* (1777—1855) : Pentru ca un poligon regulat cu n laturi să poată fi înscris într-un cerc este suficient ca n să fie un număr prim de forma $2^k + 1$, unde k este număr natural ($3 = 2 + 1$; $5 = 2^2 + 1$; $17 = 2^4 + 1$, dar nu $9 = 2^3 + 1$, care este compus).

Asociind această afirmaţie cu faptul că împărţirea cercului se poate realiza cu rigla şi compasul şi în cazul cînd $n = 2^k$ ajungem la concluzia că împărţirea cercului în n părţi egale se poate face cînd n, descompus în factori conţine numai factori de forma $2^k + 1$ şi 2^l.

Calculele necesare pentru stabilirea formulelor laturilor şi apotemelor pot fi considerabil reduse dacă ţinem seama de unele observaţii şi anume :

a) Dacă două coarde subîntind arce suplementare şi dacă una dintre ele reprezintă latura unui poligon regulat înscris în cerc atunci şi cealaltă coardă reprezintă latura unui astfel de poligon.

b) Dacă laturile a două poligoane regulate înscrise în cerc subîntind arce suplementare atunci apotema unuia este jumătate din latura celuilalt (fig. 1).

Într-adevăr : $OM = \frac{BC}{2}$ şi $ON = \frac{AB}{2}$ (proprietatea liniei mijlocii).

Aplicînd aceste observaţii în cazul poligoanelor particulare constatăm că :

1) Elementele triunghiului echilateral înscris se pot deduce imediat din elementele exagonului regulat înscris (fig. 2).

Deci din $l_6 = AB = R$ şi $a_6 = OM = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

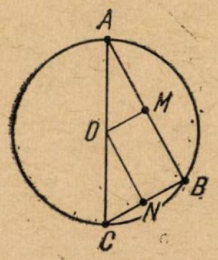


Fig. 1

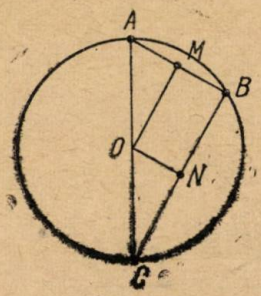


Fig. 2

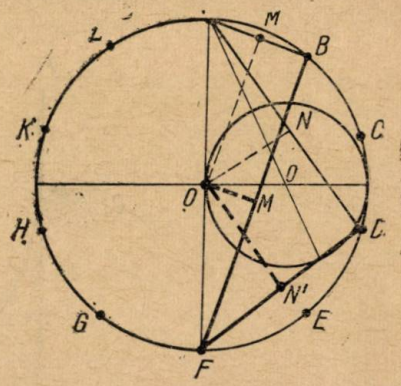


Fig. 3

obţinem imediat :

$$l_3 = BC = 2OM = 2.\frac{R\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3} \ ;$$

$$a_3 = ON = \frac{AB}{2} = \frac{R}{2} \ .$$

2) Elementele pentagonului regulat convex şi elementele pentagonului regulat stelat se pot deduce uşor, pe baza observaţiile anterioare, din elementele celor două decagoane regulate înscrise în cerc (fig. 3).

Ştim că dacă un cerc este împărţit în zece arce egale (ca în figură), atunci avem :

$$l_{10} = AB \ ; \quad a_{10} = OM \ ; \qquad l'_{10} = AD \ ; \quad a'_{10} = ON \ ;$$
$$l_5 = DF \ ; \quad a_5 = ON', \qquad l'_5 = BF \ ; \quad a_5 = OM.$$

Considerînd stabilite formulele pentru decagoane :

$$l_{10} = \frac{R\sqrt{5}-1}{2} \ ; \qquad a_{10} = \frac{R\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \text{ şi}$$

$$l'_{10} = \frac{R\sqrt{5}+1}{2} \ ; \qquad a'_{10} = \frac{R\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \ .$$

pentru pentagoane putem proceda astfel :

a) În triunghiul ADF : $l_5 = DF = 2ON = 2a'_{10} = \frac{R\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$;

$$a_5 = \frac{1}{2}.AD = \frac{1}{2} \quad l'_{10} = \frac{1}{2}\,\frac{R(\sqrt{5}+1)}{2} = \frac{R(\sqrt{5}+1)}{4} \ .$$

b) În triunghiul ABF:

$$l'_5 = BF = 2OM = 2a_{10} = 2\,\frac{R\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = \frac{R\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2},$$

$$a'_5 = OM' = \frac{1}{2}l_{10} = \frac{1}{2}\,\frac{R(\sqrt{5}-1)}{2} = \frac{R\sqrt{5}-1}{4}.$$

Elementele octogonului stelat le putem deduce priu acest procedeu din elementele octogonului convex (care se calculează pe baza formulei laturii pătratului înscris în cerc, folosind formula:

$$l_{2n} = \sqrt{R\,(2R - \sqrt{4R^2 - l_n^2})}$$

Într-adevăr dacă știm că l_8 și l'_8 sînt coarde care subîntind arce suplementare, calculînd pe $l_8 = AB = R\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}$ și $a_8 = OM = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$, în triunghiul ABE avem:

$$l'_8 = BE = 2OM = 2a_8 = R\sqrt{2+\sqrt{2}},$$

$$a'_8 = ON = \frac{1}{2}\cdot AB = \frac{1}{2}\cdot l_8 = \frac{1}{2}\cdot R\,\sqrt{2\sqrt{-2}}\,.$$

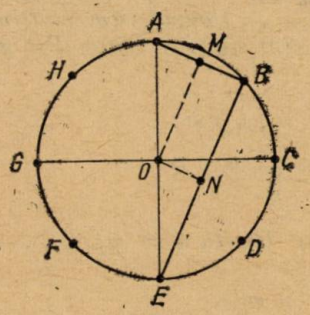


Fig. 4

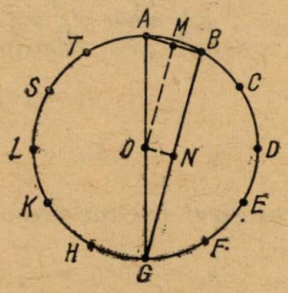


Fig. 5

4) Elementele dodecagonului regulat stelat se pot deduce din elementele dodecagonului regulat convex înscris în cerc; (acestea se calculează cu ajutorul formulei $l_{2n} = \sqrt{R(2R - \sqrt{4R^2 - l_n^2})}$.

În figura 5 avem:

$$l_{12} = AB = R\sqrt{2-\sqrt{3}}\;; \qquad a_{12} = OM = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}\;.$$

Din triunghiul ABG deducem:

$$l'_{12} = BG = 2a_{12} = R\sqrt{2+\sqrt{3}}\;;$$

$$a'_{12} = ON = \frac{1}{2}\,AB = \frac{1}{2}\cdot R\sqrt{2-\sqrt{3}}\,.$$

Aplicație. Din cele de mai sus rezultă că pe baza unui număr redus de calcule putem stabili și reține ușor formule care reprezintă elementele principale ale poligoanelor regulate studiate.

Ca aplicație, ne vom opri asupra unui tip de probleme privind trapezul avînd ca baze laturi ale unor poligoane regulate — înscrise în cerc — care subîntind arce suplementare. Putem considera trapeze cu bazele : $(l_6$ și $l_3)$, $(l_{10}$ și $l'_5)$, $(l'_{10}$ și $l_5)$, $(l'_8$ și $l_8)$ $(l'_{12}$ și $l_{12})$. Vom da un exemplu :

Să se calculeze aria trapezului format din două coarde paralele așezate de aceeași parte a centrului, una fiind egală cu latura decagonului regulat convex, iar cealaltă cu latura pentagonului stelat.

Rezolvare : Folosind formulele de mai sus, pe figura rezultată din datele problemei, avem :

$$A = \frac{1}{2}(l'_5 + l_{10}) \cdot (a_{10} - a'_5) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{R\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2} + \frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}\right] \cdot \left[\frac{R\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} - \frac{R(\sqrt{5}-1)}{4}\right] = \frac{R^2}{4}(1+\sqrt{5}) \cdot$$

Justin Cornea, Arad

PROBLEME REZOLVATE

Problema 7227

Fie șirurile $p_1, p_2, p_3, \ldots$ *și* $q_1, q_2, q_3, \ldots$ *cu proprietățile* $p_j + q_j = const = k > 0$ *și* $0 < p_j < k$ $(j = 1, 2, 3, \ldots)$. *Considerăm mulțimea elementelor* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *unde* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *sînt numere reale. Fie șirul infinit* $u_1, u_2, u_3, \ldots$ *definit prin relațiile* :

$$u_1 = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}) \text{ și}$$

$$x_{(j+1)} = \frac{p_j x_{jm} + q_j x_j (m+1)}{k}$$

Să se arate că șirul este convergent și are limita $u = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *unde*

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_n = \frac{1}{n}(x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n}).$$

Dan Voiculescu, elev București

Soluția autorului. — Vom nota cu X_j și cu x_j cel mai mare, respectiv cel mai mic dintre numerele $x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{jn}$. Fie $x_{j1} = X_j$ și $x_{jm} = x_j$. Să observăm că :

$$x_{j1} \geqslant x_{(j+1)1} \geqslant x_{(j+2)1} = \ldots \quad \text{și}$$

$$x_{jm} \leqslant x_{(j+1)m} \leqslant x_{(j+2)m} =$$

Dacă $X_j > x_j$ atunci avem :

$$x_{(j+1)(m+1)} = \frac{p_j x_j + q_j x_{j(m+1}}{k} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{p_j x_j + q_j x_j}{k} < \frac{p_j x_j + q_j x_j}{k} = X_j$$

Analog avem :

$$x_{(j+2)(m+2)} < X_j$$
$$x_{(j+3)(m+3)} < X_j$$
$$\ldots\ldots\ldots \text{etc.}$$

unde $x_{ab} = x_{ac}$ dacă $b - c = Mn$.

Dintre numerele $m+1,\ m+2, \ldots,\ m+n$ unul dă restul 1 la împărțirea prin n. Deducem că există t pozitiv $= n$ astfel încît $x_{(j+t)1} < X_j$. Pe baza relației (1) deducem că $x_{(j+n)1} < X_j$. Dacă raționăm analog pentru toate numerele x_{jm} egale cu X_j ajungem la concluzia că $X_j > X_{j+n}$ (se va ține seamă că aceasta are loc numai cînd $X_j > x_j$). La fel se stabilește că $x_j < x_{j+n}$. Putem scrie și relațiile :

$$X_1 > X_{n+1} > X_{2n+1} > \ldots \qquad (2)$$
$$x_1 < x_{n+1} < x_{2n+1} < \ldots$$
$$X_1 \geqslant X_2 \geqslant X_3 \geqslant \ldots$$
$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots$$

Se vede de aici că șirurile $X_1,\ X_2,\ X_3, \ldots$ și $x_1,\ x_2,\ x_3 \ldots$ converg și tind către aceeași limită, deoarece relațiile (2) au loc pentru X_{ln+1} și x_{la+1}, numai dacă $X_{(l-1)n+1} > x_{(l-1)n+1}$.

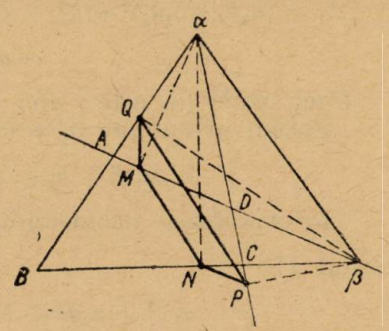
Sirurile $X_1,\ X_2,\ X_3, \ldots$ și $x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots$ fiind convergente către aceeași limită, deducem că și orice șir $x_{1m},\ x_{2m},\ x_{3m}, \ldots$ va fi convergent. Există deci, limita $u = (y_1,\ y_2, \ldots, y_n)$ unde $y_1 = y_2 = \ldots = y_n$.

Se observă că :

$$x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2k} = \ldots = x_{j1} + x_{j2} +$$
$$+ \ldots + x_{jn} = \ldots = y_1 + y_2 + \ldots + y_n, \text{ deci,}$$
$$y_1 = y_2 = \ldots = y_n = \frac{1}{n}(x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n}).$$

Problema 7231

Se dă patrulaterul $ABCD$ și fie $\alpha = (AB,\ CD)$ și $\beta = (AD,\ BC)$. Se proiectează α pe AD și BC respectiv în M și N, iar β pe CD și AB în P și Q respectiv. In ce caz patrulaterul $MNPQ$ este trapez?



Soluție dată de *Alex. Filipoiu*, elev Buzău.

Vom demonstra mai întîi că patrulaterul $MNPQ$ este inscriptibil. Într-adevăr, din M, N, P, Q, segmentul $\alpha\beta$ se vede sub un unghi de 90°. Deci punctele M, N, P, Q se află pe un cerc cu centrul în mijlocul segmentului $\alpha\beta$. Rezultă, conform proprietății de mai sus, că patrulaterul $MNPQ$ nu poate fi, în particular, decît trapez isoscel. În acest caz avem $MQ = NP$ și

deci unghiurile $Q\alpha M$ şi $N\beta P$ sînt egale. Rezultă, întrucît $\sphericalangle \alpha MA = \sphericalangle \beta PC = 90°$ că unghiurile αAM şi βCP sînt egale.

Deoarece $\sphericalangle \beta CP = \sphericalangle BCD$, obţinem :

$$\sphericalangle BCD + \sphericalangle BAD = 180°,$$

ceea ce arată că patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil.

Dacă luăm de exemplu, unghiurile A şi C ascuţite, procedînd analog vom obţine

$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD.$$

Deci, în concluzie, pentru ca $MNPQ$ să fie trapez isoscel, trebuie ca patrulaterul $ABCD$ să aibă două unghiuri opuse egale sau suplementare.

Problema 7232

Să se determine relaţia dintre coeficienţii a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 *astfel încît ecuaţia*

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + 2a_3x_1x_2 + 2a_4x_1 + 2a_5x_2 + a_6 = 0$$

să fie satisfăcută de o singură pereche de numere reale x_1, x_2.

E. Popa, elev, Iaşi

Soluţia autorului. Ordonînd după puterile lui x_1, trebuie ca ecuaţia

$$a_1x_1^2 + 2x_1(a_3x_2 + a_4) + a_2x_2^2 + 2a_5x_2 + a_6 = 0$$

să aibă o singură rădăcină reală, deci $\Delta = 0$. Dar

$$\Delta = (a_3x_2 + a_4)^2 - a_1(a_2x_2^2 + 2a_5x_2 + a_6) = x_2^2(a_3^2 - a_1a_2) +$$
$$+ 2x_2(a_3a_4 - a_1a_5) + a_4^2 - a_1a_6.$$

Ecuaţia :

$$x_2^2(a_3^2 - a_1a_2) + 2x_2(a_3a_4 - a_1a_5) + a_4^2 - a_1a_6 = 0$$

trebuie să aibă la rîndul ei o singură rădăcină reală, deci $\Delta_1 = 0$.

Dar,

$$\Delta_1 = (a_3a_4 - a_1a_5)^2 - (a_4^2 - a_1a_6)(a_3^2 - a_1a_2) = a_1^2a_5^2 + a_1a_2a_4^2 + a_1a_3^2a_6 -$$
$$- a_4^2a_2a - 2a_1a_3a_4a_6$$

Deci, condiţia este : $a_1^2a_5^2 + a_1a_2a_4^2 + a_1a_3^2a - a_1^2a_2a - 2a_1a_3a_4a_5 = 0$

Putem presupune $a_1 \neq 0$ şi atunci relaţia între coeficienţi este :

$$a_1a_5^2 + a_2a_4^2 + a_6a_3^2 = a_1a_2a_6 + 2a_3a_4a_5.$$

Interpretarea geometrică este următoarea : considerînd curba de gradul II

$$a_1x^2 + a_2y^2 + 2a_3xy + 2a_4x + 2a_5y + a_6 = 0,$$

în cazul cînd există relația stabilită între coeficienți, curba se reduce la un punct și reciproc, dacă curba se reduce la un punct, atunci există această relație între coeficienți.

Problema 7233

Fără extragerea numerică a rădăcinilor patrate, cubice și de ordin cinci, să se arate că :

$$\sqrt[5]{3+5\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}}+\sqrt[5]{3+5\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}}=1$$

Ion I. Cristea

Soluție dată de *Bogdan Lungulescu*, elev Pitești.

$$\sqrt[3]{2\pm\sqrt{5}}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{1\pm3\sqrt{5}+3\cdot5\pm5\sqrt{5}}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{(1\pm\sqrt{5})^3}=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})$$

astfel că identitatea revine la a arăta că :

$$\sqrt[5]{3+5\cdot\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})}+\sqrt[5]{3+5\cdot\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})}=1.$$

Mai departe :

$$\sqrt[5]{3+5\cdot\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})}=\sqrt[5]{\frac{1}{2}(11\pm5\sqrt{5})}=\frac{1}{2}\sqrt[5]{176\pm80\sqrt{5}}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt[3]{(1\pm\sqrt{5})^3}=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$$

încît identitatea se reduce la

$$\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})+\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})=1.$$

Problema 7234

Să se rezolve ecuația :

$$\frac{x-a_1}{m-a_1}+\frac{x-a_2}{m-a_2}+\ldots+\frac{x-a_{n-1}}{m-a_{n-1}}+\frac{x-a_n}{m-a_n}=\frac{nx}{m}.$$

unde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt numere reale pozitive diferite de zero și mai mici decît m.

Dan Voiculescu, elev București

Soluție dată de *Eugen Popa*, elev Iași.

Ecuația este echivalentă cu :

$$\left(\frac{x-a_1}{m-a_1}-1\right)+\left(\frac{x-a_2}{m-a_2}-1\right)+\ldots+\left(\frac{x-a_{n-1}}{m-a_{n-1}}-1\right)+\left(\frac{x-a_n}{m-a_n}-1\right)=\frac{nx}{m}-n$$

sau

$$\frac{x-m}{m-a_1}+\frac{x-m}{m-a_2}+\ldots+\frac{x-m}{m-a_{n-1}}+\frac{x-m}{m-a_n}=\frac{n(x-m)}{m}$$

ceea ce se mai scrie :

$$(x-m)\left(\frac{1}{m-a_1}+\frac{1}{m-a_2}+\ldots+\frac{1}{m-a_{n-1}}+\frac{1}{m-a_n}-\frac{n}{m}\right)=0$$

Să arătăm că $a_1, a_2, \ldots, a_n$ îndeplinind condițiile din enunț,

$$\left(\frac{1}{m-a_1}+\frac{1}{m-a_2}+\ldots+\frac{1}{m-a_n}-\frac{n}{m}\right)\neq 0.$$

Într-adevăr, din enunț avem :

$\frac{1}{m-a_1}>\frac{1}{m}$; $\frac{1}{m-a_2}>\frac{1}{m}$; $\ldots$; $\frac{1}{m-a_n}>\frac{1}{m}$ sau, adunînd, avem :

$$\left(\frac{1}{m-a_1}+\frac{1}{m-a_2}+\ldots+\frac{1}{m-a_n}\right)>\frac{n}{m}.$$

Deci, ecuația admite singura soluție $x=m$.

Problema 7235

Să se găsească numărul abc format din trei cifre diferite de zero, care să fie media aritmetică a numerelor $\overline{bca}$ și $\overline{cab}$.

I. Teodorescu, Galați

Soluție dată de *V. N. Răduinea*, elev Constanța

Cele trei numere scrise cu cifrele a, b, c sînt : $100a+10b+c$; $100b+10c+a$; $100c+10a+b$.

Primul este media aritmetică a celorlalte dacă avem :

$2(100a+10b+c)=100b+10c+a+100c+10a+b$,

relație care se reduce la : $7a=3b+4c$.

Cifrele b, c trebuie să fie diferite și așa ca expresia $3b+4c$ să fie divizibilă cu 7. Dacă luăm $b=1, 2, \ldots, 9$ avem următoarele rezultate :

pentru $b=1$, $c=8$, $a=5$, avem soluția 518 ;
pentru $b=2$, $c=9$, $a=6$ avem soluția 629 ;
pentru $b=3, 4, 5, 6, 7$, nu avem soluție ;
pentru $b=8$, $c=1$, $a=4$ avem soluția 481 ;
pentru $b=9$, $c=2$, $a=5$ avem soluția 592.

Problema are deci patru soluții reprezentate prin numerele : 518, 629, 481 și 592.

Problema 7236

Să se arate că dacă $\frac{a-bp}{ap-b} = \frac{c-dq}{cq-d} = \frac{m}{n}$, *atunci avem*

$$\frac{am+bn}{cm+dn} = \frac{a+b}{c+d} \cdot \frac{q+1}{p+1}$$

G. G. Niculescu, student București

Soluție dată de *N. Manolache*, elev București.

Primul și ultimul raport ne dau succesiv :

$$amp - bm = an - bnp\,;\quad p(am+bn) = an+bm\,;$$

$$(p+1)(am+bn) = (am+an)+(bm+bn)\,;\quad (p+1)(am+bn) = a(m+n)+b(m+n)$$

$$(p+1)(am+bn) = (a+b)(m+n). \qquad (1)$$

La fel pentru ultimele două rapoarte, scriem succesiv :

$$cmq - dm = cn - dnq\,;\quad q(cm+dn) = cn+dm\,;\quad (q+1)(cm+dn) = (cm+cn)+(dm+dn),$$

$$(q+1)(cm+dn) = c(m+n)+d(m+n),$$

$$(q+1)(cm+dn) = (c+d)(m+n). \qquad (2)$$

Împărțind între ele relațiile (1) și (2), obținem :

$$\frac{p+1}{q+1} \cdot \frac{am+bn}{cm+dn} = \frac{(a+b)(m+n)}{(m+n)(c+d)} = \frac{a+b}{c+d}.$$

care este relația cerută.

Problema E : 2357

Grîul cu care era plină o magazie de formă paralelipipedică, cu aria laterală de 188,4 m², înălțimea de 4m și lungimea bazei cît dublul lățimii ei, a fost mutat într-un siloz cilindric, nou construit, cu diametrul bazei de 10 m. Să se afle pînă la ce înălțime s-a ridicat grîul în siloz, știind că acesta a fost netezit uniform.

I. St. Mușat

Soluție.

Perimetrul bazei paralelipipedului este :

$$P = A_{lat} : 4 = 188{,}44 : 4 = 47{,}1 \text{ m}.$$

Știind că lungimea bazei este cît dublul lățimii, rezultă că în întreg perimetrul lățimea se cuprinde de 6 ori.

Putem afla deci lățimea bazei :

$$l = P : 6; \quad l = 47{,}1 : 6 = 7{,}85 \text{ m}.$$

Lungimea bazei este de :

$$L = 7{,}85 \cdot 2 = 15{,}7 \text{ m}.$$

Volumul magaziei este de :

$$V = L.l.I; \; V = 15{,}7 \cdot 7{,}85 \cdot 4 = 492{,}98 \text{ m}^3.$$

Volumul ocupat de grîu în silozul cilindric este, evident, egal cu volumul magaziei (492,98 m^3).

Înălțimea pînă la care s-a ridicat grîul în silozul cilindric este de :

$$I_1 = V : (\pi R^2).$$

Va trebui să aflăm mai întîi raza bazei cilindrului

$$R = D : 2; \; R = 10 \text{ m} : 2 = 5 \text{ m}.$$

Și acum putem afla înălțimea căutată :

$$I_1 = 492{,}98 : (3{,}14 \cdot 5^2) = 492{,}98 : (3{,}14 \cdot 25) =$$
$$= 492{,}98 : 78{,}50 = 6{,}28 \text{ m}$$

În silozul cilindric, grîul s-a ridcat pînă la înălțimea de 6,28 m.

Problema E : 2359

Trei cooperative agricole de producție au vîndut Statului 257,7 tone de grîu ce au avut contractat. Prima gospodărie a vîndut cu 4,5 tone mai mult decît a doua iar a doua cu 3,6 tone mai mult decît a treia. Să se afle cîte tone de grîu a vîndut Statului fiecare gospodărie?

D. Mîrzan

Soluție. Notăm cu a cantitatea de cereale vîndute de a treia gospodărie și atunci toate cele trei gospodării au vîndut :

$$(a + 3{,}6 + 4{,}5) + (a + 3{,}6) + a = 3a + 11{,}7 \text{ tone}$$

deci $3a + 11{,}7$ t $= 257{,}7$ t și $3a = 246$ t de unde $a = 82$ t.

Problema E : 2364

Doi motocicliști pornesc din orașul A spre B, la interval de 2 ore unul după altul. Știind că raportul vitezelor lor este $\frac{2}{3}$ și că acestea diferă cu 20 km pe oră, să se afle distanța dintre aceste orașe cunoscînd că al doilea motociclist ajunge în orașul B cu un sfert de oră înaintea primului.

Grăjdeanu Petru, Sc. gen. de 8 ani Tansa, regiunea Iași

Soluție. Raportul vitezelor celor doi motocicliști fiind $\frac{2}{3}$, rezultă că viteza primului este formată din 2 părți, iar a celui de al doilea din 3 părți.

Diferența dintre vitezele lor este $3 - 2 = 1$ parte, care reprezintă 20 kilometri.

Rezultă că viteza primului este $20 \times 20 = 40$ km/oră, iar a celui de al doilea, $3 \times 20 = 60$ km/oră.

În cele două ore care s-au scurs pînă la plecarea celui de al doilea motociclist, primul a parcurs $40 \times 2 = 80$ km.

Al doilea motociclist se apropie de primul în fiecare oră cu $60 - 40 = 20$ km.

Rezultă că al doilea motociclist îl ajunge din urmă pe primul după $80 : 20 = 4$ ore.

Deci al doilea motociclist îl ajunge pe primul după ce acesta parcurge $80 + 160 = 240$ km.

Aflăm distanța de la kilometrul 240 pînă în orașul B.

Primul motociclist parcurge 1 km în timp de $\frac{60}{40} = 1\frac{1}{2}$ minute.

Al doilea motociclist parcurge 1 km în timp de $\frac{60}{60} = 1$ minut.

Al doilea motociclist ia un avans de $1\frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}$ minut pe distanța de 1 km.

Aflăm pe ce distanță va lua al doilea motociclist un avans de 15 minute:

$$15 : \frac{1}{2} = 15 \cdot \frac{2}{1} = 30 \text{ km.}$$

Deci, de la kilometrul 240 pînă în orașul B sînt 30 km.

Rezultă că distanța între orașele A și B este de $240 + 30 = 270$ km.

Verificare: Călătoria primului motociclist de la A la B durează 2 ore + 4 ore + $(30 \cdot \frac{3}{2}$ min$) = 2$ ore + 4 ore + 45 min $= 6\frac{3}{4}$ ore. Avem $6\frac{3}{4}$ ore $\times$ 40 km/oră $= \frac{27}{4} \cdot 40 = 270$ km.

Călătoria celui de al doilea motociclist de la A la B durează 4 ore + + (30 minute) $= 4\frac{1}{2}$ ore. Avem $4\frac{1}{2}$ ore $\times 60$ km/oră $= \frac{9}{2} \cdot 60 = 270$ km.

Problema E : 2365

O cooperativă agricolă de producție a depozitat cantitatea de 120 tone de grîu în două magazii. Dacă din prima magazie s-a scos $\frac{1}{4}$ din grîul ce se afla acolo, iar din a doua s-a scos 25%, atunci în magazia a doua a rămas de 3 ori mai mult grîu decît în prima. Să se afle ce cantitate de grîu s-a depozitat în fiecare magazie?

D. Mîrzan, Bujoreni

Soluție. Notăm cu x tone cantitatea de grîu din prima magazie și cu y tone cantitatea din a doua magazie.

$$x + y = 120,$$

$$3\left(x - \frac{x}{4}\right) = y - \frac{25y}{100}.$$

Aducem ecuația a doua la o formă mai simplă :

$$3\left(\frac{4x}{4} - \frac{x}{4}\right) = y - \frac{y}{5}\ ;\ 9x - 3y = 0.$$

De unde

$$x = 30 \text{ tone}\ ;\ y = 90 \text{ tone}.$$

CHESTIUNI DE EXAMEN

7718. Coordonatele unui mobil M în raport cu un reper ortogonal, sînt definite, în funcție de t ($t > 0$) prin formulele următoare

$$x = \frac{l}{t},\ y = t^2.$$

a) Să se scrie ecuația traiectoriei sale. Să se construiască această curbă. Să se arate sensul deplasării lui M pe această curbă.

b) Să se calculeze componentele vectorului viteză și vectorului accelerație ai mobilului M la un moment oarecare al mișcării sale.

Să se determine hodograful acestei mișcări, construit să plece din originea 0 a coordonatelor.

c) Să se construiască poziția mobilului M în momentul $t = 1$, la fel și vectorul viteză și vectorul său accelerație în acest moment.

Bacalaureat, subiect tip Franța, 1964

7719. Un sac conține 20 bile numerotate cu primele 20 numere întregi ; 10 bile albe numerotate de la 1 la 10 și 10 bile negre numerotate de la 11 la 20. Se extrag din sac, simultan, două bile.

a) Care este probabilitatea p_1, ca cele două bile să fie albe? Care este probabilitatea p_2 ca cele două bile să fie de culori deosebite? Care este valoarea lui $p_2 + 2p_1$? S-ar putea prevedea rezultatul?

b) Care este probabilitatea p ca cel puțin una din două bile să fie numerotate cu un multiplu de 3?

Bacalaureat, Réunion, iunie 1965

7720. În această problemă litera α arată un număr real dat, strict pozitiv și litera λ un parametru variabil aparținînd mulțimii numerelor

reale. Se consideră într-un reper cartezian ortogonal, punctele fixe A $(0, \alpha)$ și B $(0, -\alpha)$, de asemenea mulțimea Φ a cercurilor $C(\lambda)$ de ecuație

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x - \alpha^2 = 0.$$

1. Să se arate că mulțimea Φ este un fascicul de cercuri, care se vor preciza. Fiind dat un cerc $C(\lambda)$, cu $\lambda \neq 0$, să se arate că există un cerc $C(\lambda')$, și numai unul, ortogonal cu $C(\lambda)$ și să se construiască acest cerc.

Să se exprime λ' în funcție de λ și de α. Să se studieze cazul $\lambda = 0$.

2. Fie I inversiunea de pol B și de putere $4\alpha^2$.

a) Să se arate că această inversiune transformă cele două cercuri ortogonale $C(\lambda)$ și $C(\lambda')$ în două drepte perpendiculare (Δ) și (Δ') trecînd prin A.

b) (D) fiind o tangentă comună exterioară celor două cercuri ortogonale $C(\lambda)$ și $C(\lambda')$, fie Ω cercul invers al lui (D) în inversiunea I și fie ω centrul său. Să se arate că raportul distanțelor la de punctul ω la punctele A și B este constant cînd λ variază. Să se deducă că mulțimea punctelor ω este un cerc (Γ) aparținînd fasciculului conjugat fasciculului Φ.

c) Să se determine ecuația cercului (Γ) și coordonatele centrului său. Să se calculeze raza.

3. a) Să se calculeze puterea punctului B față de cercul (Γ). Să se determine centrul și raza cercului (Γ'), inversul cercului (Γ) în inversiunea I.

b) Însemnînd prin ω' inversul lui ω în inversiunea I, să se arate că dreapta (D) este mediatoarea segmentului $B\omega'$. Să se deducă că dreapta (D) este tangentă la o conică. Să se determine ecuația acestei conice.

Bacalaureat, Paris, iunie 1965

7721. Fie funcția

$$y = \frac{ax^2}{x^2 + bx + c}.$$

a) Să se determine această funcție în așa fel ca graficul să aibă ca asimptote: $y = 1$ și $x = 1$, $x = 2$.

b) Să se studieze variația funcției și să se construiască curba reprezentativă (C) (axe ortogonale).

c) Fie (Γ) curba de ecuație $y = k(x + 1)(x + 2)$, k fiind constantă

Să se formeze ecuația absciselor punctelor de intersecție ale curbelor (C) și (Γ). Să se discute această ecuație.

d) Să se arate că curbele (C) și (Γ) pot fi tangente pentru o valoare a lui k diferită de 0.

Să se construiască (Γ) în această ipoteză. Se cere ecuația tangentei comune în fiecare din punctele de contact.

e) Fie $k = -1$; să se calculeze aria cuprinsă între axa x-ilor și curba (Γ).

Bacalaureat, Nantes, iunie 1965

7722. Se consideră curba (H) de ecuație $xy = 1$, raportată la un sistem de axe ortogonale Ox, Oy.

Fie M_1 și M_2 punctele lui (H) de abscise respectiv x_1 și x_2, astfel ca $0 < x_1 < x_2$.

Paralelele la axele Ox și Oy duse din M_1 și M_2 formează dreptunghiul M_1IM_2J, cu centrul P; tangentele (D_1) și (D_2) la curba (H) în M_1 și M_2 se taie în Q.

a) Să se determine ecuațiile dreptelor (D_1) și (D_2) și coordonatele lui Q. Să se stabilească că punctele O, Q, I, J sînt colineare și că ele formează o diviziune armonică.

b) Să se calculeze, în funcție de x_1 și x_2, aria S (pozitivă) cuprinsă între coarda M_1M_2 și arcul M_1M_2 al curbei (H).

Se presupune că M_1 și M_2 descriu partea lui (H) situată în semiplanul $x < 0$, în așa fel ca $\frac{x_2}{x_1} = t$ să rămînă constant și mai mare decît 1.

Să se arate că S este constantă, la fel ca și produsul coordonatelor lui Q. Care este mulțimea punctelor Q?

c) Să se calculeze derivata funcției f astfel ca $S = f(t)$. Să se calculeze limita $u = \frac{S}{t}$ cînd $t \to \infty$, apoi aceea a produsului $S = ut$.

Să se deducă variația lui S în funcție de t cînd $t \geqslant 1$ (nu se cere graficul) și să se arate că, dacă S este constant, t este constant.

d) t rămînînd constant, să se evalueze rapoartele

$$\frac{OP}{OQ} \text{ și } \frac{PQ}{PI}.$$

Care este mulțimea punctelor P? Să se arate că M_1M_2 este tangenta în P la această mulțime și că ariile triunghiurilor IM_1M_2, QM_1M_2 și MO_1M_2 sînt constante.

Bacalaureat, Lille, iunie 1965

7723. a) C_n^p arătînd numărul combinațiilor de n elemente, n fiind număr prim, distincte, luate cîte p, să se arate că, dacă p este diferit de 0 și de n, C_n^p este divizibil cu n.

b) Să se arate că dacă a este întreg, $(a+1)^n - a^n - 1$ este divizibil cu n.

c) Să se arate, raționînd prin recurență asupra lui b, că dacă b este întreg, $b^n - b$ este divizibil cu n.

Bacalaureat, Franța, iunie 1965,

7724. Să se studieze variațiile și să se traseze (în raport cu un sistem de axe ortogonale) curba reprezentativă a funcției

$$y = \frac{1}{3}\cos 3x - \frac{3}{4}\cos 2x.$$

Bacalaureat, Maroc, 1965

7725. Un mobil se deplasează pe o axă, abscisa sa x fiind dată în funcție de timpul t prin relația:

$$x = 5\cos 2t - 3\sin 2t \qquad (E)$$

Să se determine vectorul viteză și vectorul accelerație al acestui mobil.

Să se reprezinte grafic funcția definită de relația (E) pentru $|t| \leqslant 4$.

Care sînt valorile maxime și minime ale lui x?

Bacalaureat, Caen iunie 1965

PROBLEME PROPUSE *

7726. Se dau expresiile algebrice:

$E_1 = 10x^3 + 5x^2 - 4x^2(2x + 1) + 4x^2 + 4x + 1,$

$E_2 = x^2 + 2x + 1 - 2x^2(x + 1)^2.$

a) Să se ordoneze după puterile descrescătoare ale lui x.

b) Să se scrie fiecare expresie sub formă de produs.

c) Să se simplifice fracția algebrică $E_1 : E_2$ și să se calculeze valoarea numerică a fracției obținute după simplificare, pentru $x = -\frac{1}{2}$ și apoi $x = -3\frac{1}{2}$.

Concursul de matematică, cl. a VIII-a, București 1966, *V. Tomuleanu*.

7727. Se dă o prismă hexagonală regulată. Diagonala unei fețe laterale este egală cu 2 cm și face cu muchia laterală un unghi de 30°.

a) Să se calculeze volumul prismei.

b) Să se calculeze aria laterală și volumul piramidei înscrisă în prismă, care are ca bază una din bazele prismei, iar vîrful în centrul celeilalte baze.

c) Se duce un plan P de secțiune, paralel cu bazele, la o distanță egală cu $\frac{2}{3}$ din înălțimea prismei, față de baza piramidei. Să se afle raportul dintre ariile obținute prin secționarea prismei și a piramidei cu planul P.

Concursul de matematică, cl. a VIII-a București, 1966, *C. Mîndru*.

7728. Să se simplifice fracția

$$E = \frac{9a^3 + a(1 - 8b^2) + 4b^3 + b(3a^2 - 1)}{9a^3 + a(1 + 16b^2) + 4b^3 + b(21a^2 + 1)}$$

Florin Borcănescu, Lugoj

IX (7726—7732); X (7733—7739); XI (7740—7753); S (7754—7761). Soluțiile se primesc pînă la 15 decembrie 1966. Problemele pentru clasele IX și X sînt indicate și pentru liceele de specialitate.

7729. Într-un triunghi ascuțitunghic ABC, înălțimea $AD = BC$. Înălțimile din C și B intersectează perpendicularele din B și C pe BC respectiv în E și F.

a) Să se demonstreze că triunghiurile BDE și CDF sînt isoscele.

b) Triunghiul EDF este dreptunghic și AD este bisectoarea unghiu lui EDF.

c) Să se găsească raportul dintre aria triunghiului ABC și aria patrulaterului $BEFC$.

C. Giurgiu, Timișoara

7730. Să se arate că inegalitatea $p^2 - q \geqslant 0$ implică inegalitatea $p^2(4p^2 - 3aq)^2 - q^2 \geqslant 0$.

Gh. Popescu, Lugoj

7731. Triunghiului ABC îi circumscriem un cerc și notăm cu M, N, L mijloacele arcelor BC, CA, AB. Dovediți că dacă H și K sînt punctele unde NM și NL intersectează BC și respectiv AB, atunci $KH \| AC$ și KH trece prin centrul cercului înscris triunghiului ABC.

A V-a Olimpiadă de matematică U.R.S.S., 1965

7732. Se dă un pătrat $ABCD$ și triunghiul AED al cărui vîrf, E se află pe cercul circumscris pătratului. Fie H ortocentrul triunghiului AED și L, M intersecțiile dreptelor BH și CH cu laturile EA și ED. Să se demonstreze că LM este paralelă cu latura BC.

I. Apostolescu, Lugoj

7733. Să se arate că expresia

$$E = \frac{ax^3 + bx + c}{(x-y)(x-z)} + \frac{ay^3 + by + c}{(y-z)(y-x)} + \frac{az^3 + bz + c}{(z-x)(z-y)}$$

este divizibilă cu $x + y + z$. (în legătură cu problema 7287).

Ivan Bloch, elev Lugoj

7734. Fie triunghiul de arie S dreptunghic în A și D și E picioarele înălțimii și medianei duse din A pe ipotenuza BC.

Să se afle laturile triunghiului ABC știind că bisectoarea unui unghi ascuțit împarte triunghiul ADE în părți ale căror arii sînt în raportul 1 : 3.

Gh. Popescu, Lugoj

7735. Să se determine valorile parametrului m din ecuația: $(m-1)x^2 - 2(m+1)x + m = 0$, astfel ca între rădăcinile sale să existe relația:

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} < \frac{1}{\sqrt{m-1}}.$$

Al. Țigănoiu, Timișoara

7736. Dacă a, b, c, d sînt reali și pozitivi și $b \geqslant d$, atunci:

$$(a-1)b \geqslant (c-1)d \text{ implică: } a^b \geqslant c^d.$$

Mathematics Magazine, Buffalo, 1964

7737. Să se arate că numai în baza 10 avem egalitatea

$$\overbrace{11\ldots\ldots1}^{2n} - \overbrace{22\ldots\ldots2}^{n} = \overbrace{(33\ldots.3)^2}^{n}$$

C. Fabian, Hunedoara.

7738. Să se arate că pentru ca polinomul

$$x^{2n} + px^n y^n + qy^{2n}$$

să fie divizibil prin $x^2 + xy + y^2$ este necesar să avem:

$$n = 3k \text{ și } p + q + 1 = 0 \text{ sau } n \neq 3k \text{ și } p = q = 1$$

Aurel Bejancu, student Timișoara

7739. În ce bază 297 este divizor al lui 792?

Mathematics Magazine, Bufallo, 1964

7740. În ecuația $P(x) = 0$, unde $P(x)$ este un polinom în x, înlocuind $x = \frac{ay}{1+y^2}$; $a = 0$, apoi scăpînd de numitori obținem ecuația în y:

$$Q(y) = 0.$$

Să se arate că ecuația $Q(y) = 0$ este o ecuație reciprocă.

G. M.-B 1950. p. 19, *C.I.Ț.*

7741. Să se arate că expresia

$$E = 1 + 2^{4n+3} + 3^{4n+3} + 4^{4n+3}$$

este divizibilă cu 100.

Dorin Murariu, elev Lugoj.

7742. Să se demonstreze că oricare ar fi numerele pozitive $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, are loc inegalitatea:

$$\frac{x^2_2 + x^2_3 \ldots + x^2_n}{x_2 + x_3 \ldots + x} + \frac{x^2_1 + x^2_3 + \cdots + x^2_n}{x_1 + x_3 + \cdots + x_n} + \ldots + \frac{x^2_1 + x^2_2 + \cdots + x^2_{n-1}}{x^1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}} \geqslant$$

$$\geqslant x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

(în legătură cu problema 6821)

M. I. Ștefănescu, elev Caransebeș

7743. Să se arate că într-un triunghi oarecare există relația

$$2\alpha\beta\gamma = R^2 r',$$

unde α, β, γ sînt distanțele de la centrul cercului circumscris la laturile triunghiului, R raza acestui cerc, iar r' raza cercului înscris în triunghiul ortic.

Gh. Popescu, Lugoj

7744. Să se arate că, prin simplificare, funcția definită de fracția:

$$F = \frac{x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 12x + 3}{x^5 - x^4 - 9x + 9}$$

nu-și modifică domeniul de definiție.

Gh. Popescu, Lugoj

7745. Se consideră o sferă și un con circular drept circumscris sferei. Se duc două plane secante față de sferă, paralele cu planul cercului de contact, de o parte și de alta a acestui plan și la egală distanță de el. Să arate că aria zonei cuprinsă între aceste plane, este egală cu aria laterală a trunchiului de con cuprins între aceleași plane.

N.C. Negoescu, Timișoara

7746. Să se găsească baza unui sistem de numerație în care numărul 856 din sistemul zecimal, se scrie 31120. Verificare.

Florica Mageriu, prof. Orșova

7747. Notațiile fiind cele obișnuite într-un triunghi oarecare, să se verifice relația:

$$8\Sigma \frac{1}{r_a l_a^2} = \Sigma \frac{1}{a},$$

unde l_a, l_b, l_c sînt bisectoarele interioare ale triunghiului.

Al. Țigănoiu

7748. Să se aducă la o formă calculabilă prin logaritmi expresia: $E = \cos\alpha\cos\beta\sin(\beta - \alpha) + \cos\alpha\cos\gamma\sin(\gamma - \beta) + \cos\gamma\cos\alpha\sin(\alpha - \gamma)$.

Gh. Popa, student, Timișoara

7749. Dacă x_1, x_2 sînt rădăcinile ecuației $x^2 + x + 1 = 0$, să se demonstreze relația:

$$\left(\frac{1}{x_1}\right)^n + \left(\frac{1}{x_2}\right)^n + x_1^n + x_2^n + \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^n + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^n = (x_1 + x_2)^{2n} + 2(x_1^n + x_2^n - 1)$$

A. Bejancu, Timișoara

7750. Să se afle limita șirului cu termenul general

$$a^n = \frac{C_n^1}{2^n+1} + \frac{C_n^2}{2^n+2} + \frac{C_n^3}{2^n+3} + \ldots + \frac{C_n^n}{2^n+n}$$

Gh. Popescu, Lugoj

7751. În primul cadran al sistemului de axe rectangulare xOy se consideră paralelogramul $OABC$ astfel ca $A(b, 0)$, latura OC să aibă panta 2, latura $AB = 2\sqrt{5}$ unități. Se cere:

a) Aria paralelogramului $OABC$.

b) Ecuațiile laturilor paralelogramului.

c) Fie M un punct variabil pe BC și M_1 piciorul perpendicularei din M pe OC. Să se afle locul lui S, mijlocul segmentului MM_1.

d) Raportul în care împarte M segmentul CB, dacă AS este o paralelă la Oy.

Erich Huniar, Jimbolia

7752. Fiecare din numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ poate să ia în mod independent una din valorile 0, 1 sau -1. Să se găsească minimul sumei tuturor produselor de cîte două asemenea numere.

A V-a Olimpiadă de matematică, U.R.S.S.

7753. Se consideră două drepte paralele D_1 și D_2 tăiate de o secantă Δ, un segment MN cu extremitățile pe D_1 și D_2 care se deplasează paralel cu o direcție dată și un punct fix O, pe Δ. Prin N se duce o paralelă la OM, care întîlnește pe $\triangle$ în P.

a) Să se găsească limita poziției lui P cînd segmentul MN se îndepărtează nemărginit de dreapta A.

b) Din rezultatele obținute la a), să se examineze cazuri particulare deosebite în legătură cu pozițiile celor trei drepte și direcția lui MN. În cazul cînd MN este paralel cu Δ, să se dea o explicație geometrică rezultatului.

c) Care este locul geometric al intersecției dreptei OM cu paralela din P la MN.

I. Loziciu, Timișoara

7754. Fiecare din numerele reale $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nu este mai mare în modul decît 1. Să se afle minimul sumei tuturor produselor de cîte două numere x_i.

(A V-a Olimpiadă de matematică, U.R.S.R.).

7755. O dreaptă (Δ), de ecuație $y = mx + n$, taie axa xx' în M și axa yy' în N. Pe prima bisectoare a axelor se consideră un punct P, care se proiectează pe axele de coordonate în A și B, iar pe dreapta (Δ) în C. Se cere:

1. Să se determine coordonatele punctului P, în funcție de m și n, în cazul cînd punctele A, B și C sînt în linie dreaptă, folosindu-se:

a) Condiția de coliniaritate a trei puncte.

b) Condiția de concurență a trei drepte.

2. Să se dovedească că în acest caz triunghiul MNP este dreptunghic isoscel.

3. Să se arate că, dacă dreptei (Δ) i se dă o mișcare de translație, atunci punctul de intersecție al dreptei (NP) cu dreapta celor trei puncte coliniare se mișcă pe o dreaptă (Δ) de forma $y = m'x$. Ce relații există între unghiurile α și α' unde $\operatorname{tg}\alpha = m$ și $\operatorname{tg}\alpha' = m'$?

Gh. Bazacov Tr. Severin

7756. Într-un triunghi oarecare avem

$$\Pi \sin\left(56° + \frac{A}{15}\right) > \Pi \sin\left(54° + \frac{A}{10}\right) > \Pi \sin\left(52° + \frac{2A}{15}\right)$$

G.M.-B, 1953, C. Ionescu–Țiu

7757. Fie planul euclidian raportat la un sistem de referință cartezian xOy. La oricare două puncte din plan $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$, atașăm numărul real pozitiv

$$d(z_1, z_2) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$

a) Să se demonstreze că $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$ și $d(z_1, z_2) \leqslant d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2)$, unde $z_3 = (x_3, y_3)$ este un alt punct din plan. Consecință.

b) Să se găsească mulțimea punctelor $z = (x, y)$ pentru care $d(z, z_0) = 1$ (z_0 este originea) și să se figureze grafic.

c) Fie mulțimea punctelor z pentru care $x_1 < x < x_2$ și $y_1 < y < y_2$. Să se afle intersecția acestei mulțimi cu mulțimea punctelor z care satisfac condiția $d(z, z_1) = d(z, z_2)$.

C. Udriște

7758. Fie $F(n)$ o funcție definită pe mulțimea numerelor naturale, astfel încît pentru oricare două numere naturale n_1 și n_2, $(n_1, n_2) = 1$, să existe relația:

$$F(n_1 n_2) = F(n_1) \cdot F(n_2).$$

Notînd cu d_1 și d_2 cei mai mari divizori ai numerelor naturale n_1 și n_2 a căror descompunere în factori primi conține numai factori primi comuni ai numerelor n_1 și n_2, să se arate că există relația:

$$\frac{F(n_1 n_2)}{F(n_1)F(n_2)} = \frac{F(d_1 d_2)}{F(d_1)F(d_2)}.$$

N. C. Negoescu, Timișoara

7759. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{n^2 - k^2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2} = \frac{\pi}{4}$$

Revista Pitagora, 1936 pag. 4, C. Ionescu–Țiu

7760. Să arătăm că dacă expresia

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d \tag{1}$$

este pătratul perfect a unui polinom de gradul 2, atunci

$$ac^2 - 4abd + 8cd = 0. \tag{2}$$

b) Să presupunem că numerele a, b, c, d, satisfac relația (2). Există întotdeauna un polinom de gradul 2 al cărui pătrat să fie (1).

Matematikai Lapok, Budapesta, 1966

7761. Să se arate fără tabele că:

$$\sin 26^\circ + \cos 28^\circ + \cos 2^\circ < \sin 44^\circ + \cos 31^\circ + \cos 14^\circ,$$

$$\sin 4^\circ \cos 28^\circ \cos 44^\circ < \sin 26^\circ \cos 28^\circ \cos 2^\circ < \sin 44^\circ \cos 31^\circ \cos 14^\circ.$$

C. Ionescu-Țiu

PROBLEME PROPUSE LA CEA DE-A VIII-a O.I.M., Sofia, iulie 1966

7762. 1. La un concurs de matematică au fost date trei probleme, A, B, C. Dintre participanții la concurs, 25 de elevi au rezolvat cel puțin o problemă. Dintre elevii care n-au rezolvat problema A, numărul celor care au rezolvat problema B a fost dublul numărului acelora care au rezolvat problema C. Numărul elevilor care au rezolvat numai problema A depășește cu o unitate numărul celorlalți elevi care au rezolvat problema A. Dintre elevii care au rezolvat numai o problemă, jumătate nu au rezolvat problema A. Cîți elevi au rezolvat numai problema B?

7763. 2. Într-un triunghi ABC, se notează cu α, β respectiv γ măsura unghiurilor BAC, ABC, respectiv DCA iar a respectiv b sînt lungimile laturilor BC, respectiv AC. Să se arate că, dacă are loc relația

$$a + b = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\,(a\operatorname{tg}\alpha + b\operatorname{tg}\beta)$$

atunci triunghiul este isoscel.

7764. 3. Să se arate că suma distanțelor vîrfurilor unui tetraedru regulat de centrul sferei circumscrise este mai mică decît suma distanțelor acelorași vîrfuri de oricare alt punct al spațiului.

7765. 4. Să se demonstreze că identitatea

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \cdots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2^n x$$

are loc, pentru orice n număr natural și pentru orice x real, diferit de $\frac{\lambda\pi}{2^k}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$ și λ întreg).

7766. 5. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\begin{aligned}
|a_1 - a_2|x_2 \quad &+ |a_1 - a_3|x_3 \quad + |a_1 - a_4|x_4 = 1\\
|a_2 - a_1|x_1 + \quad &|a_2 - a_3|x_3 \quad + |a_2 - a_4|x_4 = 1\\
|a_3 - a_1|x_1 + |a_3 - a_2|x_2 \quad &\quad + |a_3 - a_4|x_4 = 1\\
|a_4 - a_1|x_1 + |a_4 - a_2|x_2 + |a_4 - a_3|x_3 \quad &= 1
\end{aligned}$$

unde a_1, a_2, a_3, a_4 sînt 4 numere date, reale și diferite.

7767. 6. Pe laturile AB, BC, CA ale unui triunghi ABC ne dau respectiv punctele arbitrare M, K, L, diferite de vîrfurile triunghiului. Să se arate că aria a cel puțin unuia dintre triunghiurile MAL, KBM, LCK nu depășește $\frac{1}{4}$ din aria triunghiului ABC.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PENTRU CLASELE V – VIII*

E : 2560.* Diferența dintre 2 numere este 700, iar cîtul egal cu 8. Să se afle cele 2 numere.

V. Popa, profesor Orșova

E : 2561.* Colectivul Combinatului Siderurgic Reșița s-a angajat ca în cinstea celei de-a 45-a aniversări a partidului nostru să depășească planul pînă la 8 mai cu o cantitate de trei ori mai mare de fontă decît cocs metalurgic, oțel în cantitate egală cu fonta iar laminate finite pline cu 6600 t mai puțin decît fontă. Știind că depășirea totală este de 4400 tone să se afle cu cîte tone din fiecare produs este depășit planul.

Florica Mageriu, prof. Orșova

E : 2562.* Un elev a rezolvat toate problemele dintr-o culegere în 5 zile. În prima zi a rezolvat $\frac{1}{5}$ și încă 5 probleme, a doua zi $\frac{2}{5}$ din rest și încă 4 probleme, a III-a zi $\frac{3}{5}$ din rest și încă 5 probleme, a IV-a zi $\frac{3}{5}$ din rest și încă 5 probleme. Pentru a V-a zi i-au mai rămas de rezolvat 2 probleme. Cîte probleme a avut de rezolvat?

Costel Giurgiuc, student Timișoara.

E : 2563. Începînd cu anul școlar 1965—1966 s-a extins gratuitatea manualelor școlare și în învățămîntul mediu, conform directivelor Congresului al IX-lea al P.C.R. La o librărie repartizarea gratuită a manualelor s-a făcut în patru zile. În prima zi s-au repartizat manuale pentru un număr cu 300 elevi mai mult decît $\frac{2}{5}$ din totalul elevilor. În ziua a doua s-au dat manuale pentru un număr cu 80 elevi mai puțini decît $\frac{7}{2}$ din totalul elevilor. În ziua a treia s-au repartizat manuale pentru $\frac{4}{5}$ din cîți elevi au primit manuale în ziua a doua și încă 28 elevi. În ziua a patra s-au repartizat manuale pentru 2% din totalul elevilor. a) Cîți elevi au primit manuale în comuna respectivă? b) Pentru cîți elevi s-au repartizat manuale în fiecare zi?

Ștefan Cara, elev Lugoj

E : 2564. Patru tractoriști depășind planul, au fost premiați. Să se afle premiul primit de fiecare în parte, știind că primul a depășint planul cu 5,5 ha, al doilea cu 4,2 ha, al treilea cu 6,8 ha și al patrulea cu 7,4 ha și că al treilea tractorist a primit cu 104 lei mai mult decît al doilea; apoi să se afle ce premiu a fost împărțit în total.

T. Grozescu, Arad

---

* V. (E : 2560*—2562*), VI (E : 2563—2565), VII (E : 2566—2569); VIII (E : 2570—2572). Soluțiile se primesc pînă la 15 decembrie 1966. Problemele pentru clasele VII și VIII sînt indicate și pentru liceele de specialitate sau pedagogice.

E : 2565. Să se afle două fracții ordinare, știind că prima înmulțită cu 5, iar a doua cu 4, totalizează $\frac{85}{12}$, iar diferența acestor fracții egalează $\frac{5}{12}$. Dacă comutăm fracțiile și le înmulțim cu aceleași numere, suma lor devine de $\frac{86}{85}$ ori mai mică decît prima sumă, iar diferența acelor fracții devine cu $\frac{3}{4}$ mai mică decît prima diferență. Să se arate :

a) Că soluțiile ambelor sisteme nu se schimbă.

b) Că diferența acestor două rînduri de diferențe este egală cu valoarea primei fracții.

B. Baeră

E : 2566. La construcția nodului hidroenergetic și de navigație „Porțile de fier" norma lunară și cantitățile de pămînt transportate de o coloană de camioane I.R.T.A Orșova în septembrie, octombrie și noiembrie se raportează ca 4 : 5 : 6. În noimebrie s-au transportat cu 300 000 mc. de pămînt mai mult decît prevedeea norma. Cît pămînt s-a transportat peste normă în lunile septembrie și noiembrie împreună și cu cît la sută a fost depășit planul în fiecare din aceste două luni ?

V. Popa, profesor Orșova

E : 2567. a) Să se afle x din proporția :

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{[3,(6)+8\frac{1}{2}} = \frac{\frac{18}{73}}{\sqrt{\frac{8,9}{1-\frac{1}{2}}}}.$$

b) Să se găsească trei numere direct proporționale cu numerele 2 ; 5 ; 3, știind că primul număr este egal cu x, aflat la punctul unu.

Concursul de matematică, București 1966, clasa VI

E : 2568. Pe o dreaptă (d) se consideră un punct O, segmentele $OA = OB = 5$ cm și segmentele $AD = BC = 3$ cm.

a) Să se calculeze lungimea segmentului CD. Cîte soluții are problema ?.

b) Se ridică o perpendiculară din O pe dreapta (d) și se ia pe această perpendiculară un punct P, care se unește cu A, B și cu extremitățile segmentului CD, cînd acesta are cea mai mare lungime.

Să se demonstreze că triunghiurile APB și DPC sînt isoscele.

c) Să se demonstreze că triunghiurile ADP și BCP sînt egale.

Indicație : pentru rezolvarea ultimelor două puncte ale problemei este indicat să se facă o figură diferită de cea de la punctul a).

Concursul de matematică, București 1966, clasa VI

E : 2569. Într-un dreptunghi $ABCD$, $AB = 20$ cm, și $BC = 6$ cm. Pe latura AB se ia un punct M care împarte această latură după raportul $\frac{AM}{MB} = 4$, iar pe latura CD se ia punctul N care împarte această latură după raportul $\frac{DN}{NC} = \frac{2}{3}$. Să se afle :

a) lungimea segmentelor AM, BM, CN și ND.

b) lungimea segmentelor BP și DQ, știind că dreapta care trece prin punctele M și N întîlnește laturile BC și AD în prelungire în punctele P, respectiv Q.

c) lungimea segmentelor MP, MN și NQ.

Să se arate că triunghiurile PNC și QMA sînt asemenea.

T. Grozescu, Arad

E : 2570. a) Vitezele pe jos, călare și cu bicicleta sînt direct proporționale cu numerele $2\frac{1}{2}$, 5 și 6.

Viteza pe jos fiind de 5 km/oră să se afle viteza călare și viteza cu bicicleta.

b) De la gară la un sat se poate ajunge cu bicicleta, cu 18 min mai repede decît călare. Care este distanța de la gară pînă în sat?

Concursul de matematică, București 1966, clasa VII

E : 2571. Se dau două cercuri de centre O și O', de raze R și R' tangente exterior, punctul lor de tangență fiind T. Prin punctul T se duce o dreaptă variabilă care intersectează din nou cele două cercuri respectiv în A și A'.

a) Să se demonstreze că cele două tangente duse la cele două cercuri date, în punctele A și A' sînt paralele.

b) Tangenta comună celor două cercuri taie cele două tangente în punctele B, resepctiv B'.

Să se demonstreze că triunghiurile ABT și $A'B'T'$ sînt asemenea.

c) Să se demonstreze că patrulaterul $OBO'B'$ este trapez.

d) Pentru ce poziție a dreptei variabile dusă prin T, cele două triunghiuri sînt dreptunghice?. Să se calculeze în acest caz lungimile segmentelor AT și $A'T$ în funcție de razele celor două cercuri.

Concursul de matematică, București 1966, clasa VII

E : 2572. Marele matematician român Gheorghe Țițeica a trăit la sfîrșitul secolului al XIX-lea și începutul secolului al XX-lea. Ultimele două cifre ale anului nașterii sînt cu 5 mai mici decît dublul ultimelor două cifre ale anului morții. De patru ori diferența dintre ultimele două cifre ale anului nașterii și ultimele două cifre ale anului morții este cu 24 mai mare decît suma dintre ultimele două cifre ale anului nașterii și ultimele două cifre ale anului morții. Între ce ani a trăit Gheorghe Țițeica?

M. Botoroagă, Lugoj

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME *

Pînă la 20 mai 1966 s-au primit soluții bune de la;

FETEȘTI GARĂ. *L. 1* cl. X Negreanu Tache (7360, 72, 3, 5—7, 9, 85, 7, 95, 7—400, 2, 4, 5, 10), Tudor Victor (7317, 8, 23, 5, 6, 8, 77, 9, 99, 402, 23—5, 8, 30, 7, 50, 2, 4)

FIENI (Ploiești) Absolvent Aron Constantin (7313, 4, 7, 8, 20, 2, 3, 5—8, 30, 4, 5, 7, 9, 42, 72, 7, 8, 91, 9, 300, 3, 8, , 21), *L. 1* cl. IX Mircescu Gh. (2448, 60—3, 74—8; 73222, 4, 66, 83, 5), Popescu Eugenia (2444, 5, 61—3, 74, 5; 7324—6, 8, 82, 5).

FILIAȘI (Oltenia) Absolvent Păunescu Viorel (7312—4, 8, 20, 3, 64, 6, 72, 3, 7, 8) *L 1* cl VIII Popescu Irinel (2429—31, 50, 3—5, 64—8, 71, 2), cl. IX Puiu Maria (732t5, 6, 8, 37, 2445—7, 9, 60—2, 74, 5, 7, 8).

FILIPEȘTI (Ploiești) *Ș. g.* cl. VII Caragioiu Dragoș (2430—4, 8, 9, 41—3), cl. VIII Podoprigora Tamara (2430—2, 4, 9, 40, 5, 6).

FILIPEȘTI (Ploiești) *Ș. g.* cl. VIII Anutiteboaie Ecaterina (2429—31, 40, 1, 4—7).

FÎNȚE (Mureș) *Ș. g.* cl. VIII Balasz Elisabeta (2450, 3—5, 62, 74, 5, 8).

FOCȘANI. *L. 1* cl. X Munteanu Gabriel (7317, 8, 22, 3, 5, 6, 8, 35, 87, 98, 402, 3, 24, 5, 4), Sgîrciu Valentin (7317, 8, 22, 3, 5, 6, 8, 35, 8, 402, 3, 23, 5, 47, 8, 41, 50, 2, 4).

FRÎNCEȘTI-DEZROBIȚI (Argeș). *Ș. g.* cl. VII Paraschiv Dumitru (2429—32, 4, 9—42).

FRUNTIȘENI (Iași) *Ș. g.* cl. VII Chirica Gh. (2429—2, 4, 8, 41, 2), Onel Alexandru (2429—2, 4, 8, 9, 41, 2).

FURUENI (Galați) *Ș. g. 1* cl. VII Breahnă Emil (2430—2, 4, 8, 9, 41, 2).

GĂEȘTI (Argeș). *L.* cl. VIII Sava Teofil (2429—32, 4, 5, 8—42, 4, 6).

GALAȚI. Student *Andrei Viorel* (7290, 320, 2, 3, 6, 30, 3, 5, 9, 55—64, 6—9, 3—5, 7—80, 5—7, 9—91, 4, 410, 3, 5, 6, 8, 20—5) *Ș. g. 14* cl. VII Ciupercă Pomăiliu (2432, 3, 4, 6—9, 41, 2), Dumitrescu Ștefan (2429, 32—4, 6—9, 41, 2), Filiuța Constanța (2429—34, 41, 2, 5), Mușunoi Valerica (2429—34, 50, 3), cl. VIII Aruscutei Mihăiță (2432—5, 9, 41, 7, 54), *Ș. g. 17* cl. VIII Costache Neli (2440, 3—7, 9, 60, 2), *Ș. g. 21* cl. VIII Neagu Dana (2431, 4, 9, 40, 5—7, 50, 3, 62), Roșca Daniela (2440, 4—7, 50, 3, 61), *Ș. g. 21* cl. VIII Vetezeu Anișoara (2430, 1, 4, 9, 40, 1, 4—7, 50, 2, 35, 60), *Ș. g. 23* cl. VIII (Baicu Ionel (2429—32, 41, 4, 5, 8, 62), *Ș. g. 24* cl. VII Costiniuc Florin (2444, 6, 50, 2, 3, 64, 5, 8, 71, 3, 4, 6), Dobre Victor (2431, 4, 8, 9, 41, 4, 64, 5, 7, 76),, Iosifescu Magdalena (2431, 41, 53, 64, 73), Leibovici Adi (2430—2, 4, 9, 41, 53, 64, 5), Marin Gelu (2450, 3, 61, 4, 5—7, 71, 3 7), Sacter Victoria (2450, 3, 9, 61, 5—7, 71), Sprin Gabriela (7429—32, 4, 9—42, 5), *L. 1* cl. X Rosenzweig Niki (7314, 8, 20, 3, 5, 6, 35, 42, 2, 51, 72, 5), Herșcovici Isaia (7317, 8, 20, 3, 6, 8, 35, 42, 51, 73—5), Niculiță Petru (7320, 35, 66, 73, 4, 97, 401, 2, 23—5, 30, 41, 2, 50, 2), *L. 3* cl. VIII Sușmea Svetlana (2430—2, 4, 8, 9, 41, 2, 47), *L. 4* cl. VI Basalic Rodica (2429, 31—4, 8, 41, 4), Ungureanu Silvia (2429, 31, 2, 4, 8, 41, 34), cl. VII Ariton Petrică (2430—2, 4, 8, 9, 41, 2, 4), cl. X Tiribegea Maricel (7313, 4, 7, 8, 20—3, 5—8, 30, 3—5, 7—8), *L. 5* cl. X Anghel Dorin (7313, 4, 7, 8, 21—3, 5—8, 37, 8, 75).

GHEBOAIA (Ploiești) *Ș. g.* cl. VIII Sanda P. Ioan (2431, 2, 4, 8—41, 4, 5).

GHELAR (Hunedoara) *L.* cl. IX Costin Zorica (2445—7, 60, 2, 3, 74, 7, 8, 7, 325, 6, 8) Mocanu Petre (2445—7, 60, 2, 3, 74, 5, 8, 7325, 6, 8), Mathe Iuliana (2445—7, 9, 60, 2, 73, 4, 7, 7325, 6, 8], Radu Gh. Gheorghe (7317, 8, 20, 3, 5, 72—5, 424, 5, 46, 50).

GHERLA (Cluj). *L.* cl. IX Gavrea Ioan (2245—7, 9, 60, 2, 3, 74, 5, 8, 325, 6, 37), cl. X Molnar Iosif (7312, 4, 7, 8, 20, 2, 3, 5—8, 33—5), Sipoș Ioan (7337, 60, 4, 6, 72—9, 85, 7).

GHIZDARU (București) *S.g.* cl. VIII Sotrocan Constanța (2429—32, 4, 8, 9—48).

GIURGIU *S.g. 4* cl. VI Beianu Paul (2429—32, 4, 9, 44, 74, 70), Dumitru Paul (2430—2, 4, 50, 2, 3, 65, 7, 70), Ivan Virgil (2429, 31, 4, 9, 44, 50, 65, 70), State Viorel (2429—3, 4, 44, 50, 64, 5, 70), Sorică Tănase (2429—32, 4, 42, 4, 64, 5), Soricel Petrică (2430, 1, 4, 9, 44, 50, 65, 7), cl. VII Chiriș Aurora (2430, 1, 4, 50, 3, 67, 8, 70), Gheondea Mariana (2429—32, 4, 9, 41, 2, 50, 3, 66), *S.g. 6* cl. VII Munteanu Maria (2432, 41, 64, 6—8, 70, 3), Suciuc Alexandru (2431, 8, 9, 41, 2, 65, 7), Babie Mihaela (2432, 51, 64, 6, 7, 8, 70, 3), cl. VIII Zavrarache Constantin (2471, 2, 83, 4, 9, 90—2), *S.g. 7* cl. VIII Georgescu Iris (2430—2, 4, 8—42, 5—7), Lazăr Mugur (2431, 2, 8, 9—42, 5—7), Popescu Dragoș (2429—32, 4, 5, 40, 4—5, 7325, 6), Suică Iulian (2430, 2, 4, 9—41, 5, 6, 52, 62), Teișanu Daniela (2430, 1, 8, 9, 42, 6, 7, 71), *L. 1* cl. IX Maierhaffer Claudiu (2445, 6, 62, 3, 74, 6, 8, 7326, 8, 64, 95, 9, 418, 30), Pîrcălăbescu Ștefan (2444—7, 9, 60—3, 74, 5, 8, 318, 26, 8), cl. XI Coporan Emil

*) Evidențiații ca rezolvitori de probleme sint scriși cu litere cursive.

(7311—4, 7, 8, 20, 3, 6, 8, 35, 42, 3), Liţoiu Petrişor (7311—4, 7, 8, 20, 3, 5, 6, 8, 39, 3, 73—5), Marinescu Stelian (7311, 3, 4, 7, 8, 20, 3, 5—8, 35, 9, 43), *L. 2* cl. IX Isar Aurelian (2444—7, 9, 6—3, 75, 7326, 8, 37), Ţena Ion (2461—3, 74, 6, 7, 92, 4, 7437, 8, 42, 75—7, 91, 3—6, 302, 7), cl. X Bolborici Marian (7312, 4, 20, 3, 8, 72, 3, 7, 91, 424, 5, 30, 2, 7, 70, 9, 94—7).

GÎRBOVĂŢ (Banat). *S.g.* cl. VIII Lopăţică Nistor (2431, 2, 6, 8, 9, 41—3, 75).

GORUNA (Ploieşti) *S.g. 3* cl. VIII Cimpoiaşu Gheorghe (2450, 2, 3—6, 9, 60, 1, 2), Petrescu Lucian (2450, 2—5, 6, 9—62, 4—8, 70—5, 7, 8, 80, 1, 3—5, 8—90, 24).

GOVORA (Argeş) *S.g.* cl. VIII Antonie Elena (2432, 6, 9, 41—3, 9, 68).

GRĂDIŞTEA (Oltenia) *S.g.* cl. VIII Bolovan Gheorghe (2410, 3—5, 9, 21, 5, 8, 31, 41, 5, 6, 50, 2, 5).

GRECI (Oltenia) *S.g.* cl. VIII Ivan Ion (2465, 71, 2, 80, 1, 3, 5, 90—2).

GURA HUMORULUI (Suceava) *S.g.* cl. VIII Mateciuc Florentina (2432, 8, 41, 2, 9, 54, 5, 62).

HALEŞ (Ploieşti) *S.g.* cl. V Cudelbu Doina (2429—32, 9, 42, 53, 3), Dragomir Victor (2432, 4, 7—9, 41, 2, 64), cl. VI Dogaru Anghel (2429, 38, 42, 54, 5, 64, 7, 71), Şerban Viorica (2413, 3, 8, 411, 32, 8, 9, 41), cl. VII Marinescu Elena (2438, 40—2, 52—5), Vişan Stefan (2431, 7, 42, 53—5, 61, 2), cl. VIII Dogaru Vasilica (2437, 42, 7, 50, 2—5, 62), Voicilă Ioana (2434, 40, 1, 5—7, 52, 3, 62).

HAŢEG (Hunedoara) *L.* cl. XI Mortan Virgil (7325, 35, 7, 9, 40, 2, 3, 5, 6, 55—60, 2—4, 6—9).

HITIOS (Banat) *S.g.* cl. VII Dumitru Rodica (2429—32, 4, 8, 9, 41, 2, 050, 3). Feleşcu Ana (2430, 1, 4, 8, 9, 41, 50, 3, 5, 68), Tenche Lucian (2429—32, 4, 8, 9—42, 4, 5).

HOREZU (Argeş) *S.g.* cl. VI Robeciv Octavian (2429—31, 4, 8, 9, 41, 2, 4, 5), cl. IX Diaconu Ligia (2444—7, 9, 60, 2, 74, 8, 325, 6, 8, 437), Vasiloaica Constantin (7328, 37, 45—7, 9, 9, 61, 74, 5), cl. X Terteci Ion (7325, 6, 8, 30, 5, 9, 64, 7, 71—5, 8, 9). cl. XI Buşe Marca (7355, 6, 9—62, 4, 6, 9, 71—80, 2—91, 4—400, 17—9), Cojocaru Constantin (7314, 7, 8, 21, 2, 4—6, 30, 2, 5, 43), Tenciu Dumitru (7318, 20, 3, 7, 9, 94, 6, 424, 5, 8, 30, 2, 3, 6, 49, 50, 4, 64—6).

HUNEDOARA. *S.g. 1* cl. VIII Dolga Valer (2464—7, 74, 83, 4, 5, 9), *S.g. 4* cl. VIII Dobroiu Marinca (2429—32, 4, 9, 40, 1, 4—6, 8, 50, 2—5, 60—2), Rusan Mihai (2460, 4, 71, 7, 83, 91, 2, 4), *L. 1* cl. VII Iosif Gheorghe (2413, 40, 2, 50, 67, 8, 71, 2), cl. VIII Fazakaş Elisabeta (2431, 40, 5, 50, 2, 3, 62, 5, 8, 80), Jula Angela (2429—31, 8, 44, 7, 52, 62, 5, 7, 8), Matache Cornelia (2431, 4, 50, 2, 3, 63, 4, 5, 7), cl. IX Atanasoaie Gabriela (2434, 7, 8, 45—7, 9, 86, 7, 325, 6, 8). cl. X Lai Maria (7318, 20, 3, 5, 6, 8, 37, 64, 75, 7, 9, 91, 7—9), Marinescu Alexandru (7317, 8, 20, 2, 3, 5, 6, 8, 37, 66, 73, 5, 7, 9, 87, 91, 5), cl. XI Petruţiu Maria (7356, 60, 2, 4, 6, 72, 3—5, 7—85, 90, 1, 8, 9, 402, 3, 13), Retegan Aurel (7340, 2, 3, 62, 4, 6, 7, 74, 5, 8, 80, 5, 99, 402, 3, 12, 6, 23—5), Abraham Vlad Doinel (7375—8, 402, 4, 16, 8, 23—6).

HUŞI *L.* cl. X Bursuc Gheorghe (7313, 4, 7, 8, 20—3, 5—8, 35, 7, 8).

IABLONIŢA (Banat) *S.g.* cl. VI Tătucu Anton (7432, 3, 6—9, 412).

IAŞI *Ş. g. 7* cl. V Acatrinei Marcel (2430—2, 4, 8, 41, 50, 2, 64, 8), Bercu Magdalena (2429—32, 4, 8, 41, 50, 1, 3, 64), Bîrzgă Doina (2430, 2, 4, 8, 41, 2, 51, 3, 64), Dănilă Dorin (2430—3, 4, 8, 9, 41, 4, 5, 50, 64), Drişcu Mihai (2430—2, 4, 8, 9, 45, 50, 64), Feraru Eli (2430—2, 4, 81, 4, 5, 50, 2), Gross Irina (2430—2, 4, 8, 9, 41, 2, 32, 4, 5, 64), Ignat Petru (2430—2, 4, 8, 45, 50, 2, 3, 64), Isarie Ticu (2430—2, 4, 8, 9, 44, 40, 2, 3, 64), Roşca Nicuşor (2429—32, 5, 8, 45, 50, 3, 64), cl. VI Asaftei Dolanda (2429, 31, 2, 4, 8, 9, 41—3, 5, 64, 8), Babiuc Georgeta (2429—32, 4, 8, 9, 41—3, 54, 64), Balaban Carmen (2429—32, 4, 8, 9, 42, 3, 5, 40, 3—5, 64—8, 70), Bercovici Zina (2429, 39, 41, 3, 50, 3—5, 64, 7, 8), Constantin Costache (22430—2, 4, 6, 8, 9, 31, 2, 54, 6, 64), Gheorghiţă Dănuţ (2430—2, 4, 8, 9, 41, 2, 50, 3—5), Goldstein Margit (2430, 4, 9, 40—2, 5, 6, 52—5), Iftoni Călin (2430—2, 4, 8, 9, 41—3, 50, 3—5), Leizer Lili (2429, 31, 2, 4, 5, 8, 9, 40—3, 64), Moscovici Sorin (2430, 1, 4, 8, 43—5, 8, 64, 7). Paşconici Silvia (2437, 77— 9, 41, 2, 54, 5), Zarif Iulia (2429—32, 4, 8, 9, 41, 2, 3, 54, 5), cl. VII Acatrinei Ovidiu (2430, 1, 4, 8, 41, 50, 2, 3, 5, 64, 7, 8), Bercu Constantin (2429, 30, 2, 4, 6, 8, 9, 41—3, 50, 64), Bîzojă Adriana (2430, 1, 4,8, 41, 2, 53—5, 64), Bratu Lucia (2438, 43—5, 61, 4, 76, 52), Calinov George (2430, 6, 9, 44, 5, 8, 52, 3, 61, 4, 7), Călugărescu Lidia (2450, 1, 3, 64, 7, 79, 81, 3), Dănilă Dumitru (2430—2, 4, 8, 9, 41, 4, 50, 3, 64), Davideanu Ion (2450, 3—5, 64—70, 80, 3), Fotea Paul (2411, 7, 8, 24, 30, 1, 2, 4, 8, 41, 50, 2, 4), Goldstein Claudel (2430, 4, 6, 42, 3—5, 8, 64, 7, 70), Iancu Riziel (2432, 4, 8, 9, 42, 6, 52—4), Munteanu Adrian (2430—2, 4, 8, 9, 41, 4, 5), Murăreşu Mihail (2431, 2, 8, 9, 41—3, 50, 3, 4), Pandelescu Victor (2429, 44, 8, 53—5, 9, 61, 4—7), Tănase Gheorghe (2430, 1, 8, 41, 2, 4, 50, 2, 4, 5, 64, 7), Teisa Gaţriel (2431, 2, 8, 9, 41, 2, 54, 5), cl. VIII Acatrinei Ion (2430—2, 4, 8, 41, 3, 4, 6, 50, 2, 3, 64, 7),

Agavriloaie Ion (2452—5, 62, 7, 9, 70—2, 80, 1, 3, 8, 90), Bilanca Radu (2446, 7, 50, 64, 5, 70, 4, 5, 8), Bucăţea Ion (2429—32, 4, 9, 42, 3, 5—7, 54, 5), Drăgan G. (2430—2, 4, 8—45), Drişcu Radu (2438, 41—7, 50, 2—6, 64—72, 80—5, 8), Droahnă Elena (2431, 2, 9, 41, 2, 5—7, 54, 5), Horer Silvia (2431, 2, 4, 8, 9, 41, 2, 50, 52—5), Ianciac Mircea (2429, 30, 2, 4, 7, 8, 9, 41, 2, 5), Radu Dănilă (2429—32, 4, 9, 40, 1, 3—6, 8, 9), Schrom Hermina (2432, 3, 8—40, 4, 60, 2), *Ş. g. 12* cl. VI Veisveld Zigmund (2430—2, 4, 7—9, 41, 2), cl. VIII Ionaşcu Carmen (2429—32, 4, 8—41, 4, 5, 7, 50, 30), Puşcaşu Mariana (2468, 71, 2, 8, 83, 4, 9, 90—2), *Ş. g. 13* cl. VII Chiţanu Doina (2450, 1, 3—5, 62, 4—7, 71, 2), Chinera Rodica (2430—2, 4, 9—41, 4, 5), *Ş. g. 14* cl. VII Peraşnicu Gabriela (2434, 9, 40—2, 4—6, 50, 2—5), cl. VIII Joldescu Mitică (2454, 5, 60, 5, 7, 81, 3, 8, 90, 9, 7, 325), *L. 1* cl. VI Rimer Matia (2450—5, 61, 4, 5, 8), cl. VIII Anel Herlet (2440, 6, 52, 6, 65, 7, 70, 1, 2, 8), Mirşanca Magda (2430, 1, 42, 54, 5, 62, 8, 71, 2), Simon Iosif (2429, 31, 4, 8, 40—2, 4—7, 52—7, 65, 7—9, 71, 2, 4, 5), *L. 2* cl. VI Davideanu Cătălina (2429—32, 4, 8, 9, 41—3), cl. VII Nemţeanu Elena (2432, 3, 8, 41, 2, 50, 3, 5, 6), *L. 3* cl. V Grigoraş Laurenţia (2429—32, 4, 8, 9, 41—3), Miriţă Cătălin (2429—32, 50, 3—5), cl. VI Lupescu Silviu (2428—32, 4, 8, 9, 40—6), cl. VII Burlacu Călin (2430, 1, 4, 9, 40, 5, 6, 50, 3, 5), Simionescu Tudor (2430, 2, 4, 8, 9, 40—2), *Teodorescu Heria* (2429—32, 4, 8, 41, 41—6, 8, 50, 2—7, 60, 2, 7—74, 8, 80—3, 90, 4, 7318, 25), cl. X Achelăriţei Radu (7317, 8, 20, 5, 6, 8, 3, 7, 424—7, 50), *Popa I. Eugen* (7355—60, 7, 9, 72—4, **82**—8, 90, 3, 9, **417**, 21—5, 20, **3**, 7, 8, 41, 2, 9, 52, 4, 9, 74, P) Gherghescu Mihai (7314, 7, 8, 20—3, 5, 6, 28, 30, 3, 52), *L. 4* cl. VII Dimitriu Catrinel (2429—32, 41, 50, 2, 4, 64, 5), Rucinschi Rodica (2430, 2, 4, 9, 41, 5, 7, 67), Sărmăşanu Mihaela (2432, 8, 9, 41, 2, 5, 53, 61), Stanciu Cristina (2430, 1, 4, 41, 5, 50, 2, 3, 5), cl. VII Berneagă Adina (2432, 8, 9, 41, 2, 54, 5, 62, 3), Duca Adriana (2334, 40, 7, 50, 3, 4, 60—2, 72, 7, 8), Gheorghiu Monica (2465, 8, 72, 8, 3, 3, 8, 90, 1), Wecheler Paula (2429—32, 4, 40, 5, 6, 50, 60, 2, 5, 72, 3, 7), *L. 6* cl. VI Vaisman Iuliana (2429—32, 4, 5, 7—9, 41, 2), cl. VIII Radu Florin (2444—6, 8—63), cl. XI *Smilovici Silviu* (7311—5, 7, 8, 20, 2, 5, 6, 9, 40, 56—9, 62, 73, 5—7, 90, 1, 6, 422,8, 32, 5), *L. 7* cl. V Adomnicăi Dumitru (2429—32, 4, 8, 50, 62), Buraga Ioan (2429—31, 4, 50, 2, 3) Ciobanu Camelia (2429—32, 4, 8, 50, 64, 7), Grigore Pavel (2429—32, 4, 8, 50, 64), Neculean Cristina (2429—32, 4, 8, 50, 67), Ioniţă Gabriela (2430—2, 4, 8, 50, 64, 7), Popa Cătălina (2429—32, 4, 8, 50, 1, 3, 64), Tărcuţă Delia (2429—32, 4, 8, 50, 64), Tebeanu Ivanca (2429—31, 4, 8, 50, 3, 64), cl. VI Ioncic Livia (2470, 2, 4, 7—8, 41, 2), Neagu Gabriela (2434, 7—9, 41, 2, 4, 5, 89), Popescu Ecaterina (2434, 7—9, 41, 2, 54. 5), Onică Carmen (2434, 7, 8, 41, 2, 54, 5), Radu Florentina (2434, 7—9, 41, 54, 5), Trifan Doina (2434, 7—9, 41, 2, 54, 5), Verussi Mariana (2434, 9, 41, 2, 54, 5, 84, 9), cl. VIII Bîrleanu Dorel (2429, 56, 61, 4, 5, 7, 8, 71, 2, 4, 5, 8), Tătaru Virgil (2438, 48, 50, 3, 5, 60, 2, 4), cl. IX Adomnicăi Minodora (2445, 6, 9, 50, 2, 3, 74, 4, 8, 7325, 5, 37, 75, 7), *L. 8* cl. VI Beloiu Smaranda (2430—2, 4, 8, 9, 41, 2, 50, 3—5), cl. IX Builă Horia (2246, 7, 9, 60—2, 74, 5, 7, 7325, 6, 8), cl. XI Amoriţei Gheorghiţă (7322, 46, 56, 7, 72—7, 84, 99, 400, 3, 11), *L. 9* cl. X Smău Cecilia (2429—32, 64—7), cl. VII Bodrojen Irina (2430—2, 41, 50, 2—5), Borcov Nina (2432, 5, 8, 9, 41, 2, 30, 3), cl. IX Ababei Simion (7413, 50, 2, 64, 6, 7, 8, 71, 4, 8, 94—6), Topor Vasile (2444—7, 9, 60, 2, 3, 94, 9325, 8, 437), *Şc. muzică şi arte plastice* cl. VII Grimberg Bianca (2429—32, 4, 8, 42, 3, 50, 3, 4, 64, 7, 8).

IVĂNEŞTI (Suceava) *Ş. g.* cl. VII Gorcea Mariana (2429, 30, 2, 4, 8, 9, 41, 2).

ISCRONI (Hunedoara) *Ş. g.* cl. V Burlac Liviu (2429—32, 53, 70, 90, 1).

INEU (Crişana) *L.* cl. X Alena Nicolae (7317, 8, 25, 6, 8 73, 85, 7, 423—6), absolvent, Gisrgiu Emil (7314, 7, 8, 20, 5, 6, 8, 43, 55, 6, 9, 67, 73, 5, 6, 8, 9, 83—5, 91, 424—9, 56, 76, 85, 90, 4—6, 8, 9, 502).

IZVOR (Oltenia) *Ş. g.* cl. VIII Bărbuică Cornelia (2432, 8, 9, 41, 2, 54, 5, 60, 2), Matei Elena (2432, 8, 9, 41, 2, 54, 5, 60, 2), Sfata Eugenia (2432, 8, 91, 41, 2, 54, 5, 60, 2).

JIMBOLIA (Banat) *L.* cl. X Ebner Peter (7314, 7, 8, 20, 2, 3, 5, 6, 31, 5, 75, 8, 9, 402, 24), Scuster Karl (7318, 20, 3, 7, 5, 9, 402, 23—5, 30, 7_0.)

LECHINŢA (Cluj). *Ş. g.* cl. VIII Coruţiu Viorica (2431—3, 8, 9, 41, 2, 5, 6).

LEHLIU — srt *Ş. g.* cl. VI Bunea Marian (2412, 32, 8, 9, 41, 2, 3, 5), Langhe Eugen (2432, 8, 9, 41—3, 5, 55), Savu Ion (2412, 32, 8, 1, 41—3, 50), cl. VII Ciornei Filofteia (2411—3, 9, 32, 4, 8, 9, 41, 54, 5), Nedelcu Constanţa (2412, 3, 32, 8, 9, 41—4, 54), Stan Anghelina (2412, 3, 9, 32, 8, 9, 41, 2), Stănilă Florica (2411—3, 32, 4, 8, 9, 41, 2).

LIPOVA (Banat) *L.* cl. X Bătuţan Iosif (7364, 6, 73, 4, 7—9, 97—9, 403, 23—5, 37, 42, 3, 50, 2, 4).

LITIENI (Suceava) *L.* cl. IX Anghela Florica (2244—7, 9, 61—3, 74—6, 325, 6), Dochiţei Dumitru (2444—7, 9—62, 72, 4, 8, 732, 8, 30).

LUCĂCEŞTI (Bacău) *Ş. g.* cl. VII Andrei Ludmila (2429—34, 6—42).

LUGOJ. *L,* cl. VI Badea Constantin (2450, 3—6, 64—9), Ştefănuţ Magdalena (2431, 9, 41, 2—5), cl. VIII Cristea Rodica (2430—4, 6—45,) Draguţ Delia (2446, 6, 71—3, 7, 8,

88, 90, 2), Marcu Florica (2440—2, 5—7, 61, 71, 2, 4, 5, 7), Murăreţiu Elena (2432, 42, 6, 7, 9, 54, 5, 60, 2), Taras Cornelia (2429—32, 4, 8, 9, 41, 5), cl. X Ghidimirc Lucian (7312, 4, 21—3, 5—8, 30, 4, 5), Murariu Dorin (7317, 20, 3, 5—7, 32, 72, 3, 5, 9, 402), *Orbulov Petru* (7317, 20, 2, 5, 6, 30—3, 7, 42, 66, 71—8, 97, 402, 3, 18, 24—6, 42, 8, 50, 2, 4, 6,7, P, N). *Ş. g.* cl. VII Gruisscu Rodica (2431, 2, 4, 6—9, 41, 2, 4).

LUPENI. *L.* cl. IX Ban Tiberiu (2444—7, 60, 2, 3, 7317, 25—7, 85, 99), Crainic Mariana (2444—9, 60, 2, 3, 7325—8, 85).

MĂNEŞTI. *Ş. g.* cl. VI Nicolae Ion (2450, 3—6, 79, 83, 4, 9), Popescu Gabriel (2434, 8—41, 4, 6, 8), Vlad Viorel (2430—2, 4, 8, 9, 41, 2, 4, 50, 3—5, 66, 79, 84, 9), cl. VII Predescu Gheorghe (2438, 44, 53, 4, 6, 64, 5, 8).

MARGHITA *L.* cl. XI Kada Zoltan (7312, 4, 7, 8, 20, 2, 3, 5, 6, 32, 3, 5, 9, 40, 5, 7, 72, 3, 5—7, 83, 4, 412, 3, 21).

MEDGIDIA. *L.* cl. VIII Ivanof Daniela (2430—2, 4, 8—41, 4—7), Şerbu Marcela (2450, 2—5, 61—3).

MEDIAŞ. *L. 1* cl. X Andresscu Emanuel (7312, 4, 7, 8, 20, 3, 3, 5, 6, 8, 30,3, 5, 7, 7, 3, 5), Marian Liviu (7314, 6, 8, 22, 5, 6, 8, 30, 5, 7, 42, 72, 3, 7—9, 85), cl. XI Dumitru Gh. (7311, 2, 4, 5, 7, 8, 20, 3, 5, 7, 8, 30, 3, 5, 7, 8, 9, 2, 3, 5), Georgescu Clement (7351—62, 72—8, 82—6, 90, 6, 403, 6, 11—3, 5, 21).

MEHADIA (Banat). *L.* cl. IX Boccairiu Livia (2444—8, 60, 2, 76, 7, 7325, 6, 8).. Drăgan Vasile (2445—8, 60—2, 7325—7, 430), Fiat Filip (2445—7, 60, 2, 74, 6, 7, 7317, 25, 6, 8, 437), Teodorescu Ana (2444—8, 60, 2, 74, 6, 8, 7326, 99).

MEREI (Buzău) *Ş. g.* cl. VIII Ionaşcu Maria (2431, 4, 8—42, 5, 50, 3—5, 62, 71, 2,4

MIERCUREA (Hunedoara) *L.* cl. VIII Bîrcă Octavian (2445, 5, 50, 2, 3, 61, 2, 71), Filip Paraschiva (2454, 60—3, 5, 72, 4, 8). cl. IX Galoczi Peter (2444—6, 8, 9, 7314, 8, 22, 5—8, 30, 47, 51), Ludeşan Ioan (2474—8, 84, 9, 400, 42, 3, 75—7, 94—6), cl. XI Fülop Hajnallea (7317, 28, 3, 56, 9, 62, 72, 3, 5—8, 83—8, 90, 1, 423—5).

MÎRŞANI (Oltenia) *Ş. g. 1* cl. VII Diaconu Ion (2432, 6—9, 41, 2, 54, 5, 8).

MIZIL. *L.* cl. VIII Drosu Sonia (2450, 3—6, 60, 2, 71, 9, 80—5), Mateescu Maria (2430, 4, 8, 9, 41, 2, 60, 71, 2), Stănescu Doru (2450, 3—5, 62, 72, 8, 80—3, 58, 9, 90—2), Vasilescu Steliana (2429, 34, 50, 3—5, 60—3), Vlădăreanu Doina (2450, 2—5, 60—3, 5—72, 4, 5, 8).

MINEGIU — Ungureni (Ploieşti) *L.* cl. IX Chiciureanu Gheorghe (2444, 9, 60—3, 74—6, 8, 7318, 25, 8, 98), Moisescu Mircea (2444—7, 9, 60—3, 74—6, 8, 7318, 25, 8, 98), Moisescu Mircea (2444—7, 9—63, 74, 8, 7325, 6, 8, 98), Neagu Ion (2444, 9, 60—3, 74—6, 8,7318, 25, 98), Prevta Elena (2444—7, 60—3, 78, 7325, 6, 8).

MOINEŞTI (Bacău) *Ş. g.* cl. VIII Cristea Dan (2431, 2, 34, 40, 5, 9, 54, 62, 74), cl. IX Vrînceanu Gabriela (2444—7, 9, 7325, 6, 8).

MOGODANI (Argeş) *Ş. g.* cl. VIII Badea Gheorghe (2447, 8, 55, 60, 1, 4—74, 6, 7, 9), Postelnicu Ion (2429—34, 6—42, 4—7, 50—7, 60—3, 7325, 6, 8).

MORENI (Ploieşi) *Ş. g.* cl. VI Buzilă Cristina (7430, 2, 3, 8, 9, 41, 2, 5,' 2—5), cl. IX Soare Stelian (2444—7, 9, 60, 2, 74, 60, 8, 7324, 6, 8,) cl. X Ciocoiu Gheorghe (7317, 18, 21—5, 39, 74, 97, 425, 6, 50), Ioan Viorica (7317, 8, 21—3, 5, 30, 42, 8, 77, 87, 94, 5), Leu Cosstrstin (7317, 4, 7, 8, 20—7, 30, 3—5, 7, 8), Modolea Mihail (7313, 4, 7, 8, 22, 3, 5, 6, 8, 35, 9, 73, 9, 403,6), Ştefan Vasile (7314, 7, 8, 20, 2, 3, 5, 6, 8, 33, 5, 73, 9, 406, 30), Ştefănescu Alexandra (7321—3, 5, 6, 8, 34, 73, 5, 9, 437, 41, 8, 52, 4).

MOZACENI DEAL (Argeş) *L.* cl. IX Bălăşoiu Florian (2444—7, 9, 60, 2, 3, 7317, 8, 25, 6, 8).

NADLAC (Banat) *Ş. g.* cl. VIII kralik Adam (2431, 2, 4, 9, 40, 1, 2, 4—6, 50, 3, 60, 2, 5, 7).

NADRAG (Banat). *Ş. g.* cl. VI Dragomir Ana (2429, 31, 2, 4, 8, 9, 50, 3—5), Dincă Adriana (2429, 31, 2, 4, 7—9, 41, 2, 50, 3, 4), Morchiş Dorel (2432—4, 8, 41, 2, 50—5), Rusz Geza (2432—4, 8, 9, 42, 50, 3—5).

NĂSĂUD (Cluj). *L.* cl. VIII Rusu Gheorghe (2430—2, 4, 8—42, 4—7, 50), cl. X Mureşan Florin(7312, 4, 7, 8, 22, 3, 5—8, 35, 73, 5, 7, 82, 5, 97, 402, 23, 30, 7), Scurtu Vrsile (7423—5, 30, 7, 8, 76—80, 2, 9, 90, 4—7, 75, 4, 6, 27).

NĂVODARI (Dobrogea) *L.* cl. X Kiss Eugen (7320, 1, 74, 8, 42, 6, 30, 47, 52, 4,79, 82).

NEGRU VODĂ (Dobrogea) *L.* cl. IX Trişcă Alexandru (2445—7, 9, 60—2, 74, 6, 8, 7325—6, 8, 99), cl. X Ciocîia Ilie (7313, 8, 20, 2, 3, 5, 6, 8, 60, 73—5, 7—400, 3). *Vlădulescu Petre* (7313, 4, 7, 8, 20—3, 5—8, 30, 4, 5, 7, 8, 42, 60, 72—9, 97—400, 2, 3, 23—6, 41, 2, 4, 7, 9, 50).

NEGREŞTI OAŞ (Maramurşş) *Ş. g.* cl. VI Coţ Rodica (2429—32, 4, 41, 50, 1, 2), *L.* cl. IX Ciocan Gheorghe (2460—3, 74—8, 92, 4, 37, 8, 41, 502).

NEGREȘTI (Doțrogea) *Ș. g.* cl. VIII Ilinca Gheorghe (2430—2, 8, 41, 5, 50, 3, 4, 61, 6, 7, 72)).

NEGOEȘTI (Oltenia). *L.* cl. IX Popa Dumitru (7317, 8, 97—9, 4,18, 37, 8, 40 61—3,74—8).

NEMȚIȘOR (Bacău) *Ș. g.* cl. VIII Solomon Elena (2450, 2, 3, 5, 60—2).

NICOREȘTI (Galați) *Ș. g.* cl. VI Corlan Gațriela (2431, 4, 41, 5, 64, 81, 3—5), Durbaca George (2430—2, 8, 9, 68, 81, 3), cl. VII Oprea Dprin (2429—32, 8, 9, 41, 2, 4, 5).

NOVACI. *L.* cl. V Andreoiu Elena (2421—32, 4, 5, 8, 50, 2, 3), Berbecel Ilie (2429—32, 4, 5, 8, 50, 2, 3), Ciocoiu Viorica (2429—32, 4, 5, 8, 50, 2, 3), Ciorogaru Elena (2429—32, 5, 8, 43, 52), Ciorogaru Ionică (2421—32, 4, 6, 41—3, 50, 2, 3), Ciucă Ion (2429—32, 4, 50, 2, 3), Cosor Filimon (2429—32, 4, 41, 2, 50, 2, 3), Dofinescu Elena (2429, 30—2, 4, 41, 3, 50, 2, 3), Dofinescu Ion (2429—32, 4, 8, 50, 2, 3), Dumitrescu Virginia (2429—32, 4, 50, 2, 3), țsopencu Lidia (2429—32, 4, 50, 2, 3), Jeoa Florian (2429—32, 4, 50, 2, 3), Mustață Elena (2421—32, 4, 50, 2, 3), Negrucioaia Constantin (2429—35, 8, 43, 50, 2), Popescu Sabin (2429—32, 4, 50, 50, 2, 3), Porumbel Gheorghe (2429—32, 4, 50, 2, 3), Simionescu Olga (2430—32, 4, 7, 50, 2, 3), cl. VI Bădescu Elena (2429—35, 7—9, 41—3), Cuteanu Maria (2429—31, 4, 5, 7, 8, 41—3), Giurca Maria (2429—32, 4, 5, 8, 9, 41, 2), Ivan Ionel (2429—34, 7—9, 41), Jianu Maria (2429—32, 4, 7, 8, 9), Oprițescu Maria (2429—32, 4, 7—9), Paraschivescu Elena (2429—35, 7—9, 41—3), Preoțescu Viorica (2429—33, 6—9, 41—3), Tomrscu Elena (2429—35, 7—9, 41—3), cl. VII Caragel Dochia (2429—32, 4, 7—9, 41, 2), Cosar Ion (2429—32, 4, 8, 9, 41, 5, 6), Cosor Ofelia (2429—32, 4, 7—9, 41, 2, 5, 6), Cuteanu Elena (2429—32, 4, 7—9, 41, 2), Giugiulan Gheorghe)2421, 32, 4, 7—9, 41, 2, 5, 6), Grigore Constantin (2429—32, 4, 7—9, 41, 2). Monta Pantelimon (2429—32, 4, 7, 8, 41, 4, 6), Peșteamu Valerla (2429—32, 4, 7—9, 41, 2), Stela Olga (2429—32, 4, 7, 8, 45, 6), Todea Elena (2421—32, 4, 9, 41, 6), Trușcă Mihail (2429—32, 5, 7—9, 412), cl. VIII Bălașe Maria (2430—2, 4, 9, 41, 2, 5, 6), Ciorogan Nicolae (2429, 31—4, 7—9, 41—3), Cuteanu Elena (2430—2, 4, 8, 9, 41—3, 6), cl. IX Alexandru Petre (2444—7, 9, 61—3, 74, 8, 7325, 6, 8), Popa Emilia (2444—7, 9, 60—3, 74, 7, 7315, 6, 8), Zamfira Gheorghe (2444—7, 9, 60—3, 74, 5, 8, 7325, 6, 8),

OBESLOV (Oltenia) *Ș. g.* cl. VIII Bolovan Gheorghe (2464, 5, 7—72, 5, 8).

OCNA MUREȘ (Cluj) *L.* cl. V Munteanu Maria (2431, 2, 8, 43, 50, 4, 64, 84), cl. X Ursu Elena (8317, 8, 20—3, 6, 8, 33, 75, 7, 8, 87).

OGREDENA (Banat) *Ș. g.* cl. VI Crețu Adriana (2431, 2, 4, 8, 9, 42, 3, 50, 3).

OLANU (Argeș) *Ș. g.* cl. VII Agapescu Traian (2450, 2—6, 64—71).

OLARI (Crișana) *Ș. g.* cl. VII Bătrîn Gheorghe (2430—2, 4, 8, 9, 41, 2, 65—8, 703), Kalmar Zoltan (2430—2, 4, 8, 9, 41, 2, 4, 5, 8, 50, 2—6, 64—8, 70, 2), cl. VIII Husor Floare (2464, 5, 8, 71, 2, 8, 81, 3, 90, 1).

OLTENIȚA (București) *L.* cl. X Ureche Vrsile (7276, 86—8, 99, 300, 18, 20, 5, 6, 8, 35, 79, 87, 404, 5), Vasilian Mihai (7312—4, 7, 8, 20, 2, 3, 6, 5, 8, 30, 1, 3, 7).

ORADEA. *Ș. g.* cl. VII Moga Viorica (2431, 2, 8, 9, 41, 55, 64, 89), cl. IX Negrău Petru (2444—7, 9, 61, 2, 7325—8, 39, 48), Onaca Mariana (7325, 6, 8, 44—6, 8, 9, 97, 60—3), cl. X Brădău Florian (7266, 78, 9, 89, 302, 8, 12, 4, 41, 7, 31, 82, 5, 7, 91), Urdă Ioan (2423—6, 30, 2, 7, 42, 4, 7—50, 2, 4), cl. XI Mănucu Dumitru (7311, 7, 64, 72, 3—5, 7, 8, 84, 91, 400, 23—5), Meer Petru (7311, 2, 4, 5, 7, 8, 31, 3, 5, 7—9, 42, 35).

ORAȘ DR. PETRU GROZA. *L.* cl. VII Înșel Delina (2430—2, 4, 412, 50, 3), Oncescu Ioan (2430, 1, 4, 8, 9, 41, 53, 79, 83).

ORAȘ GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ. *Ș. g. 3* cl. VIII Ciuculan Maria (2430—2, 4, 8—40, 5), Mîndruță Niculina (2430—2, 40, 4—6, 50, 3), Tache Elena (2430—2, 4, 90, 4—6, 50, 3), Turbatu Constanța (2430—2, 4, 8—40m 4, 54, 6), *Ș. g.* cl. VIII Odoroagă Magdalena (2429—31, 4, 40, 4—6, 9—55), *Ș. g.* cl. VIII Cojocaru Sonia (2430—2, 4, 9, 40, 4, 5, 50), cl. IX Kopecsiri Andrei (2444, 9, 60—3, 74, 8, 7317, 8, 21, 2, 5, 7, 98), Poponicolau Lefteris (2444, 60—3, 74—6, 8, 7317, 21, 2, 6, 8), cl. XI Merilă Engelica (7263, 89, 91, 303, 4, 312—5, 7, 8, 20—3, 37, 52, 3).

ORAȘ VICTORIA. *L.* cl. X Mironescu Viorel (7317, 8, 20, 2, 3, 35, 7, 66, 72, 3, 5, 77, 9, 423—5, 30, 52).

ORBEASCA DE JOS (București) *Ș. g.* cl. VII Badea Lucian (2429—324, 54, 60, 2).

ORĂȘTIE. *L.* cl. VII Borza Aurelia (2429—32, 4, 8, 41, 2, 4, 54), Pîrvu Alina (2429—32, 4, 8, 9, 41, 4, 54), cl. VIII Popovici Florin (2429—32, 4, 40, 5, 6, 62).

ORȘOVA (Banat) *Ș. g.* cl. VI Ivanovici Nicolae (2429, 31, 3, 4, 8, 9, 41, 4, 53). cl. VII Covaci Vasilica (2429, 31, 2, 6, 8, 9, 41, 2), Moruzi Nicolae (2431, 50, 2—5, 81, 3, 4, 90), Mustăciă Doina (2429, 31, 2, 6, 8, 9, 41, 2), Petrescu Nicolae (2431, 4, 9, 41, 52, 3, 61, 7, 83), Schimec Victor (2434, 8, 41, 2, 52, 5, 79, 81), cl. VIII Ciupuligă Polyana 2429—34, 6—46, 52—6, 62—4, 70—2, 5, 7).

OȚELUL ROȘU. *L.* cl. VI Balint Zolant (2429—32, 4, 8, 41, 2), Boșoc Daniel (2430—2, 4, 8, 9, 41, 2), Mărgan Marius (2421—31, 4, 8, 9, 41).

OSICA DE SUS (Oltenia) *Ş. g.* cl. VIII Delcea Victoria (2431, 2, 4, 8, 9, 41, 2, 6, 50, 4, 60, 2), Iorga Hristache (2432, 4, 8, 9, 41—3, 9, 50, 5, 63, 70).

OVESELU (Oltenia) *Ş. g.* cl. VIII Smărăndoiu Nicolae (2444—8, 60—3), cl. X Ciomăgeanu Constastin (7314, 8, 20, 2, 35, 7, 42, 8, 64, 72, 3, 7), Preda Gh. Ion (7317, 8, 20, 6, 8, 35, 42, 72, 3, 5, 7, 9, 402).

PĂDURENI (Crişana) *Ş. g.* cl. VI Iliescu Adriana (2432, 6—9, 41—3).

PĂDURENI (Buzău) *Ş. g.* Plesnilă Rozalia (2394, 5, 8, 411—5).

PANCIU *L.* c. VIII Cristian Tama (2432, 7—9, 41, 3, 54, 5, 84), Iordaniu Rodicaa (2432, 4, 8, 9, 41, 2, 6, 54, 5, 69, 84, 9).

PĂTIRLAGELE (Ploieşti) *Ş. g.* cl. VIII Ionescu Claudia (2480, 1, 3—5, 8—92, 4), cl. X Toma Veromel (7313, 30, 7, 73, 3, 7, 8, 97—400, 2—4, 18), cl. XI Bîrjoveanu Constantin (7314, 7, 8, 20, 3, 5, 6, 8, 35, 7, 42, 3).

PĂUNEŞTI (Bacău) *Ş. g.* cl. V Vîrlan Lenuţa (2410, 7, 8, 30, 6, 8, 42, 4, 5), cl. VI Anghel Zarafina (2435, 45, 51—3, 5, 9, 64, 7, 70), Bîrlă Magdalena (2430, 45, 6, 50, 5, 64, 7, 70), Chiriac Costel (2429, 30, 2, 6, 8, 9, 41—3), Criac Maria (2430 42, 4, 50, 3 — 5, 64,, 7), Cîmpeanu Maria (2429, 33, 6, 53, 5, 64, 7, 70), Fison Georgeta (2437, 50—5, 64, 7, 70), Mihalache Gheorghe (2432, 3, 6—9, 41, 2, 54, 5), Nica Lucica (2430, 50, 61, 4, 7, 70 83, 9), Nica Maricia (2413, 30, 2, 3, 6, 8, 9, 41, 2, 54), Novac Verginica (2430, 1, 46, 50, . 3, 5, 64, 8, 70), Postolache Maria (2417, 29, 32, 3, 6, 9, 41, 2, 3), Răuţă Anica (2431, 7, 8, 50, 1, 4, 5, 64, 7, 70, 4), Roşu Elena (2431, 45, 6, 51, 3, 64, 7, 70), Soba Neculai (2432, 2, 8, 9, 41, 2, 54, 5), Vîrlan Lenuţa (2429, 30, 2, 6, 8, 45, 50, 64, 7), cl. VII Bostan Iordache (2435, 44, 53, 64, 7, 83, 49, 9), Bratie Victoria (2430, 5—7, 9, 44, 50, 1, 5), Conduraru Maria (2435, 53, 9, 61, 4, 7, 70, 83, 9), Nica Lucica 2429, 33, 4—7, 3, 53—5), Zaharia Toma (2435, 5, 44, 53, 64, 7, 70, 83, 4, 9), cl. VIII Aniţoiu Vasile (2432, 7, 41—3, 50, 4, 4), Berbece Maria (2435, 40, 1, 5, 7, 9, 53, 50, 4, 5), Duman Ion (2440, 52, 64, 5, 7, 8, 70, 1, 2, 5), Gorghiu Gabriela (2431—4, 6—42, 4—6), Ignat Victoria (2436, 44—6, 50, 3, 5, 64, 7, 70), Neagu Neculai (2429, 32, 4, 7—9, 41, 54, 5, 71), Novac Maria (2445, 50—4, 6, 7, 61, 2), Novac Ştefanache (2434, 6—9, 41, 2, 3, 54), Postolache Eufrisina (2431, 4, 6—9, 41, 2, 54), Răuţă Alexandra (2444, 51, 4, 55, 62, 4, 7, 70, 89), Răuţă Gicu (2440, 4, 50, 50, 2, 3, 64, 7,72) Rizuc Rodica (2450—5, 62, 7, 8, 70), Ungureanu Mihaela (2438, 44, 52, 62, 4, 7, 70, 9), Ursei Paraschiva (2431, 3, 4, 6, 7, 9, 42, 54).

PERIEŢI (Argeş), *Ş. g.* cl. V Luţă Florea (2430—2, 4, 50, 2, 64, 7), Ştefan Ion (2430—2, 4, 52, 3, 64, 5, 7), cl. VI Antonescu Constantin (2430, 1, 4, 50, 3, 4, 5, 64, 5, 7), Luţă Ion (2450, 3—5, 64, 5, 7, 71), cl. VII Pîrve Virgil (2430, 1, 4, 50, 3, 64, 5, 7, 8, 71), Tudorică Constantin (2450, 4—5, 64, 5, 7, 8, 71), cl. VIII Mihai Constanţa (2430, 1, 4, 44, 5, 50, 3—5, 60, 2—5, 71).

PETRILA (Hunedorra) *L.* cl. VIII Caner Ion (2430—2, 4, 8, 40, 74, 5), cl. X Caton Nicolae (7320, 3, 5, 6, 8, 49, 75, 9, 402, 2, 4, 5, 9, 2, 43, 52).

PETROŞENI. *Ş. g.* cl. VI Mirean Elena (2430, 1, 4, 6, 8, 9, 42, 50—6). *L.* rl. X Paicu Nicolae (7313, 4, 7, 8, 20, 3, 3, 5, 6, 8—30) *Stan Mihai* (7272, 6, 84—8, 90—3, 5—301, 8, 9, 12—4, 7, 8, 20—35, 7, 8, 20—35, 7, 8, 42, P).

PEŞTEANA JIU (Oltenia) *L.* cl. X Negrilă Ion (6840, 78, 7320, 3, 6—8, 30, 1, 4, 5, 7, 9, 404).

PIATRA NEAMŢ. *L.* cl. IX Cîmpu Adrian (2446, 61, 74, 6—8, 7317, 8, 26, 494—6), cl. X Dumitrescu Mircea (7314, 7, 8, 22, 35, 9, 73, 7, 405, 23—5, 30, 50), Herescu Mioara (7324—8, 32, 5, 7, 9, 97, 9, 401—6, 10).

PITEŞTI. *Ş. g.* cl. VII Burcea Ady (2430, 1, 4, 9, 40, 50, 3, 65), *Ş. g. 4* cl. VIII Ruse Lilion (2437, 40, 4—7, 9, 50, 2—6, 61—9, 74—8, 7, 318, 20), *Ş. g.* cl. VII Constantinescu Radu (2430—2, 4, 8, 9, 41, 2, 4, 6), *Ş. g. 10* cl. VII Dănescu Marian (2454. j5, 64, 6—8, 70—3, 7, 81, 3, 4), Matei Vania (2432, 4, 8, 9, 41, 2, 4, 5), Paşovel Romana (2450—5, 8, 9), Tucă Dan (2429, 30, 2, 4, 8, 9, 41—4), cl. VIII Petrescu Cornelia (2450, 2—6, 60—2, 5, 9, 72, 4, 6), *Ş. g.* dl. V Leonca Ligia (8429—32, 4, 5, 41, 53, 64), cl. VI Cociş Gabriel (2432, 4, 8, 9, 41, 53, 5, 64, 6, 7, 70, 83), Man Cornel (2432, 4, 8, 9, 41, 53, 5, 64, 6, 7, 70, 83), *L. 1* cl. IX Chirca Teodor (2444—7, 9, 60, 2, 74, 6—8, 7326), Coşciug Alexandru (2444—7, 60ơ3, 74, 8, 7321, 5, 6, 8), Florescu Gabriel (2444—6, 9, 62, 83, 4, 7—90, 4, 7318, 25, 6, 8), Mînduteanu George (2444—9, 60—3, 7325, 6, 8, 9), Nicolae Constantin (2444—7, 9, 60—2, 77, 7325, 6, 8), Popescu Angheş (2444—7, 9, 7317, 8, 22, 5, 6, 8, 85, 437), cl. X Branişe Marcellus (2293, 6, 313, 4, 7, 8, 20, 6, 33, 5, 7, 75, 6, 7, 403), *Dumitrache Ion* (7313, 21, 2, 4, 7—31, 3, 5—9, 56, 60, 4, 6, 71—82, 5, 7, 8, 91, 2, 5, 7), *Lungulescu Bogdan Eugen* (7362—5, 7, 71—4, 5, 8—306, 8, 9, 11, 5, 7—48, 50—2, *P*) cl. XI. Giuglan Daniel (7311, 2, 4, 7, 8, 20, 2, 3, 5, 6, 8, 35, 7, 9), Vasile Alexandru (7314, 7, 8, 20, 2, 3, 5, 6, 8, 37, 9, 45, 66—7, 83—5, 423, 6—30, 5), *L. 2* cl. VII Găvănescu Mihaela (2450, 2—7, 9), cl. XI Preda Vasile (7312, 5, 21, 7, 41—3, 5, 8, 55, 6, 9—64, 6—8, 72, 4, 5—9, 82, 5, 8—91, 5, 8, 9, 442—6,

9, 11—3), *L. 3* cl. XI Gheorghe Ion (7314, 7, 8, 20, 5, 6, 8, 35, 9, 43, 94—6), *Şc. prof. Textilă* anul I Badea Constanţa (2410, 3, 4, 7, 28, 38, 9, 41, 2, 54, 5). Capanu Tudora (2410, 1, 3, 4, 31, 2, 8, 9, 41—3, 5), Grama Maria (2410—3, 28, 32, 9, 41, 2, 50, 8, 3), Moşteanu Gheorghiţa (2410—2, 4, 7, 2, 8, 9, 45, 55), Şerban Maria (2410, 1, 3, 28, 31, 45, 6, 50, 2, 3, 71, 2), P.

PÎNCOTA (Banat) *Ş. g.* cl. VII Chebeleu Rodica (7328, 31, 6, 9, 41, 2, 1, 60, 2), cl. X Chelebeu Petru (7313, 4, 7, 8, 20, 2, 3, 5—8, 30, 5).

PLOIEŞTI. *Ş. g.* cl. VI Sprînceană Mihaela (2430—4, 8, 9, 41), Vasile Mariana (2450, 3, 4, 6, 7, 7, 81, 4, 9), *Ş. g. 4* cl. VII Dumitrescu Florica (2430—2, 4, 8, 9, 41, 9, 54, 4, 84), *Ş. g.* cl. VIII Aiberii Luminiţa (2431, 6, 8, 40—2, 5—7), Cilmic Atena (2431, 2, 6, 7, 9, 40, 1, 5—7), Matinescu Monica (2431, 2, 6, 7—9, 41, 4, 6, 7), Vasilescu Ileana (2429—32, 5—9), *Ş. g. 21* cl. VII Angelescu Petre (2432, 4, 8, 9, 41, 41, 2, 59, 61), Czako Laurenţia (2432, 3, 4, 8, 41, 59, 61), Moisescu Doina (2438, 54, 61, 4, 5, 7, 8, 70, 6), Zielinski Roxana (2431, 2, 4, 8, 9, 41, 4—6, 53, 5), cl. VIII Mucenicu Dumitru (2450—5, 60, 2), Popa Norica (2464, 5, 8, 70, 9, 84, 9, 90), Sgraon Victor (2450, 2—7, 60—2, 7, 8, 80, 1, 3, 4, 8—90), Turtadău Florin (2453—5, 62, 4, 5, 70—2, 80, 3, 4, 90—2), *Ş. g. 23* cl. VII Stoica Valentin (2421—48), cl. VIII Răuţă Viorel (2450, 2—5, 60, 1, 2, 5, 8—70). *L. 1* „I. L. Caragiale" cl. V Rednic Cristiana (2431—4, 8, 50, 2, 3), cl. VI Bacheru Raluca (2430—2, 4, 8, 9, 41, 2, 64), Mitroi Carmen (2430—2, 48, 9, 41, 2), cl. VII Munteanu Dinu (2454—4, 9, 61, 2, 81—3, 7), Peiulescu Radu (2432, 55—5, 64, 7, 70, 9,), Petru Veronica (2464, 7, 70, 9, 81—4, 6, 9), Sonţu Gheorghe (2429—4, 8—42), cl. VIII Bîzu Camelia (2450, 3—5, 60—2, 5, 7, 71, 2, 9, 81—5, 7, 8, 90—2). Ciobanu Vasile (2464—78), Mercovschi Carmen (2467, 8, 79, 2, 5, 8, 80, 2, 3, 4, 8, 9, 92), Mărgăritescu Rodica (2932, 9, 41, 2, 54, 5, 60, 2, 7, 71, 2, 7326), Necula Luiza (2480, 1, 3—5, 8—91, 4), cl. IX Dinu Maria (2441—9, 60—3, 7325, 6, 8, 97—401), cl. X Botoşanu Maria (7317, 8, 20, 2, 3, 5, 6, 8, 35, 9, 60, 4, 6, 72—9), Breţcomu Sabona (7317, 8, 22, 3, 5, 6, 8, 30, 1, 3, 5, 72—9, 402, 13, 22—6, 30, 54), Coman Constantin (7321, 6—8, 35, 60, 4, 76, 82, 98, 405, 6, 18, 23—6, 8, 42, 4, 7, 52—4), Gheorghe Marioara (7317, 8, 20, 2, 3, 5, 6, 35, 9, 73, 5, 8, 9, 99, 400, 2), Grigore Ecaterina (7317, 9, 20, 2, 3, 5, 6, 33, 5, 73, 5), Ionescu Maria (7317, 8, 20, 2, 3, 5, 6, 35, 9, 73, 5, 8), Lövensohn Marian (7379, 97, 8, 400, 1, 3, 38, 41, 75, 7, 9, 80—3, 90, 4—6), Neguţ Gheorghe (7212, 4, 7, 8, 20—3, 5—8, 30, 1, 3, 5, 8, 8, 60, 4, 6, 71—9, 82, 5, 7, 91, 5, 5, 88, 9, 402, 3, 5, 6, 10, 3, 7), Nicolae Aurelia (7323, 5, 6, 8, 35, 64, 75, 7, 9, 98, 9, 402, 23—5), Nicolescu Amelia (7320, 2, 35, 9, 42, 64, 73, 4, 9, 85, 7, 98, 9, 422, 5, 37, 50, 2). Olaru Ion (7317, 8, 20—3, 5—8, 33, 5, 60, 72—8, 82, 5, 98, 402, 5), Olteanu Raluca (7318, 7, 3, 5, 7, 87, 95, 9, 422—5, 37, 50), Prelipceanu Minodora (7317, 8, 20—3, 5, 6, 34, 5, 7, 9, 72, 3, 5, 7—400, 2), State Adrian (7318, 20, 3, 5, 7, 8, 30, 1, 5, 9, 42, 64, 6, 75, 7, 9, 87), Tulinescu Anca (7317, 8, 20, 2, 3, 5—8, 35, 9, 64, 73—5, 7, 8, 85), cl. XI Ciobanu Constantin (7360, 4, 72, 4, 5, 7, 82, 5—7, 416, 21, 4, 30, 94—6), Dăscălescu Adrian (7216, 7, 9, 24, 319, 7, 8, 20—3, 5, 32, 73, 7, 82—5, 90), Grigorescu Cornelia (7320, 3, 5—8, 30, 5, 7, 64, 85, 400), Ionescu Gabriela (7220, 3, 5—8, 30, 3, 5, 7, 64, 75, 7, 400, 3, 30, 940—6), Iordan Niculina (7220, 1, 3, 5—8, 30, 3, 5, 7, 42, 64, 75), Mihai Corneliu (7356, 9, 60, 2, 4, 6, 74, 5, 7, 82, 5—7, 99, 416, 21, 4), Mihai Dan (7320, 1, 3, 5—8, 30, 5, 7, 42, 64, 75, 400, 1, 3), Nicolaescu Cristina (7317, 8, 20, 2, 5—8, 30, 3, 5, 7, 64, 75, 7, 400), Petru Stelian (7336, 9, 60, 2, 4, 6, 74, 5, 7, 88, 5—7, 416, 21, 4), Pîrvu Constantin (7312—4, 7, 8, 20, 4, 5, 410—3), Ristea Ion (7317, 8, 20, 3, 5—8, 3, 5, 7, 42, 64, 75, 7, 400, 3), Stan Ion (7312—4, 7, 8, 21, 2, 4, 5, 31, 4, 6, 40, 2, 4, 6—9, 98—403, 10), Stanciu Grigore (7317, 8, 20, 1, 3, 5—8, 30, 3, 5, 7, 42, 60, 2, 4, 77, 82, 5, 6, 99, 400, 3, 21, 4, 30), Stănescu Dan (7317, 20, 3, 5—8, 30, 3, 5, 7—9, 42, 3, 6, 59, 73, 5, 7, 91, 5, 7, 8, 400, 2—5), Ştefănescu Doru (7218, 20, 3, 6, 7, 35, 7, 64, 75, 7, 400, 3), Tomescu Pavelina (7317, 8, 20, 21, 3, 5—8, 30, 3, 5, 7, 42, 64, 75, 7, 8, 400, 3), Tudorache Marin (7317, 8, 20, 1, 3, 5—8, 30, 3, 5, 764, 75, 7, 86, 99, 400, 3. 21), *Vasiliu Ovidiu C.* (7346, 55, 6, 9, 60, 2, 4, 6,—9, 71—8, 82—5, 7—400, 2—5, 8—10, 3, 5, 8, 21—7, 30, 6, P). Vişinoiu Mihai (7317, 20, 3, 5—8, 30, 5, 7, 9, 42, 3, 69, 75, 91, 400, 2, 3), *L. 2* cl. V Comaniciu Horia (2429, 30, 2, 3, 50—3, 64, 5), Fulga Cristian (2429—32, 8, 50—3), cl. VI Curteanu Sanda (2465, 70, 9, 80, 3—5, 9) Dumitrescu Daniela (2450, 3—5, 48, 70, 84, 1), Ioniţă Gabriel (2464 7, 79—84), Mazăre Valentin (2440, 4, 52, 6, 64, 5, 7, 8, 70), Petrescu Dragoş (2429, 31, 2, 4, 6, 8, 9, 41, 2, 4), cl. VII Alecu Voica (2450, 3, 64—8, 70), Grigore Elena (2450, 3—5, 64, 5, 7, 70, 80, 1, 3, 4, 9), Florescu Gabriea (2450, 3, 4, 65, 79, 81, 3), Matei Nicoleta (2450, 5, 6, 67, 8, 70, 9, 89), Mignea Dănuţa (2453, 5, 67, 70, 81, 3, 4), Miron Alex. (2429—31, 4, 9, 41, 4, 5), Raduef Sorin (2452, 3, 5, 78, 81—3, 5, 8, 91), Strugaru Veronica (2454, 5, 61, 8, 70, 83, 4, 8), cl. VII Aleonte Ştefan (2434, 40—2, 5, 53, 5, 60—2), Beffa Mihai (2429—31, 4, 40, 1, 4—6), Bellea Gabriel (2455, 65, 7, 71, 2, 81, 3, 5, 91, 2), Dacian Plariu (2431, 2, 4, 40, 52, 5, 60—2, 8, 78), Ghinea Constantin (2434, 40—2, 5, 53, 5, 61), Liveanu Mariana (2480—5, 8—91), Manalia Nicolae (2431, 4, 8, 41, 7, 50, 2, 3, 62, 71, 2, 8), Nicolaescu Traian (2429—32,

4, 9, 40, 35). Nistorescu Vania (2434, 7—9, 41, 4, 50, 4, 62, 90), Petroşanu Grigore (2430, 1, 4, 9, 41, 5, 50, 2, 3, 9, 62), Pocate Mihaela (2450, 3—5, 62, 3, 71, 4), cl. IX Circioagă Teodora (2474, 6—8, 94, 7330, 82, 9, 9), 423, 37, 41, 75, 94—6), Iancu Filofteia (2419, 21, 3, 7, 46, 7, 9, 7284, 6—8, 90, 217, 8, 26, 8), Stan Gheorghe (2444—7, 9, 74, 5, 8, 9, 73, 7, 8, 21, 5, 6, 8, 39), Vişan Marian (2444—9, 60—2, 74, 6, 8, 7317, 8, 25, 6, 8, 39), cl. X Cernat Laurenţiu (7317, 9, 25—8, 35, 72—4, 82, 5), Cimpeanu Eliza (7313, 7, 20, 3, 4, 6, 8, 35, 72, 3, 5, 7, 8, 7, 8, 91, 40, 2, 5), Cojocaru Eugen (7313, 7, 20, 2—5, 8, 35, 7, 97, 9, 403), Dănică Rozalia, (7314, 7, 8, 23, 5—8, 35, 75, 99, 402), Georgescu Alina (2417, 8, 20, 2, 3, 5, 6, 8, 75, 7, 8, 85, 7), Georgescu Cecilia (7317, 8, 20, 3, 5—8, 35, 64, 72—8, 82, 5, 7, Dobrescu Cecilia (7317 8, 20, 3, 5—8, 35, 64, 72—8, 82, 5, 7), Dobrescu Mihai (7320, 3, 5—8, 35, 64, 76, 82, 5, 99), Marica Petre (7317—20, 33, 5, 7, 82, 7), Mazăre Alex. (7317, 8, 23, 5, 6, 8, 34, 5, 76, 7, 87, 90, 402), Neagu Paulina (7317, 8, 20, 3, 5, 6, 8, 72—4, 7, 423, 52), Panait Ion (7313, 7, 8, 20, 3, 4, 6, 8, 35, 72, 3, 5, 7, 8, 40, 2, 5), Papuc Viorel (73, 4, 7, 8, 20—3, 5, 6, 8, 35, 423), Pavel Viorel (7314, 5, 7, 8, 20, 2, 3, 6, 8, 32, 5, 72, 3, 5, 7, 8, 2, 402, 5, 30), Spiridon Maria (7317, 3, 4, 7, 8, 23, 5—8, 34, 5, 73—5, 7, 87, Tudor Stoica (7313, 4, 7, 8, 20—3, 5, 6, 8, 35, 72, 5, 7), *L. 3* cl. X Spiegel Wilhelmina (7312—4, 7, 8, 20—3, 5, 6, 8, 30, 3—5, 7, 60, 4, 72, 3, 5, 95, 8, 400, 3—6, 25, 37, 41, 4, 50, 2), *L. s* cl. VIII Dumitrache Ion (2450, 2—6, 8, 60—3), *L. 5* cl. VI Nedelcu Vătălina (2429—39, 40), *L. 6* cl. IX Stan Constantin (2444—7, 9, 7313, 7, 8, 21, 4—6, 8), cl. X Mihăilescu Florin (7313, 4, 8, 20, 2, 5—8, 32, 7, 72, 3,5, 403) 23—5, 50, 2, 4), Nicolae Otilia (7317, 8, 20, 2, 6, 8, 35, 75, 7, 82, 5, 402, 37, 54), Taraş Viorel (7317, 8, 20, 2, 3, 5, 77, 450, 80, 94—6, 9), Teodorescu Marius (7317, 8, 23, 77, 9, 87, 405, 23—6, 30, 50), *Şc. de Umuzică* cl. VII Földeş Tamara (2430, 1, 4, 9, 40, 1, 5, 50, 5).

PLOPENI. *L.* cl. V Bulmeza Sorin (2430, 2, 4, 50, 3, 65—7), cl. X Drăgan Nicolae (7317, 8, 20, 2, 3, 5, 6, 8, 32, 3—5), Petrache Gheorghe (7314, 7, 8, 20, 2, 3, 6, 8, 35, 75, 423—5, 52).

PODU TURCULUI (Bacău) *L.* cl. X Rotaru Nicolae (7317, 8, 30, 2, 3, 32, 6, 73, 5, 7, 402, 5).

POGOANELE (Buzău) *L.* cl. IX Drăgan Aurelia (2445—9, 60, 2, 3, 74, 8, 92, 4, 7326).

POIANA MARE (Oltenia) *L.* cl. IX *Caragea Aurel* (2444—6, 8, 9, 60—3, 75—6, 7317, 8, 20—6, 30, 5, 6, 74, 6, 73, 7—9, 95, 9, 402, 3, 7, 23, 4—6, 30, 5, 30, 1, 2, 7, 8, 54), Cîrstea Ion (2444—6, 9, 60—2, 74, 5, 8, 7326, 8, 30, 42), *Diaconu Ilarian* (2444—9, 60—3, 7314, 7, 8, 20—3, 5—8, 30, 1, 5, 7, 9, 48, 64, 6, 73, 79, 95, 9, 402, 6, 23, 6, 30, 7, 41, 3, 4, 7, 8, 52, 4). *Trăistaru Enea* (7320, 2, 3, 30, 2, 3, 5, 7, 8, 60, 6, 73—5, 7—9, 82, 7, 91, 5, 7, 8, 402—7, 2444—6, 9, 60—3, 74, 7).

RĂDĂUŢI. *L. 1* cl. X Guşeţu Dorin (7282, 3, 91, 2, 5, 6, 300, 1, 5, 6, 8, 13, 4, 7, 8, 20, 3, 6, 7, 8, 32, 3, 5, 9), cl. XI Fortună Sorin (7312, 25, 6, 42, 72—8, 423—5, 30, 2).

RĂSTOCI (Cluj) *Ş. g.* cl. VIII Demian Juliana (2450, 62, 7, 70, 4, 9, 84, 9, 90).

REGHIN *L. 2* cl. VII Costea Vasile (2430—2, 4, 8, 9, 41, 2, 50—5), Morariu Ioan (2430, 2—4, 8, 9, 41, 2).

REŞIŢA. *Ş. g. 1* cl. VIII Borş Adrian (2429, 32, 4, 8, 41, 54, 5, 60, 2), *Ş. g.* cl. V Horvarth Andrei (2429, 31, 51, 64, 5, 7, 79, 83), cl. VIII Horvath Monica (2429, 30, 1, 2, 4, 41, 6, 9), *L. 1* cl. XI Joiart Ioan (7356, 9, 60, 2, 6, 72—9, 80, 6, 7, 90, 1, 8, 403, 12, 18, 22, 4—6, 30—3, 5, 7, 47, 50, 2, 6, 7, 60, 4, 7, 74, 83, 6, 93—9, 527), *L. 2* cl. IX Ionescu C. (2444—7, 9, 60, 1, 77, 8, 7325, 6, 8).

RECAŞ. *Ş. g.* cl. XI Coată Petru (7317, 8, 22, 3, 5, 6, 8, 37, 40, 3, 64, 413, 6).

RICA. *Ş. g.* cl. VI-a Depărăţeanu V. Ion (2432—4, 6—9, 41).

RÎMNICU SĂRAT. *Ş. g.* cl. VIII Iorga Emil (2429—32, 8—47), *L. 1* cl. VII Grigorescu Tiberius (2429—39, 41—45, 9), cl. VIII Combeşteanu Irina (2431, 2, 7, 9, 41, 3, 55, 60, 2, 83, 4, 8, 9), cl. X Cambeşteanu Dumitru (7318, 20, 3, 6, 8, 30, 1, 2, 5, 48, 80, 94, 5, 6), Ghiţă Mircea (7225, 7, 317, 8, 20, 22, 3, 5, 6, 8, 30—3, 5, 7, 47—9, 51), cl. XI Apostol Ovidiu (7313, 7, 20, 2, 3, 5—8, 30, 2, 5, 8, 9), *L. 2* cl. V Mocanu Guţă (7317, 8, 23, 6, 8, 75, 87, 97, 8, 9, 423, 5, 38, 50, 4), cl. XI Crintea Mişu (7416, 23, 4, 5, 50, 2, 4, 77, 9, 80, 2, 90, 4—6, 9, 502), *Panait Stan* (7318, 20, 3, 6, 8, 32, 8, 9, 40, 2, 3, 5, 9, 56, 9, 60, 72—9, 84, 7, 91, 4, 8, 402, 7, 12, 3, 6, 8, 22).

RÎMNICU VÎLCEA. *Ş. g.* cl. VII Jivan I. Nicolae (2452, 4, 64, 7, 70, 3, 9, 81—3), *L. 1* cl. VIII Dumănoiu Laurenţiu (2432, 39, 41, 2, 6, 9, 54, 62, 72, 4, 6), cl. IX Maiorescu Gheorghe (2460—3, 74, 5, 92, 4, 7437, 75, 7, 94—7), Motre Asriana (2425—8, 45, 6, 9, 7284, 6, 8, 325). Oprea Cristian (2438, 41, 4, 5, 6, 9, 7284, 5, 7326, 8), Papian Crişan (2460—3, 74, 5, 7, 7317, 8, 27, 8, 82, 5, 99, 401, 18), cl. X Bădescu Adrian (7318, 20, 2, 3, 5, 6, 8, 37, 72, 3, 6—9, 423—5, 8, 30, 52), Fulea Nicolae (7320, 3, 5, 6, 8, 77, 423, 4, 8, 30, 2, 7, 52, 4), Piloiu Radu (7317, 8, 20, 3—6, 8, 366, 72, 3, 7, 8, 426, 30, 7, 52, 77, 90, 3—7, 9, 505), Stoica Petre (7318, 20, 3, 5, 6, 8, 37, 72, 3, 7—9, 432, 6, 8, 30, 2, 7, 52, 54), cl. XI

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

Negoiță Nicolae (7312, 4, 7, 8, 20, 1, 2, 5, 6, 8, 37, 9, 45, 72, 3—5, 7, 8, 98, 9), Papian Doru (7318, 23, 6—8, 33, 5, 7, 64, 72—5, 7—9, 82—5, 97, 8, 423, 5, 30, 7, 50, 2, 4, 60), Tărfuică Mihaela (7318, 23, 5, 6, 8, 73, 4, 5, 7—9, 413, 22, 4, 30), *L. 2* cl. VI Berceanu Radu (2429, 30, 1, 9, 50, 2, 3, 5, 6), Găman Doina (2432, 4, 8, 41, 50, 2—6), Ionescu Daniela (2432, 8, 9, 41, 2, 50, 3. 4, 5), Tintorescu Rodica (2429, 32, 38, 9, 41, 2, 50, 2, 3, 4—6), cl. IX Boldeanu Florian (2445, 6, 9, 60—2, 74, 7, 8, 325, 6, 8), cl. X Tărfuică Gabriela (2444—9, 60, 2, 717, 8, 25, 6, 8), Tuca Marius (7317, 8, 22, 35, 64, 73, 5, 7, 9, 405, 6, 52, 4, 70).

RÎU ALB. *Ş. g.* cl. VII Codreanu Dana (2429—32, 4, 8—41, 65, 7), Iubu Gheorghe (2445, 50—5, 61, 4, 7, 72), Stoian Angela (2431, 4, 8, 9—41, 7, 55, 64, 7), Tîncu Elena (2429, 31, 2, 4, 8—42, 54, 65, 7), cl. VIII Milea Mihai (2450, 2, 3, 61, 4, 5, 7, 72, 7), Pagel Elena (2429, 52, 60, 1, 4, 8, 70, 4, 5, 8), Radu Constantin (2450, 2, 3—5, 60—2, 4, 8), Savu Iulian (2437, 2, 4, 50, 2, 3, 5, 62, 74, 8).

ROMAN. *Şc. prof.* Hrişcă Vasile (2384, 413, 28—34, 40, 2, 6, 50, 5, 62), Păuleț Petru (2410, 1, 3, 4, 7, 8, 9, 21, 8, 9, 30, 1, 40, 1, 5, 6, 50, 2, 3, 62), *Ş. g.* Platon Emilia (2429—42), *L.* cl. IX Dima Valentin (2425—8, 44—7, 60—3, 7284—8), cl. XI Bercovici Nelu (7386, 423, 4, 30, 5 1, 65, 76, 8, 80, 90, 4, 5, 6, 8, 9, 502, 11, 27).

ROMÂNAȘI. *Ş. g.* cl. VI Mălăieș Felicia (2429, 30—9, 1—4), Perneș Letiția (2429, 30, 1, 1, 2, 4, 5, 8, 41, 2, 4).

ROMITA. *Ş. g.* cl. VI Gog Valeria (2429, 30, 1, 2, 4, 5, 8, 41, 2, 4).

ROMÂNEȘTI. *Ş. g.* cl. VII Herea Ion (2448—57, 60—2), Munteanu Petru (2430, 2, 8, 9, 41, 2, 7, 60, 1, 2).

ROȘIORII DE VEDE. *L. 1* cl. VIII Bursumac Marcel (2440, 1, 2, 4—8, 62, 92), Nedelea Stancu (2429—32, 5, 8, 9—45, 7), cl. IX Surpățeanu Gheorghe (2449, 60, 1, 2, 78, 7317, 18, 21, 5, 8, 401), Teacă Anastase (2444, 5, 7, 60, 74, 7317, 8, 21, 5, 6, 7, 42, 62), *L. 2* cl. X Mateescu Emilian (7317, 8, 23, 5, 6, 8, 35, 72, 82, 85, 7, 8), cl. XI Sandu Marin (7318, 25, 6, 8, 35. 9, 72—5, 7, 8, 82, 5, 91, 5, 7, 8, 9, 400—4, 10).

RUDĂRIA. *Ş. g.* cl. VIII Dancea Eufemie (2432, 8—42, 9, 60, 2, 7326, 8).

SADOVA (Suceava). *Ş. g.* cl. VII Zbranca V. (2431, 2, 4, 44, 50, 3, 5, 66, 7), cl. VIII Coca Aurel (2431, 4, 8, 40, 1, 67—9, 71—4).

SĂLIȘTE. *L.* cl. IX Candin Ilie (2444—8, 60, 2, 7325—8, 30, 44), Gavrilă Ioan (2445, 6, 6, 9, 60—3, 75, 8, 7325, 6, 8).

SATU MARE. *Ş. g.* cl. VII Erdei Judith (2431, 45, 50, 2, 3, 60, 2, 71, 2), cl. VIII Görbe Mihai (2425, 30, 1, 4, 8, 9, 40, 4, 5, 6), *L. 1* cl. IX Coardaș Vasile (2444—6, 8, 9, 60—3, 7314, 7, 8, 21, 25—8, 35, 9, 82, 5, 7, 97—9, 401, 18), cl. X Görbe Iosif (7312, 4, 7, 8, 20, 2, 5—8, 35, 77, 96), Merk Iosif (7285, 8, 314, 8, 25—8, 7, 95, 9, 402), Sichet Margareta (7364, 79, 424—6, 76, 9, 90, 4—6, 9), *L. 2.* cl. IX Chercheș Otilia (2444—9, 60—3, 7326—8), Hutton Ecaterina (2444—6, 9, 60—3, 74, 7325—8), Kurtimcez Petru (2444—9, 60—2, 74, 7318, 26, 8, 42), Mureșan Rodica (2442, 7—9, 63, 74, 6, 8, 7318, 25, 37, 8), Murgu Gheorghe (2444, 7, 9, 74, 6, 8, 7317, 8, 25, 6, 85, 442), Sălăgeanu Rodica (2444—7, 9, 60—2, 74, 8, 7325, 6, 8), Sumian Maria (2444—6, 9, 60—3, 78, 7325—8), cl. XI Nemeș Gavril (7312, 4, 6, 7, 20—8, 32—40, 5—8, 62, 4, 6, 7, 72—8, 82—9, 94—9, 402—6, 11, 13, 16, 18, 22).

SEBIȘ (Crișana) *L.* cl. IX Cofan Nicolae (2460, 2, 3, 74, 92, 4, 7437, 78, 94—6, 405), Dronca Mircea (2245, 460, 1, 2, 7317, 25—8, 99, 437, 41), Zopota Nicolae (2444—6, 9, 60—3, 7325—8), cl. X Floruțiu Marius (7317, 8, 25, 6, 8, 35, 64, 72—79, 87, 99, 400, 2, 18, 423, 5, 37, 41, 50, 2), Pantazi Nicolae (7313, 4, 7, 8, 20—3, 5, 6, 8, 30, 5, 64, 6, 72—5, 7—9, 99, 401, 2, 5).

SEGARCEA (Oltenia) *L.* cl. X Hîrșie Emil (7314, 7, 8, 20—3, 35, 7, 64, 6, 72—5, 9), Roșu Viorel (7317, 7, 20, 3, 33—6, 7, 403—6, 17), Tudor Constantin (7317, 8, 20—3, 34, 5, 7, 8, 74, 6. 72—9, 87, 402, 3, 5, 18).

SFÎNTUL GHEORGHE. *L. 1* cl. V Pakuts Maria (2450—3, 64—6, 7, 80, 1) Terza Gabriela (2450—3, 64—7, 80, 1), Rakosi A. (2450—4, 64—6, 7, 80).

SIBIU. *Ş. g. 1* cl. VII Stîngescu Petre (2429—32, 4, 8—46), cl. VIII Ciortea Gligor (2467, 71—4, 7, 83, 90), *Ş. g.* cl. VIII Bălășoiu Mircea (2429—46), *Ş. g. 4* cl. VIII Bevescu Alexandru (2450, 3, 5, 64, 5, 8, 83, 5, 8, 90), Roșca Lucia (2455, 65, 8, 71, 83, 5, 8, 90), *Ş. g. 5* cl. VIII Șerbănuț Ligia (2432, 40, 7, 50, 2, 3, 4, 5), *Ş. g. 8* cl. V Vasilescu Maria (2429—32, 4, 50, 3, 64, 5), cl. VI Cormanu Cornel (2431, 4, 8, 9, 50, 3, 4, 67), cl. VII Răceală Mircea (2429, 31, 9, 50, 2. 3, 6, 64, 5, 7), cl. VIII Lepeny Margareta (2429—32, 8, 34, 39, 41, 42), Lungu Daniel (2450, 2, 62, 5, 7, 72, 8, 80, 3, 4, 8, 9, 90, 94), Schister Harald (2431, 2, 7, 8, 9, 40—4, 6), Vasilescu Gheorghe (2429—32, 4, 8—42, 5, 6), *Ş. g.* cl. V Roșca Maria (2432, 50, 1, 3, 64—7), Stoica Viorica (2432, 50, 3, 64—7, 81), cl. VI Fleancu Sorin (2430, 2, 4, 9, 44, 50, 2, 6, 64, 7, 70, 9), Blîndea Ioan (2432, 9, 41, 54, 5, 79, 83, 4), Bogdan Carmen (2431, 2, 8—42, 54, 64, 5), Cojocaru Alexandru (2400—2, 41, 2, 55, 64, 5), Coldea Corina (2432, 8, 9, 41, 2, 53, 7), Constantinescu Georgeta (2430, 1, 4, 8, 9, 41, 2, 54, 5), Iosifescu Sorin (2450, 9,

1966 SZEP 2 7

41, 2, 53, 4, 5, 61, 79, 84, 9), Lucian Mircea (2430, 1, 4, 8, 90, 41, 2, 50, 4, 5, 81, 3, 4), Maniţiu Maria (2431, 2, 8, 41, 42, 55, 64, 5, 84), Moga Eliade (2431, 2, 41, 2, 54, 5, 79, 84, 9), Poenaru Mircea (2429—31, 4, 5, 8, 3, 41, 50, 3, 4, 7325), Popa Eugenia (2452, 8, 9, 41, 2, 54, 5, 84, 9), Rodocea Teofil (2430, 4, 9, 41, 50, 3, 5, 64), Radu Ilie (2430, 4, 9, 41, 50, 3, 5, 64), Tămăşan Alexandru (2430, 1, 4, 9, 41, 54, 5, 81, 3, 4), cl. VIII Cazacu Mihai (2431, 2,4, 8, 9, 40—2, 5, 6). Stănică Adrian (2431, 2, 4, 8, 9—42, 5, 6, 50, 3, 4), Trif Mihai (2450, 2, 3, 4, 5, 60—2, 71, 2, 4), *Ş. g.* cl. VII Gheorghiţă Nicuşor (2420, 1, 4, 55, 66, 8, 83, 4, 9), Neagu Dorin (2431, 2, 4, 39, 41, 53, 5, 85, 3, 9), Ursuleac Maria (2429, 31, 9, 41, 79, 83; 4, 9), *Ş. g.* cl. VI Dădirlat Nicolae (2429, 30, 1, 2, 4, 8, 9, 41, 2, 4, 65), Nichifor Liliana (2430, 2, 8, 9, 54, 64, 5, 70), Oană Dan (2429—2, 4, 41, 2, 4, 64, 5), Opriş Carmen (2432—4, 8, 41, 2,54, 64, 5, 7), Popa Adrian (2430—2, 4, 44, 50, 64, 5, 70), cl. VII Binder Karia (2453, 54, 5, 64, 5, 82, 4, 9), Fakesch Penate (2453, 4, 5, 65, 71, 9, 83, 4, 9), Graez Hannelose (2453, 4, 5, 61, 4, 5, 61, 4, 5, 84, 9), Ingrid Prinder (2453, 4, 5, 61, 4, 5, 83, 4, 9), Ingrid Gutwirth (2453—5, 61, 4, 79, 81, 3, 4), Marin Delia (2450, 4, 5, 65, 80, 1, 3, 4, 8, 9), Rus Eugenia (2450, 4, 5, 68, 79, 81, 3, 4), Schindler Elke — Wilhelmina (2453—4, 65, 70, 1, 9, 83, 4, 9), cl. VIII Corvoianu Gabriela (2479, 82, 4, 6—90), Costea Victoriţa ((2481—3, 87, 8, 90, 1, 2, 4), Hoza Doina (2480, 1, 2, 3, 5, 7, 8, 9), Petrescu Florin (2455, 64, 80, 3—5, 9, 50), Pop Horia (2479, 80, 1, 3, 4, 5, 8—90, 2), *Ş. g. 15* cl. VIII Latiu Tudor (2429, 30, 2, 8, 9, 41, 4, 6. 7), Tăban Ion (2421, 2, 8, 42, 6, 52—5, 62), Tătaru Rodica (2452—5, 72, 81, 83—5, 8), Trifan Tatiana (2483, 4, 71, 89, 90, 88, 72, 91, 92), *Ş. g. 17* cl. VIII Gaidarji V. (2431, 2, 46, 7, 50, 2, 3, 4, 5, 60—3, 72), *Ş. g.* cl. V Tudorache Valentin (2410—4, 94—6, 8, 9), *Ş. g.* 19 cl. VI Ochişel Elena (2429—32, 4, 5, 8, 9, 4), *L. 1* cl. X Lesiacu Dan (7317, 4, 7, 9, 23, 5, 8, 66, 72, 3, 5, 9, 400, 25), *L. 2* cl. IX Popa Elena (2348, 41, 4—6, 62, 71, 2, 7325, 6), cl. X Codrea Maria (7317, 8, 20, 21, 3, 6, 8, 72, 5, 9, 7423—5), Giurca Ovidia (7317, 8, 20—3, 35, 72, 5, 8, 9, 423—5, 30), Moisescu Sanda (7317, 8, 214, 35, 72, 5, 9, 91, 423, 4, 32), Tălmăcan Eugenia (7317, 8, 20, 3, 6, 8, 35, 75, 9, 91, 423, 25), Sîrbu Carmen (7317, 8, 21, 22, 3, 6, 8, 72, 7, 423, 5, 30, 30, 32), *L. 3* cl. IX Anton Elena (2445—7, 50—3, 7327, 8, 97, 8, 401, 32, 41), Groza Carmen (2445, 9, 60—3, 7318, 21, 5, 85, 97, 8, 9, 401), Iliescu Marilena (2445, 60, 2, 3, 74, 7, 8, 7325, 7, 8, 97, 8, 401, 30, 132), Isailă Dana (2402, 49, 60, 2, 3, 74, 8, 7325, 6, 99, 402, 30, 2, 7), Laşiţă Dan (2445, 6, 60, 1, 3, 78, 7325, 7, 8, 97, 8, 401, 30, 2), Stancu Ana (2449, 60, 1—3, 7317, 8, 21, 5, 7, 85, 97, 8, 9, 401, 409), cl. X Alexandru Adriana (7317, 8, 20—3, 6—8, 30, 3, 5, 7, 9), Bratu Ecaterina (7317, 8, 20—3, 26—8, 33—5, 7), Chitic Elena (7317, 8, 20—3, 6—8, 30, 33, 5, 7, 9), Dan Doina (7317, 8, 20—2, 26—8, 30—3, 5, 7, 75, 85), Lungu Gherghinica (7317, 8, 20, 2, 3, 7, 8, 30, 3, 5, 7, 9), Maniu Dan (7317, 8, 20—3, 7, 8, 30, 3, 5, 75, 85, 99, 401), Nicolescu Mihai (7317, 8, 20, 2, 3, 8, 35, 9, 79, 80, 3, 514), Olaru Ieronim (7314, 8, 20, 2, 3, 5—8, 33—5, 7), Pricop Sorin (7282—7, 301, 320, 25—8, 33, 5, 64, 72, 3, 5, 7, 99), Sederiaş F. (7312—4, 7, 8, 20, 2, 3, 325—8, 30, 3, 5, 7), Sfercoci Traian (7317, 8, 20, 22, 3, 7, 8, 30, 33, 5, 75, 85, 99, 401), Stroe Veronica (7317, 8, 20, 1, 2, 3, 6, 30, 3, 5, 7, 8); Turcu Octavian (7314, 7, 8, 20, 22, 3, 7, 8, 30, 3, 5, 75, 85, 99, 401).

SIGHIŞOARA. *Ş. g.* cl. VIII Boroş Viorel (2430, 1, 4, 40, 4, 5, 50, 2, 3, 62), Bucur Petru (2431, 2, 8, 9, 40—3, 49, 50, 4, 62), Ciopec Elena (2431, 2, 8, 9, 40—7, 9, 7326, 8), Palade Nicolae (2430, 1, 2, 4, 8, 9, 41—3), *L. 1* cl. IX Sera Chitopol Dan (2461, 74, 6, 8, 94, 7317, 8, 28, 475, 6, 94, 5), cl. X Jakab Elek (7314, 7, 8, 20, 2, 4—6, 7, 8, 66, 72, 3, 98), Seifenthk Paus (7318, 23, 6, 8, 75, 9. 424, 5, 80, 94, 5—7, 9), Stase Vasiliu Luminiţa (7314, 8 20, 3—8, 31, 3. 51), *L. 2* cl. XI Duca Bogdan (7311, 4, 5, 7, 8, 20, 6, 8, 31, 42, 3, 47, 9, 82, 3—5, 432), Vlad Elena (7326, 8, 39, 43, 5, 59, 72, 3, 6, 7, 90, 427, 30, 56, 65), Bobîrneagă Alexandru (7314, 7, 8, 20, 2, 3, 6, 9, 66, 73, 5, 7, 8, 9).

SIGHETUL MARMAŢIEI *L. 1* cl. IX. Titirică Radu (2444—6, 60, 2, 74, 6, 7, 7325, 6, 8, 30, 51).

SIMERIA *L.* cl. VI Cucuian Ştefan (2431, 5, 8, 9, 41, 2, 51, 5), Giurgiu Vasile (2431, 2, 4, 8, 9, 42, 51, 55), cl. VII Oprea Alexandru (2450, 3, 64, 5—7, 70, 9, 80, 8), cl. X Lemac Sorin (7326, 8, 360, 75, 7—9, 91, 425, 30, 77, 9, 94, 6). (va urma)

★

Tirajul fiind limitat, gazetele se trimit mai întîi abonaţilor şi de aceea rugăm colaboratorii noştri să se aboneze de îndată. Preţul este de 2 lei exemplarul. *Abonamentele se pot face prin oficiile poştale locale.*

I. P. „Informaţia" — c. 3649

INDEX 41601

Lei 2

E 1426

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE
DIN REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA

GAZETA MATEMATICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XVII — octombrie 1966

10

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁRES DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

GAZETA MATEMATICĂ
SERIA B
Anul XVII, nr. 10 — octombrie 1966

SUMARUL

	Pag.
1. Descoperirea legii atracţiei universale de Caius Iacob . . .	433
2. Separarea rădăcinilor unor ecuaţii şi stabilirea unor inegalităţii de I. Stamate, Cluj	438
3. Note matematice de Dan Voiculescu, Ion Chiţescu	441
4. Aspecte ale concursului de matematică 1966, de T. Roman	447
5. Probleme rezolvate (7237, 7238, 7241, 7242, 7243, 7245 7246, 7248; E: 2395, 2396, 2398)	450
6. Chestiuni de examen (7768—7784)	458
7. Probleme propuse (7785—7819)	460
8. Exerciţii şi probleme propuse pentru clasele V — VIII (E: 2573 — 2595)	466
9. Rubrica rezolvitorilor de probleme	471

ANUL XVII **10** octombrie

COMITETUL DE REDACŢIE

Dincă N., profesor; *Grosu A.*, profesoară; *Ionescu-Bujor C.*, prof. univ. emerit; *Ionescu-Ţiu C.*, profesor, redactor şef adjunct; *Kiss E.*, conf. univ. (Cluj); *Kovacs K.*, conf. univ. (Cluj); *Muşat I.*, profesor; *Ottescu C.*, profesor; *Plăviţu M.*, profesor; *Sacter O.*, conf. univ., redactor şef; *Simionescu Gh.*, conf. univ.; *Ţene L.*, profesoară şi *Voinea R.*, prof. univ.

REDACŢIA G. M-B: Str. Academiei, 14 — Tel. 14.46.53. — Bucureşti

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică a şcolilor, precum şi orice material informativ se vor trimite pe adresa de mai sus.

GAZETA MATEMATICĂ

SERIA B

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XVII nr. 10 octombrie 1966

DESCOPERIREA LEGII ATRACȚIEI UNIVERSALE

DE

Prof. univ. *Caius Iacob*, membru al Academiei Republicii Socialiste România

Se împlinesc trei sute de ani de la una dintre cele mai uluitoare descoperiri ale minții omenești : atracția universală.

Șansa acestei descoperiri o are un tînăr în etate de 23 de ani : Isaac Newton. Dar șansa nu favorizează decît inteligențele care sînt pregătite și acest tînăr s-a pregătit intens, în așa măsură încît să poată smulge una din marile taine ale universului, fundamentînd prin calcul legea atracției, care guvernează sistemul planetar al soarelui.

Epoca acestei descoperiri, încă în față, este vara anului 1666. *Isaac Newton* (1643—1727), fiul unui modest fermier din Woolsthorpe (Lincolnshire), după excelente studii secundare, cu începere din vara anului 1661 devine student la Trinity College din Cambridge, școală fondată de regele Henric al VIII-lea, în anul 1546 și care ajunsese la o mare reputație. Aici, el urmează în special lecțiile unui mare matematician, Isaac Barrow (1630—1677), unul dintre precursorii calculului diferențial. Fire meditativă, Isaac Newton s-a consacrat studiilor de matematică, mecanică și fizică. El a studiat în special operele lui Euclid, Descartes și Viète, dar mai ales pe acelea ale lui Wallis (1616—1703), marele matematician englez al epocii. În curînd, Isaac Newton obține o serie de rezultate proprii remarcabile, care atrag asupra sa atenția lui Isaac Barrow. În anul 1665, la vîrsta de 22 de ani, Newton stabilește dezvoltarea în serie a binomului

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots$$

în care m este un număr întreg sau fracționar iar $|x| < 1$, dînd și alte dezvoltări în serie remarcabile.

Preocupat de problemele de mișcare, puse de mecanică, Isaac Newton creează o nouă teorie matematică : teoria fluenților și a fluxiunilor, adică, cu denumirea de astăzi, calculul diferențial și integral. El aplică cu succes metodele noii teorii la studiul curbelor plane, al convexității și concavității lor, la determinarea maximelor și minimelor, etc.

Dar atenția lui Newton a fost atrasă încă de prin 1663 de studiul căderii corpurilor la suprafața Pămîntului. Acest banal fenomen scăpase unui examen științific pînă ce marele învățat italian Galileo Galilei (1564—1642), introducînd noțiunea de accelerație și subliniind importanța principiului inerției a stabilit legile căderii în vid a corpurilor, procedînd la experiențe

foarte judicioase. Galileu şi-a publicat rezultatele în Olanda, în lucrarea celebră „Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze" (Leyde 1638)[1]. Pe de altă parte, la începutul secolului, Johannes Kepler (1571—1630), vestitul astronom al Curţii din Praga, enunţase în tratatul „Astronomia nova" (1609), legile după care : 1. planetele se mişcă în jurul soarelui pe traiectorii eliptice, soarele aflîndu-se într-unul din focare, 2. mişcarea se face după legea ariilor. În anul 1618, Kepler a mai descoperit o a treia lege, după care cuburile axelor mari a ale orbitelor planetare sînt într-un raport constant cu pătratele timpurilor de revoluţie T în jurul soarelui, adică raportul a^3/T^2 este constant, avînd aceeaşi valoare pentru oricare planetă a sistemului nostru solar. Aceste legi sînt aplicabile şi la mişcarea Lunii în jurului Pămîntului.

În vara anului 1666, meditînd asupra acestor fenomene, la Woolsthorpe, satul său natal unde se retrăsese încă în 1665 din cauza unei epidemii de ciumă, Newton a avut intuiţia genială de a asimila cele două fenomene studiate de Galileu şi de Kepler. El a considerat că mişcarea de cădere a corpurilor la suprafaţa Pămîntului şi mişcarea Lunii în jurul Pămîntului s-ar datora aceleiaşi legi de atracţie.

După cum se exprimă însuşi Newton : „În acelaşi an am început să mă gîndesc că gravitaţia se întinde pînă la orbita Lunii şi aflînd cum se exprimă forţa cu care o sferă care se roteşte în interiorul altei sfere apasă asupra suprafeţei acesteia, din legea lui *Kepler*, că timpurile periodice ale planetelor sînt în raportul puterii 3/2 a distanţelor de la centrele orbitelor lor, am dedus că forţele care ţin planetele pe orbite trebuie să fie în raport invers cu pătratele distanţelor lor de la centrul în jurul cărora se învîrtesc ; prin urmare, am comparat forţa necesară să ţină Luna pe orbita sa cu forţa gravitaţiei pe suprafaţa Pămîntului şi am aflat că ea corespunde cu multă aproximaţie"[2].

Newton este primul om de ştiinţă care şi-a dat seama că această lege guvernează atît căderea corpurilor pe Pămînt cît şi mişcările planetelor în jurul soarelui sau ale sateliţilor în jurul planetelor, ea avînd un caracter mult mai general. El a arătat în mod simplu cum această lege se impune ca o consecinţă a legilor lui Kepler şi că, invers, legile lui Kepler sînt simple consecinţe ale legii de atracţie invers proporţională cu pătratul distanţei. Pentru a obţine acest rezultat, pe care Hooke nu-l putuse atinge, Newton a utilizat metodele fecunde ale calculului fluxional, pe care-l introdusese. În acelaşi timp el a scos în evidenţă noţiunea de masă, pe care a separat-o de aceea de greutate. Pe cînd greutatea corpurilor va fi variabilă cu distanţa la centrul Pămîntului, masa, ca ceva inerent materiei, va rămîne constantă.

O legendă, datorită lui Voltaire, vrea ca Newton să fi fost inspirat în meditaţiile sale prounde de contemplarea căderii unui măr din pom. În orice caz, lucrările lui Kepler atrăseseră de mult atenţia oamenilor de ştiinţă şi ideea atracţiei planetelor de către soare prinsese rădăcini. Respinsă de aristotelicieni, concepţia atracţiei între corpurile materiale, a fost reluată în 1600 de William Gilbert, medic al regelui Iacob I al Angliei, iar apoi de Kepler, care a considerat ipoteza unei atracţii între soare şi planete, invers proporţională cu distanţa sau chiar cu pătratul ei. Robert Hooke (1635—1703) emisese în acelaşi an 1666 ipoteza unei legi de atracţie invers proporţională cu pătratrul distanţei.

---

[1]) Publicată în limba română sub titlul : Galileo Galilei, Dialoguri asupra ştiinţelor noi, Traducere şi Note de V. Marian, Ed. Academiei R.P.R.

[2]) Isaac Newton, Principiile matematice ale filozofiei naturale, Traducere şi adnotări de V. Marian Edit. Acad. R.P.R., 1 p. 956, 429

Cu acest prilej, Newton a pus în evidenţă fapte care încă nu erau bănuite şi anume că un corp (adică un punct material) de masă m, atras de un centru fix de masă m' cu o forţă

$$F = f\frac{mm'}{r^2} \qquad (f = \text{constantă universală}) \tag{1}$$

proporţională cu masele şi invers proporţională cu patratul distanţei r la centru, poate să descrie nu numai o elipsă ci şi o hiperbolă sau o parabolă după cum viteza sa iniţială v_0 şi distanţa iniţială verifică una din inegalităţile următoare

$$v_0^2 \lessgtr \frac{2fm'}{r_0} \qquad \begin{matrix} < \text{(elipsă)} \\ > \text{(hiperbolă)} \\ = \text{(parabolă)} \end{matrix} \tag{2}$$

Newton a mai arătat că dacă centrul atractiv este şi el mobil, atunci legea a treia a lui Kepler nu mai este satisfăcută în mod riguros ea fiind înlocuită prin relaţia

$$4\pi^2\frac{a^3}{T^2} = f\cdot(m + m'), \tag{3}$$

care permite să se calculeze raportul m/m'. De aici rezultă posibilitatea determinării maselor planetelor.

Este interesant de semnalat că în aceeaşi perioadă a vieţii sale Newton a făcut şi descoperiri epocale în optică, punînd bazele spectroscopiei.

Reîntors la Cambridge în 1667, după încetarea epidemiei, Newton a devenit la vîrsta de 26 de ani profesor la catedra de matematică a Universităţii, pe care i-a cedat-o Isaac Barrow. În această epocă (1668—1669) el a redactat cîteva memorii de matematică în care expune metodele calculului fluxional. Aceste memorii n-au fost publicate decît 40 sau 50 de ani mai tîrziu.

Preocupat de teoria atracţiei universale şi căutînd o verificare a ei, Newton a studiat mişcarea Lunii în jurul Pămîntului, datorită atracţiei acestuia. Forţa de atracţie a Pămîntului asupra masei m aflate pe Lună se exprimă prin

$$F = \frac{fmM}{d^2}, \tag{4}$$

unde d este distanţa de la centrul Pămîntului la centrul Lunii, care poate fi presupusă constantă, iar M masa Pămîntului. Conform legii a treia a lui Kepler (3) avem, neglijînd pe m în prezenţa lui M,

$$fM = 4\pi^2\cdot\frac{d^3}{T^2}, \tag{5}$$

unde T este perioada de revoluţie a Lunii în jurul Pămîntului. Dacă asimilăm greutatea corpurilor cu forţa atracţiei exercitată de Pămînt am

avea ca expresie a greutății corpului de masă m la suprafața Pământului

$$mg = \frac{fm\,M}{R^2}, \tag{6}$$

unde R este raza Pământului, iar g accelerația gravitațională, care fusese determinată experimental de Galileu. Rezultă din cele două egalități precedente relația

$$g = 4\pi^2 \frac{d^3}{T^2 R^2}. \tag{7}$$

Dar între R și d avem relația $d = 60\ R$, obținută prin observații astronomice.

$$g = \frac{4\pi^2 . 60^3 . R}{R^2} \tag{8}$$

În felul acesta g ar putea fi determinat teoretic, dacă am cunoaște raza R a pământului, știind că perioada T este de 27 zile, 7 ore și 43 minute.

Concordanța celor două valori obținute pentru g, cea teoretică (7) și cea experimentală nefiind mulțumitoare, Newton nu și-a publicat cercetările decît mai tîrziu, după ce, în urma măsurării unui arc de meridian de către Abatele Picard s-a obținut o mai bună evaluare a razei Pământului (1684). Refăcîndu-și calculele, Newton a găsit de data aceasta valoarea cunoscută a lui g.

O altă cauză de întîrziere în publicarea rezultatelor lui Newton se datorește faptului că el nu a putut demonstra decît mai tîrziu teorema potrivit căreia o sferă cu straturi concentrice omogene atrage un punct material după legea invers proporțională cu patratul distanței la centrul ei. Or, această teoremă fusese admisă în considerațiile sale.

Ca urmare a insistențelor astronomului Halley, Newton și-a publicat ansamblul cercetărilor de mecanică în opera celebră : „Philosophiae Naturalis Principia Mathematica", apărută în iulie 1687 sub auspiciile lui Royal Society din Londra.

În acest tratat, Newton expune principiile care stau la baza mecanicii (principiul inerției, proporționalitatea forței cu accelerația, principiul acțiunii și reacțiunii) și enunță legea de atracție ca valabilă pentru orice mase din univers, fără a face însă ipoteze asupra naturii intime a forței de atracție. Această lege universală este aplicată la diferite probleme de mecanică cerească deschizîndu-se noi capitole de cercetare.

Astfel, Newton consideră atracția unei sfere omogene asupra unui punct material, creind teoria potențialului, pune problema celor trei corpuri : soarele, pămîntul și luna, studiind perturbațiile din mișcarea lunii, se ocupă de mișcarea corpurilor în medii rezistente, combate teoria vîrtejurilor, care fusese propusă de Descartes și era pe atunci unanim acceptată pentru a descrie mișcarea planetelor. Newton pune problema studierii figurilor de echilibru relativ, a corpurilor cerești în rotație în jurul axei lor, conchizînd la turtirea pămîntului la poli și a arătat că din acest fapt rezultă o explicare a mișcării de precesie și de nutație a pămîntului (fenomen a cărui teorie completă, va fi dată mai tîrziu de D'Alembert). Tot Newton ca precursor al lui Laplace și Poincaré a dat o primă explicare fenomenului mareelor, punînd problema studiului lor matematic.

În fine, el a studiat mișcarea cometelor sub acțiunea atracției solare.

Iată numai cîteva dintre rezultatele lui Newton pe care, ca o culme a virtuozității sale matematice, el le expune sub o formă geometrică, pentru a le face accesibile contemporanilor săi, căci metoda sa fluxională, prin

care le-a obținut nu era încă difuzată și ar fi putut să dea loc la obiecțiuni prin noutatea ei. Desigur că oricare dintre aceste rezultate ar fi suficiente pentru a justifica celebritatea lui Newton.

În 1671 Newton devine membru al lui Royal Society, în 1699 Academia de științe din Paris îl alege ca membru al ei iar din 1703 pînă la moarte (1727) este fără întrerupere președinte al lui Royal Society.

Ideile sale sînt unanim acceptate în Anglia, unde calculul fluxional este dezvoltat în continuare de B. Taylor (1685—1731), C. Mac-Laurin (1698—1746), R. Côtes (1682—1716) și Th. Simpson (1710—1761). Dar pe continent ele pătrund cu greutate. Discipolii lui Newton duc în același timp o lungă polemică cu Leibniz (1646—1716) în legătură cu prioritatea lui Newton sau a lui Leibniz în descoperirea calculului diferențial și integral. Se știe astăzi că ambii învățați au descoperit acest puternic instrument de cercetare matematică simultan, dar independent unul de altul. Newton a fost condus de considerații de cinematică, iar Leibniz ținînd seamă de legile proprii de dezvoltare ale matematicii.

În Franța, ideile lui Newton au găsit în cartezieni adversari convinși; numai după ce expedițiile organizate de Academia de științe din Paris pentru măsurarea arcului de meridian la ecuator, în Peru și în apropiere de polul Nord, în Laponia (1736), sub conducerea savanților La Condamine și Maupertuis, au confirmat prevederile lui Newton relative la turtirea Pămîntului la poli, se poate spune că teoria atracției universale a fost unanim adoptată În difuzarea ideilor newtoniene a jucat un rol deosebit Emilie de Breteuil, marquiză de Châtelot care a tradus în limba franceză opera fundamentală a lui Newton, precum și Voltaire, care prin scrierile și epigramele sale ridiculiza pe adversarii lui Newton.

Întreg edificiul mecanicii cerești, clădit în secolele următoare de Mac-Laurin, Euler, D'Alembert, Clairaut, Maupertuis, Lagrange, Laplace, Legendre, Gauss, Jacobi, Poincaré Liapunoff, Sundmann, are la bază concepțiile newtoniene. Nimic nu poate dovedi mai elocvent toată profunzimea lor decît descoperirea numai prin calcul, pe baza teoriei perturbațiilor dezvoltate de mecanica cerească, a două noi planete : Neptun a cărui poziție pe cer a fost calculată de Le Verrier în 1846 și a lui Pluton, descoperit în 1930 în urma calculelor astronomului Lowell.

Desigur că succesele mecanicei cerești care permit să se studieze precis mișcările planetelor, culminînd cu descoperirea prin calcul a unor noi planete, constituie tot atîtea verificări indirecte ale genialei ipoteze newtoniene asupra atracției universale. Lansarea sateliților artificiali ai Pămîntului și ai Soarelui cu începere din 1957, au constituit experiențe științifice de confirmare directă a previziunilor lui Newton în legătură cu mișcările corpurilor sub acțiunea unei forțe invers proporționale cu pătratul distanței și ele au deschis o nouă eră în istoria științei.

Secolul nostru a înregistrat crearea unei noi mecanici și a unei noi teorii a atracției. Este vorba de mecanica einsteiniană, care însă se bazează pe mecanica newtoniană, ca aproximație de bază, căreia îi aduce completări interesante.

Privită în perspectiva celor trei sute de ani care s-au scurs de la creația sa, opera fundamentală a lui Newton, valabilă și astăzi, trezește aceleași sentimente de admirație pe care le-a produs la contemporanii săi. Căci prin această operă, Isaac Newton s-a dovedit un mare pionier al științei moderne. El a dat, primul, exemplul sistematizării și matematizării unei științe fundamentale a naturii, mecanica.

Se poate spune, cu Paul Painlevé, că știința modernă s-a născut odată cu enunțarea sub o formă matematică a principiilor mecanicii, deoarece matematizarea mecanicii a servit ca model pentru dezvoltarea celorlalte științe fundamentale ale naturii ca fizica, chimia și biologia, care urmează, pe măsura perfecționării lor, un proces de matematizare analog.

SEPARAREA RĂDĂCINILOR UNOR ECUAȚII ȘI STABILIREA UNOR INEGALITĂȚI

DE

I. STAMATE, Cluj

Fie ecuația în x, $f(x, \lambda) = 0$ depinzînd de parametrul real λ, căreia i se cere natura rădăcinilor cînd $\lambda \in R$.

Presupunem că ecuația este rezolvabilă în λ, fie $\lambda = \varphi(x)$. Construim graficul variației funcției $y = \varphi(x)$. Numărul rădăcinilor reale ale ecuației $f(x, \lambda) = 0$ este egal cu numărul punctelor de intersecție al graficului cu dreapta de ecuație $y = \lambda$. Rădăcinile reale ale ecuației date corespund absciselor punctelor de intersecție.

Exemplul 1. Să se afle natura rădăcinilor ecuației[1]

$$\lambda x^3 - 3x - \lambda - 1 = 0$$

λ fiind un parametru real.

Soluție. Rezolvînd în raport cu λ și punînd $\lambda = y$, avem

$$y = \frac{3x + 1}{x^3 - 1}.$$

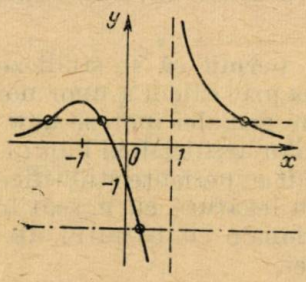


Fig. 1

Se deduce

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{3}$		0		1		∞
y	$+$		0	$-$		$-$		$-$			$-$
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow 0$

Tăind graficul cu dreptele variabile de ecuație $y = \lambda$ deducem pentru $\lambda \leqslant 0$ avem o rădăcină reală și două rădăcini imaginar conjugate.

$$\left[\lambda < -1,\ 0 < x_1 < 1;\ \lambda = -1;\ x_1 = -1;\ x_1 = 0;\ -1 < \lambda < 0,\right.$$
$$\left. -\frac{1}{3} < x < 0;\ \lambda = 0,\ x_1 = -\frac{1}{3}\right];$$

pentru $0 < \lambda < 1$, trei rădăcini reale, două negative, [una cuprinsă în intervalul $\left(-1, -\frac{1}{3}\right)$ și una pozitivă > 1];

1) *N. Abramescu.* Aplicații la discuția și separarea rădăcinilor unei ecuații din G. M 1943 p. 395–400.

pentru $\lambda = 1$; trei rădăcini reale: $x_1 = x_2 = -1$, $x_3 = 2$;
pentru $\lambda > 1$, o rădăcină reală > 1 și două rădăcini imaginar conjugate.

Exemplul 2. Să se dea natura rădăcinilor ecuației[1]

$$(\lambda - 1)x^2 + 2(\lambda + m + 1)x + \lambda - m - 3 = 0,$$

λ și m fiind doi parametri reali.

Soluție. Rezolvînd ecuația în λ și punînd $\lambda = y$ se deduce

$$y = \frac{x^2 - 2(m+1)x + m + 3}{(x+1)^2},$$

apoi

$$y' = 2(m+2)\frac{x-2}{(x+1)^3},$$

Deosebim cazurile

1° $m < -2$

x	$-\infty$		-1		2		∞
y'		$-$		$+$	0	$-$	
y	1	$\searrow$	$-\infty$	$-\infty$	$\frac{1-m}{3}$	$\searrow$	1

$\lambda < 1$ și $\lambda < m + 3$, două rădăcini reale negative, una cuprinsă în intervalul $(-1,0)$ alta < -2; $\lambda = m + 3$, atunci $x_1 = -4$, $x_2 = 0$;

$\lambda > m + 3$, rădăcini reale, una negativă < -1 și alta pozitivă în intervalul $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Dacă

$$\lambda = 1 \text{ atunci } x = \frac{1}{2}$$

$1 < \lambda < \frac{1-m}{3}$, două rădăcini reale $> \frac{1}{2}$.

$\lambda > \frac{1-m}{3}$, rădăcini complexe.

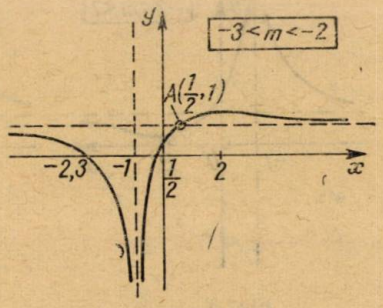


Fig. 2

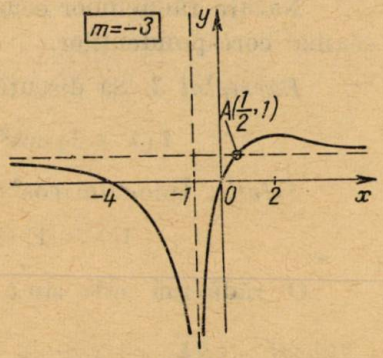


Fig. 3

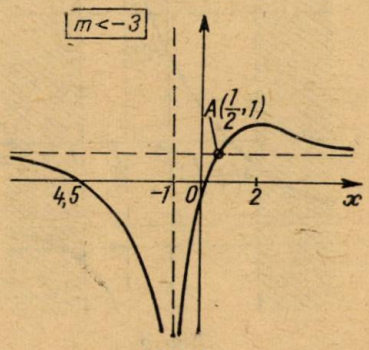


Fig. 4

1) Problema 5362, G. M., -B 1962. p. 422.

2° $m = -2$. Dacă $\lambda = 1$, identitate, dacă $\lambda \neq 1$, atunci $x_1 = x_2 = -1$

3° $m > -2$

x	$-\infty$		-1		2		∞
y'		$+$	∞	$-$	0	$+$	
y	1	$\nearrow$	∞	∞ $\searrow$	$\frac{1-m}{3}$	$\nearrow$	1

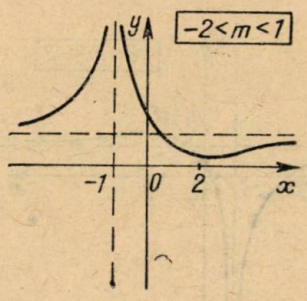


Fig. 5

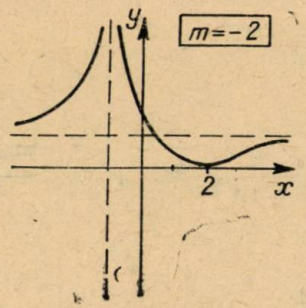


Fig. 6

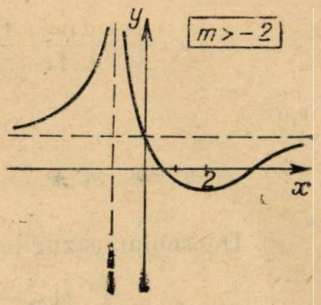


Fig. 7

Natura rădăcinilor ecuației în acest caz se deduce lesne, o lăsăm pe seama corespondenților.

Exemplul 3. Să discutăm natura rădăcinilor ecuației

$$4(\lambda + 1)\cos^2 t + 4\lambda \sin t - 3\lambda - 1 = 0, \quad \lambda \in R$$

Soluție. Înlocuim $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$ și atunci ecuația devine

$$4(\lambda + 1)\sin^2 t - 4\lambda \sin t + \lambda - 1 = 0.$$

O rădăcină este $\sin t = \frac{1}{2}$ deci $t = \frac{\pi}{6} + (-1)^n \pi$,

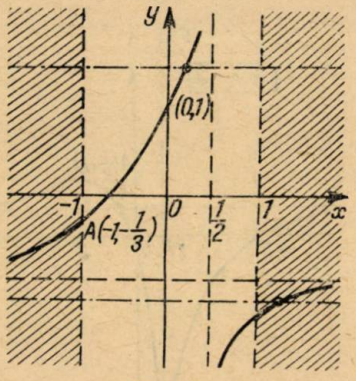


Fig. 8

Punem $\sin t = x$ și $\lambda = y$, rezolvînd apoi în y deducem

$$y = \frac{1 + 2x}{1 - 2x}; \quad y' = \frac{4}{(1 - 2x)^2},$$

apoi

x	∞		$\frac{1}{2}$		∞
y'		$+$		$+$	
y	-1	$\nearrow$	∞ $-\infty$	$\nearrow$	-1

Cum $|\sin t| \leqslant 1$, se iau ca rădăcini acceptabile numai valorile lui x cuprinse în intervalul închis $[-1,1]$.

Dacă $\lambda \leqslant -3$, ecuația are o rădăcină cuprinsă în intervalul $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$,

Dacă $-3 < \lambda < -\frac{1}{3}$ nu are nici o rădăcină,

iar dacă $\lambda > -\frac{1}{3}$, atunci are o rădăcină.

NOTE MATEMATICE

27. Generalizarea celei de-a 2-a probleme de la O.I.M. 1965

Fie sistemul liniar

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0 \qquad (i = 1,2,\ldots n)$$

ai cărui coeficienți satisfac condițiile :

$$a_{ij} > 0 \text{ dacă } i = j \text{ și } a_{ij} < 0 \text{ dacă } i \neq j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} > 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Se cere să se arate că sistemul admite soluția unică

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

Soluție. Fără a pierde din generalitate, putem presupune că între necunoscutele x_j există o relație de ordine, de exemplu :

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n$$

Sistemul admite evident soluția

$$x_1 = x_2 = \ldots . x_n = 0.$$

Să arătăm că nu există altă soluție. Vom presupune că există o asemenea soluție diferită și vom arăta că ajungem la o contradicție.

Dacă $x_1 = x_2 = \ldots . = x_n$ atunci avem și $x_1 = x_2 = \ldots . = x_n = 0$, deci numerele x_j nu sînt toate egale. În relația (1) rezultă că nu toate semnele „$\geqslant$" sînt „egaluri".

Dacă punem :

$$y_1 = x_1 - x_2,\ y_2 = x_2 - x_3, \ldots, y_{n-1} = x_{n-1} - x_n.$$

atunci numerele y_k $(k = 1,2,\ldots, n-1)$ sînt nenegative şi cel puţin unul este strict pozitiv.

Introducînd în prima ecuaţie a sistemului, găsim :

$$0 = a_{11}(x_n + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}) + a_{12}(x_n + y_2 + y_3 + \ldots + y_{n-1}) +$$
$$+ \ldots + a_{1(n-1)}(n-1)(x_n + y_{n-1}) + a_{1n}x_n = y_1 \cdot a_{11} + y_2(a_{11} + a_{12}) +$$
$$+ \ldots + y_{n-1} \cdot (a_{11} + a_{12} + \ldots a_{1(n-1)} + x_n \cdot (a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{1n}).$$

Deoarece $y_k \geqslant 0$ şi

$$a_{11} > a_{11} + a_{12} > a_{11} + a_{12} + a_{13} > \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots > a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{1n} > 0,$$

rezultă :

$$0 > (y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1})(a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{1n}) + x_n(a_{11} + a_{12} + \ldots a_{1n}) =$$
$$= (a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{1n})\ (x_n + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n+1}) = (a_{11} + a_{12} +$$
$$\ldots + a_{ln}).x_1 \text{ deci } x_1 < 0 \text{ deoarece } a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{ln} > 0.$$

Deducem că toate numerele x_j sînt strict negative.

Acest raţionament se poate aplica oricare ar fi relaţia de ordine între numerele x_j, deci sistemul admite pe lîngă soluţia banală doar soluţii compuse numai din numere negative.

Afirmaţia din urmă conţine o contradicţie : dacă sistemul admite soluţia $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ atunci el admite şi soluţia $(-x_1, -x_2, \ldots -x_n)$ compusă numai din numere pozitive.

Ipoteza noastră asupra existenţei unei soluţii diferite de cea banală este deci falsă.

În cazul $n = 3$ se obţine problema de la O.I.M.

Observaţie : Argumentul folosit în această demonstraţie prin reducere la absurd poate fi generalizat :

Dacă orice soluţie $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a sistemului liniar :

$$\sum_{j=i}^{n} a_{ij}\ x_j = b_i\ (i = 1,2,\ldots,n)$$

satisface condiţiile

$$x_1 \leqslant M,\ x_2 \leqslant M, \ldots, x_n \leqslant M,$$

atunci sistemul are cel mult o soluţie.

Pentru demonstraţie, să presupunem că sistemul are o soluţie : $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$

Punînd $y_j = x_j - x_j^*\ (j = 1,2,\ldots n)$. obţinem sistemul liniar

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, y_j = 0\ (i = 1,2,\ldots,n). \qquad (2)$$

Dacă acesta admite o altă soluție în afară de cea banală, a unci admite neapărat și una astfel încît unul din y_j să fie mai mare decît $M - x_j^*$

Aceasta se demonstrează imediat ținînd seama că sistemul (2) admite odată cu soluția $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ și soluția $(\lambda y_1, \lambda y_2, \ldots, \lambda y_n)$ unde λ este parametru real care ia orice valoare finită.

Dan Voiculescu, elev, București

28. Asupra unor inegalități

Să considerăm o mulțime finită formată din n numere reale strict pozitive: $\{a_1, a_2 \ldots a_n\}$.

1. Dacă $\alpha, \beta \in R$ atunci există inegalitatea:

$$\frac{a_1^{\alpha+\beta} + a_2^{\alpha+\beta} + \ldots + a_n^{\alpha+\beta}}{a_1^{\alpha} + a_2^{\alpha} + \ldots + a_n^{\alpha}} \geqslant \frac{a_1^{\alpha} + a_1^{\alpha} + \ldots + a_n^{\alpha}}{a_1^{\alpha-\beta} + a_1^{\alpha-\beta} + \ldots + a_n^{\alpha-\beta}}$$

Condiția necesară și suficientă de egalitate este: $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$

Demonstrație. Inegalitatea din enunț echivalează cu:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\alpha+\beta}\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\alpha-\beta}\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\alpha}\right)^2 \qquad (1)$$

Notăm $a_i^{\frac{\alpha+\beta}{2}} = x_i$; $a_i^{\frac{\alpha-\beta}{2}} = y_i$

Atunci (1) devine:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2$$

adică inegalitatea Cauchy-Buniakowski.

Din identitatea lui Lagrange se deduce că avem egalitate atunci și numai atunci cînd:

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \ldots = \frac{x_n}{x_n}$$

ceea ce aici devine:

$$a_1^{\beta} = a_2^{\beta} = \ldots = a_n^{\beta} \text{ adică, } a_1 = a_2 = \ldots = a_n$$

și astfel enunțul este complet demonstrat.

În particular: dacă $\alpha = \beta$ obținem problema 6579 din G.M.—B, iar dacă $\alpha = 0$; $\beta = 1$, obținem cunoscuta inegalitate:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2.$$

2. În cele ce urmează vom folosi următoarea proprietate:

$$\text{Dacă } a \geqslant b \text{ (2) și } \frac{m}{a} \geqslant \frac{n}{b} \tag{3}$$

atunci $m < n$, (4)

unde a, b, m, n sînt numere reale strict pozitive.

Dacă notăm $\frac{m}{a} = x, \frac{n}{b} = y$, din (3) obținem $x \geqslant y$ (5). Dar $m = ax$; $n = by$ și din (2) și (5) obținem cu atît mai mult $m < n$.

3. Să presupunem acum că între cele n numere reale strict pozitive considerate $n \geqslant 2$ există relația:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n a_1 a_2 \ldots a_n \tag{6}$$

a) În aceste ipoteze se poate demonstra următoarea proprietate:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} \geqslant n \tag{7}$$

unde avem egalitate dacă $n = 2$ (condiție suficientă) sau, pentru $n > 2$, dacă $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$ (condiție necesară și suficientă).

b) În aceleași ipoteze, pentru $n \geqslant 2$, demonstrăm inegalitatea:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a \geqslant n \tag{8}$$

unde semnul de egalitate corespunde cazului $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$ (condiție necesară și suficientă).

Inegalitatea lui Cauchy:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

devine:

$$a_1 a_2 \ldots a_n \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \Leftrightarrow (a_1 a_2 \ldots a_n)^{n-1} \geqslant 1 \Leftrightarrow a_1 a_2 \ldots a_n \geqslant 1 \; (8') \Rightarrow$$
$$\Rightarrow n a_1 a_2 \ldots a_n \geqslant n \Rightarrow a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant n$$

adică tocmai inegalitatea (8).

Este evident că dacă $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$ avem egalitate, deci această condiție este suficientă. Să arătăm că este și necesară.

Într-adevăr: $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n \to n a_1 a_2 \cdots a_n = n$; $a_1 a_2 \cdots \ldots a_n = 1$.

Atunci deducem: $\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$

egalitate care are loc numai cînd $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$; ținînd seama și de ipoteze, avem $a_i = 1$.

c) În aceleași ipoteze, arătăm că există inegalitățile (m natural):

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{-m} \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^{-m+1} \geqslant \cdots \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^{-1} \geqslant n, \tag{9}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{m} \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^{m-1} \geqslant \cdots \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant n. \tag{10}$$

Semnele de egalitate corespund cazului $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$
Vom demonstra prin inducție completă relativă la m.

1) Dacă $m = 1$, (9) se verifică.
Să presupunem proprietatea adevărată pentru $m = k$, adică

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{-k} \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^{-k+1} \geqslant \cdots \geqslant \sum_{i=I}^{n} a_i^{-1} \geqslant n.$$

În inegalitatea de la 1 să punem $\alpha = -k$; $\beta = -1$, obținem:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^{-k-1}}{\sum_{i=1}^{n} a_i^{-k}} \geqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^{-k}}{\sum_{i=1}^{n} a_i^{-k+1}}. \tag{11}$$

Dar, din ipoteza de inducție, avem:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{-k} \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^{-k+1}. \tag{12}$$

Ținînd seama de (11) și (12) și aplicînd proprietatea demonstrată a 2, obținem:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{-k-1} \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^{-k}. \tag{13}$$

Relația (13) unită cu ipoteza de inducție constituie proprietatea pentru $m = k + 1$. Conform principiului inducției complete, proprietatea este adevărată pentru orice $m \in N$.

2) Pentru $m = 1$ se verifică (3.b). Apoi, demonstrația este asemănătoare cu precedenta, punînd însă $\alpha = k$; $\beta = 1$. Cazurile de egalitate se justifică ușor, deoarece la 1 avem egalitate cînd $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ (condiție necesară și suficientă), care aici implică $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$.

Observație: Numerele a_i $(i = 1,2,\cdots n)$ nu pot fi toate subunitare, deoarece aceasta ar contrazice 3 b) și nu pot fi toate supraunitare, deoareee aceasta ar contrazice 3 a)

4. *Aplicații:* a) Intre suma S_m și produsul P_m a m numere reale strict pozitive, există relația:

$$S_m + \frac{1}{P_m} \geqslant m + 1 \qquad (m \geqslant 1) \tag{14}$$

Condiția necesară și suficientă de egalitate este ca toate numerele considerate să fie egale cu 1.

Intr-adevăr: fie o mulțime finită formată din $m < 1$ numere reale strict pozitive arbitrare: $\{a_1, a_2 \cdots a_m\}$. Să notăm: $a_1 + a_2 + \cdots + a_m = S_m$; $a_1 a_2 \cdots a_m = P_m$. Avem două posibilități:

1. $P_m > \dfrac{1}{m+1}$.

In acest caz, vom putea scrie:

$\dfrac{1}{P_m} \geqslant m + 1 \Rightarrow S_m + \dfrac{1}{P_m} > m + 1$, adică (14) cu strictețe.

Acest caz exclude posibilitatea de egalitate.

2. $P_m \geqslant \frac{1}{m+1}$ În acest caz rezultă :

$(m+1)\,P_m - 1 > 0$

Să notăm : $n - 1 = m$, deci $n \geqslant 2$.

Fie $a_n = \frac{S_m}{(m+1)\,P_m - 1}$; evident $a_n > 0$. Dacă vom nota numerele inițiale arbitrare : $a_1, a_2, \ldots a_{m-1}, a_m$, respectiv cu $a_1, a_2, \ldots . a_{n-2}, a_{n-1}$, atunci deducem ușor :

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n = n a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n$$

și ne găsim în ipotezele de la 3. Putem scrie inegalitatea (8') care aici devine :

$$\frac{S_m \cdot P_m}{(m+1)\,P_m - 1} \geqslant 1,$$

de unde deducem (14).

Condiția de egalitatea enunțată este evident suficientă și corespunde cazului 2, deoarece $P_m = 1 > \frac{1}{m+1}$. Să demonstrăm, necesitatea ei. Avem egalitatea cînd (8') se verifică cu egalitate, ceea ce are loc numai cînd $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$, ceea ce am arătat anterior.

b) În orice triunghi ascuțitunghi ABC există inegalitățile :

$$\sum \operatorname{tg}^m A \geqslant 3\left(\sqrt{3}\right)^m \quad (15) \text{ și } \sum \operatorname{ctg}^m A \geqslant \frac{3}{\left(\sqrt{3}\right)^m} \tag{16}$$

unde $m \in N$ sau $m = 0$.

În aceleași ipoteze ca la 3, să efectuăm substituția :

$$a_i = \frac{x_i}{\sqrt[n-1]{n}}.$$

Atunci (6) devine :

$$a_i^m x_1 + x_2 + \ldots + x_n = x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Inegalitatea : $\sum_{i=1}^{n} a_i^m \geqslant n$ dedusă n, prin tranzivitate din (10), devine

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^m \geqslant n \cdot \sqrt[n-1]{n} \tag{17}$$

Caz particular $n = 3$. Ținînd seama de ipoteze, vom putea scrie :

$$x_1 = \operatorname{tg} A\,;\ x_2 = \operatorname{tg} B\,;\ x_3 = \operatorname{tg} C.$$

Atunci (17) devine :

$$\operatorname{tg}^m A \geqslant 3\left(\sqrt{3}\right)^m, \text{ adică (15).}$$

Inegalitatea $\sum_{i=1}^{n} a_i^{-m} \geqslant n$, dedusă prin tranzivitate din (9), devine :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^m} \geqslant \sqrt[n-1]{n}$$

Analog, pentru $n = 3$, obținem (16), punînd $\frac{1}{x_i} = \operatorname{ctg} A$ etc. Cazurile de egalitate corespund cazurilor de egalitate din inegalitățile folosite, deci avem egalitate dacă $m = 0$ sau $A = B = C = \frac{\pi}{3}$.

Ion Chițescu, student, București

ASPECTE ALE CONCURSULUI DE MATEMATICA PENTRU ELEVI

1966

Conf. univ. **T. Roman**

Ca şi în anii precedenţi, acest concurs tradiţional (ajuns la a 54-a ediţie) s-a bucurat de atenţia organelor învăţămîntului, de sprijinul şcolilor, de colaborarea susţinută a mii de profesori. Se cuvine să li se adreseze de la început mulţumiri tuturor acelora care au contribuit la buna desfăşurare a acţiunii, la obţinerea de rezultate frumoase.

Concursul pentru elevii de liceu

ASPECTE ORGANIZATORICE. Instrucţiunile anterioare ale Ministerului, actualizate prin indicaţiile date la începutul anului şcolar au constituit un factor important de ordin organizatoric. S-au constituit astfel 16 comisii regionale, una a oraşului Bucureşti şi aproape 370 de comisii locale au primit indicaţii din partea comisiilor centrale respectiv a comisiilor regionale.

La etapa locală (6 februarie) participarea şcolilor şi elevilor a fost mai importantă decît anul trecut, după cum rezultă amănunţit din tabloul anexat. Se constată o creştere de aproape 13% a numărului participanţilor. Cele mai însemnate creşteri au avut loc în regiunea Galaţi (100%), Argeş, Hunedoara şi Oltenia (30%). Trebuie relevată colaborarea strînsă dintre comitetele filialelor SSM şi secţiile de învăţămînt regionale pentru numirea comisiilor locale, instruirea acestora şi îndrumarea lor pe teren. Secţiile de învăţămînt raionale au asigurat transmiterea plicurilor cu subiecte către toţi preşedinţii comisiilor locale, în ziua concursului, fără să se semnaleze vreo defecţiune.

La etapa regională (3—4 aprilie) creşterea numărului elevilor participanţi (de la 2 446 anul trecut la 2 590 în acest an) este mai puţin importantă. Se

Regiunea	1965			1966								
	Etapa locală			Etapa locală			Etapa regională			Etapa finală		
	şcoli	centre	elevi	şcoli	centre	elevi	şcoli	centre	elevi	şcoli	centre	elevi
Argeş	41	14	1.082	42	24	1.311	33	18	133	13	9	22
Bacău	17	12	932	22	14	1.118	18	13	121	8	5	21
Banat	74	36	1.544	79	36	1.813	45	30	171	9	7	10
Braşov	57	21	1.754	72	22	1.642	24	21	175	7	3	21
Bucureşti	26	20	918	31	27	1.129	29	21	187	11	8	16
oraş Bucureşti	58	8	2.277	45	8	2.347	35	1	261	23	1	70
Cluj	59	22	1.049	53	23	966	31	21	139	5	4	11
Dobrogea	33	22	626	27	18	775	19	13	98	7	4	10
Crişana	29	9	651	33	20	802	24	18	124	7	5	8
Galaţi	18	9	533	25	12	1.070	25	12	160	4	3	8
Hunedoara	35	20	973	41	22	1.209	31	21	118	10	9	14
Iaşi	29	10	634	44	15	752	21	9	142	8	4	11
Maramureş	22	16	698	21	14	761	16	14	96	7	5	12
Mureş Aut. Magh.	32	19	836	28	19	775	16	14	104	4	2	10
Oltenia	35	34	1.472	35	34	1.937	34	23	163	9	3	25
Ploieşti	63	63	1.984	56	26	1.953	47	24	339	12	7	37
Suceava	37	10	1.007	32	26	1.003	15	10	59	10	7	11
Total	665	305	18.970	686	360	21.263	463	283	2.590	154	86	317

remarcă însă creşterea numărului de localităţi din care provin elevii participanţi (283 faţă de 255). Modificarea datei stabilite iniţial a avut ca efect şi o anumită absentare a elevilor admişi la această etapă. Se relevă şi de această dată deplina concordanţă între secţiile de învăţămînt şi filialele Societăţii în

pregătirea şi asigurarea bunei desfăşurări. Deşi elevii nu au mai putut fi cazaţi în internatele liceelor (care îşi reluau cursurile), s-a putut recurge la internatele şcolilor profesionale şi tehnice ai căror elevi erau încă în vacanţă. Este surprinzător faptul că şi în acest an în regiunea Suceava elevii au trebuit să se reîntoarcă în localităţile de origine, ne asigurîndu-li-se cazarea la reşedinţa regiunii.

La etapa finală (8, 9 mai) au participat 317 elevi (faţă de 181 în anul precedent) reprezentînd 154 şcoli (faţă de 109) din 86 localităţi (faţă de 61).

Ca şi în alţi ani, participarea diferitelor şcoli dintr-o aceiaşi localitate nu este realizată nici în aceiaşi măsură, nici cu aceleaşi rezultate. Pentru etapa locală în special este necesar să se depună eforturi mai susţinute — de la începutul anului şcolar — pentru pregătirea psihologică (nu numai matematică) a elevilor care ar putea participa la concurs, în toate şcolile interesate. O atenţie specială este cazul să se acorde în acest an elevilor liceelor de specialitate care vor participa pentru prima dată, ca de altfel elevilor claselor a IX-a ale liceelor de cultură generală şi elevilor anilor I ai şcolilor profesionale. Este indicat, de asemenea, să se acorde atenţia cuvenită elevilor ce reprezintă şcoala la etapa regională sau finală pentru a evita absentarea unora dar mai ales rezultatele slabe ale altora.

Comisiile locale (în special unele din regiunile Dobrogea şi Hunedoara) trebuie să acorde toată atenţia sarcinilor organizatorice şi de popularizare ce le revin dar şi informării la timp şi în bune condiţiuni a comisiilor regionale pentru a nu provoca greutăţi în primul rînd elevilor lor.

SUBIECTELE DIFERITELOR ETAPE. Spre deosebire de anul trecut, subiectele au fost unice pe ţară la toate etapele, ceea ce a asigurat criterii unice de apreciere. Comisia centrală a primit 99 de probleme propuse pentru etapa locală şi 33 pentru etapa regională. Cele mai active au fost regiunile Ploieşti (în total 33 probleme), Oltenia (20 probleme), Braşov (17 probleme), Argeş (14 probleme). Nu au trimis nici o problemă regiunile Bacău, Iaşi, Maramureş. Au trimis un număr foarte mic de probleme regiunile Crişana (2), Galaţi şi Suceava (cîte 3).

Deşi s-a cerut comisiei centrale să alcătuiască pentru etapa locală o asemenea selecţie a problemelor încît elevii să fie atraşi spre studiul matematicii, marea majoritate a lor să poată rezolva cel puţin în parte problemele date şi evidenţiaţii să poată aborda în bune condiţiuni toate problemele pînă la capăt, aceasta nu s-a realizat la clasa a XI-a unde subiectul de analiză conţinea şi întrebări dificile iar cel de geometrie analitică conducea la calcule greoaie dacă nu se alegeau axele în mod adecuat. Pentru etapa regională se semnalează dimpotrivă ca prea uşoare problemele date la clasa a XI-a şi grele cele de clasa a X-a. Aceasta a făcut ca elevii clasei a XI-a să fie în număr dublu faţă de cei de clasa a X-a, la etapa finală,

Deoarece la etapa locală nu s-au trimis subiecte pentru elevii claselor a IX-a serală, ai anului VI şcoli pedagogice ca şi pentru unele şcoli profesionale cu program special, comisiile locale au elaborat probleme în conformitate cu programa acestor clase. Pentru etapa regională s-au trimis subiecte şi pentru aceste categorii de elevi.

La toate etapele s-a constatat că problemele propuse pentru elevii şcolilor profesionale au ridicat greutăţi mai mari decît pentru ceilalţi elevi. Este indicat ca selecţionarea elevilor acestor şcoli pentru etapa locală şi pregătirea lor suplimentară să se facă fără a-i supraîncărca dar ajutîndu-i să obţină rezultate bune.

S-au făcut mai multe propuneri cu privire la desfăşurarea etapei regionale: să se dea două lucrări scrise (ca la etapa finală), să se ceară elevilor demonstrarea unor teoreme studiate în clasă, să se propună şi probleme care să facă mai puţin apel la bagajul de cunoştinţe, permiţînd identificarea acelora care sezisează relaţii şi pot face un raţionament corect, direct. Este indicat ca comisia centrală a concursului să ia în considerare aceste propuneri şi să adopte măsuri potrivite.

La etapa finală nu s-au dat în acest an decît lucrări scrise. Este necesar să se ia în considerare şi la etapa finală introducerea unor probleme din care să se desprindă nu numai măsura în care elevii stăpînesc cunoştinţe însuşite, ci şi posibilitatea de a se orienta în condiţii noi, de a studia o anu-

mită problematică pusă de realitate și care nu se încadrează strict în tipurile studiate în școală, evident fără a face apel la cunoștințe ce depășesc programa școlară.

PROGRAMUL CONEX. Principalul stimulent al elevilor evidențiați la fiecare etapă este posibilitatea de a participa la etapa următoare. Pentru elevii care au obținut rezultate bune la etapa locală și regională, școlile au posibilitatea de a-i evidenția în special cu ocazia serbării de sfîrșit de an. La etapa finală s-au acordat premii și mențiuni elevilor al căror nume a fost publicat în GM-B nr. 6.

La închiderea etapei regionale s-au prezentat elevilor participanți conferințe științifice (la Bacău, Timișoara, București, Oradea, Baia Mare, Craiova). În cele mai multe locuri, elevii au vizitat muzee, monumente istorice, locuri pitorești, au asistat la programe artistice oferite de echipe de elevi sau studenți. În toate centrele au avut loc consfătuiri cu cititorii Gazetei matematice seria B, s-au discutat rezolvările date problemelor concursului.

Participanții la etapa finală au vizionat spectacolul cu piesa Vlaicu Vodă la Teatrul Național și au vizitat muzeul de istorie a Partidului Comunist, a mișcării revoluționare și democratice din România. La adunarea de închidere a concursului au luat cuvîntul acad. Caius Iacob, vice președinte al Societății de științe matematice, conf. univ. Eugen Blideanu, director general în Ministerul Învățămîntului și elevul Eugen Popa, în numele premiaților.

În zilele etapei finale a avut loc o consfătuire cu cititorii G.M.-B și o lucrare de baraj cu elevii claselor a X-a și XI-a evidențiați la această etapă, în vederea selecționării participanților la cea de-a 8-a Olimpiadă Internațională de matematică.

Concursul de matematică din acest an a contribuit la întărirea mișcării matematice în rîndul tineretului. Este necesar ca în noul an școlar să se ia măsurile corespunzătoare pentru lichidarea lipsurilor constatate, atît pe plan local și regional cît și pe plan central și să se obțină rezultate mai bune.

Concursul pentru elevii cl. VI—VIII

ASPECTE ORGANIZATORICE. După o întrerupere de 5 ani a acestui concurs, el a fost reluat în entuziasmul copiilor, cu interesul și sprijinul deplin al profesorilor și părinților. Deși instrucțiunile au fost difuzate cu o anumită întîrziere, s-a reușit să se asigure o organizare complexă alcătuindu-se comisii pentru cca. 5 300 centre, atrăgînd peste 150 000 elevi din cca. 6 800 școli la etapa locală pentru clasele VI—VIII și peste 10 000 elevi la etapa raională pentru clasa VIII-a. Aceste date dovedesc efortul organizatoric deosebit depus de comisiile raionale și regionale ca și posibilitățile de a desfășura o activitate extrașcolară mai bogată la matematică, în rîndul elevilor școlilor generale. Deși acest concurs în formă largă dată în acest an a prezentat o noutate pentru profesori și secțiile de învățămînt, munca depusă și rezultatele obținute sînt demne de laudă. Comisiile regionale și raionale au asigurat instruirea președinților tuturor comisiilor, au trimis instrucțiuni suplimentare, au controlat și îndrumat pe teren pregătirea și desfășurarea etapei locale. În multe regiuni și raioane s-au organizat grupe de pregătire pe clase a elevilor ce se înscriseseră la concurs dar mai ales s-a obținut o creștere a interesului pentru studiul matematicii de către elevi.

Există sugestii utile pentru viitor: fixarea datelor celor două etape să se facă de la începutul anului școlar fixînd etapa raională pentru clasa a VIII-a la cîteva săptămîni interval față de etapa locală; să se acorde un timp mai îndelungat pentru fiecare lucrare scrisă; să se constituie comisii pe centre de comună care să îndrume și să controleze comisiile locale, mai eficace decît o pot face comisiile raionale. Există numeroși profesori care consideră că s-ar putea lărgi schema actuală solicitînd și elevii clasei a V-a sau introducînd noi etape pentru ceilalți elevi; este mai bine poate ca, la început, să se consolideze actuala schemă organizatorică urmînd ca experiența cîtorva ani să arate dacă ea trebuie modificată.

Deoarece în unele locuri au fost suprapuneri între concursul de matematică și concursul cultural artistic, este necesară o coordonare mai bună a lor pe plan regional.

DESFĂȘURAREA CONCURSULUI. Atît pentru etapa locală (10 aprilie) cît și pentru cea raională a clasei a VIII-a (17 aprilie) subiectele au fost alcătuite de comisiile regionale și difuzate cu sprijinul secțiilor de învățămînt. Problemele date se publică în Gazeta matematică, seria B.

Unele comisii regionale, cu sprijinul profesorilor din diferite școli, au primit și selecționat probleme corespunzătoare celor două etape, ceea ce a permis atît evidențierea elevilor fruntași, cît și o informare asupra gradului de pregătire relativă în diferite școli. Se semnalează însă și probleme mai dificile decît era de așteptat pentru un concurs aflat la început, dar mai ales o destul de mare doză de neîndemînare a elevilor în fața unor probleme pentru rezolvarea cărora nu primesc lămuriri suplimentare. Este necesar ca filialele Societății, cu sprijinul secțiilor de învățămînt, să dea îndrumări asupra modului în care profesorii pot ajuta pregătirea concursului din toate punctele de vedere. Un rol util îl poate juca rezolvarea problemelor propuse în Gazeta matematică sau în culegerile de probleme existente.

Rezultatele concursului se comunică de comisii direct școlilor. Nu s-a reușit nici la etapa raională să se organizeze în toate părțile o adunare a participanților pentru a li se da indicații asupra felului cum trebuiau rezolvate problemele și a se comunica rezultatele obținute, înmînîndu-se diplome în fața tuturor. Evidențierile s-au comunicat de comisiile raionale școlilor care la rîndul lor au găsit diferite mijloace de a popularizа pe elevii fruntași. În noul an școlar, pe baza experienței căpătate, comisiile raionale vor putea da indicații mai potrivite pentru ca evidențierile să-și atingă mai larg scopul lor educativ, stimulator. Măsuri adecuate urmează a fi luate și pentru ridicarea nivelului de pregătire matematică în școlile în care s-au semnalat lipsuri. O atenție mai susținută urmează să se acorde și felului în care se selectează problemele de concurs. Schimbul de experiență pe baza problemelor ce se publică, se poate dovedi util.

Concursul pentru elevii claselor VI—VIII a început bine. Este necesar să se ia toate măsurile potrivite pentru ca el să se dezvolte astfel, încît să devină un important sprijin în pregătirea matematică a elevilor școlilor generale.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 7237

Să se găsească toate soluțiile ecuației

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 27$$

în condițiile ca orice soluție să fie un sistem de 6 numere distincte dintre primele 50 numere naturale.

Bal Iuliana, Cluj

Soluție dată de *Andrei Rugină*, elev Roman.

Dacă facem suma primelor cinci numere naturale ($1 + 2 + 3 + 4 + 5$) obținem 15. Avem $27 - 15 = 12$. Rezultă că nu vom avea nici o soluție care să conțină o rădăcină mai mare decît 12.

Pentru $x_1 = 12$ singura combinație posibilă este

$$x_2 = 1\,;\ x_3 = 2\,;\ x_4 = 3\,;\ x_5 = 4\,;\ x_6 = 5$$

(s-a pus condiția ca numerele să fie distincte).

$$12 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 27.$$

Pentru $x_1 = 11$: $x_2 = 1\,;\ x_3 = 2\,;\ x_4 = 3\,;\ x_5 = 4\,;\ x_6 = 6$

$$11 + 1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 27.$$

Dacă, de exemplu, în locul lui 6 am pune un număr mai mare, rezultatul obținut ar fi mai mare decît 27, iar pentru 5 obținem 26.

Pentru $x_1 = 10 : x_2 = 1,\ x_3 = 2,\ x_4 = 3,\ x_5 = 4,\ x_6 = 7$

sau

$$x_2 = 1,\ x_3 = 2,\ x_4 = 3,\ x_5 = 5\ ;\ x_6 = 6.$$

Pentru $x_1 = 9 : x_2 = 1,\ x_3 = 2\ ;\ x_4 = 3,\ x_5 = 4.\ x_6 = 8$

sau

$$x_2 = 1,\ x_3 = 2,\ x_4 = 3,\ x_5 = 5,\ x_6 = 7$$

sau

$$x_2 = 1,\ x_3 = 2,\ x_4 = 4,\ x_5 = 5\, x_6 = 6$$

Pentru $x_1 = 8.\ x_2 = 1,\ x_3 = 2,\ x_4 = 3,\ x_5 = 6,\ x_6 = 7,$

sau

$$x_2 = 1,\ x_3 = 2,\ x_4 = 4,\ x_5 = 5,\ x_6 = 7$$

Pentru $x_1 = 7.\ x_2 = 2,\ x_3 = 3,\ x_4 = 4,\ x_5 = 5,\ x_6 = 6$

Problema 7238

Se dau $2n$ obiecte distincte care se grupează arbitrar două cîte două. Să se găsească numărul permutărilor ce se pot face cu aceste obiecte, astfel ca, în fiecare permutare, oricare doi termeni egali depărtați de extremi să aparțină cîte unei grupări făcute inițial.

N. Negoescu, profesor Timișoara

Soluție dată de *Petru Farkaș*, elev Cluj.

Fie $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{2n-2}, a_{2n-1}, a_{2n}$ cele $2n$ obiecte pe care le grupăm două cîte două după cum urmează : a_1 cu a_{2n}, a_2 cu a_{2n-1}, a_3 cu $a_{2n-2}, \ldots, a_n$ cu a_{n+1}. Una din permutările cerute de problemă este :

$$a_1 a_2 a_3 \ldots a_n a_{n+1} \ldots . a_{2n-2}\, a_{2n-1} a_{2n}$$

Păstrînd depărtările față de extremi a fiecărei perechi de obiecte, vom avea 2 grupări în care obiectele a_1 și a_2 (indiferent de ordine) sînt extremi, în care obiectele a_2 și a_{2n-1} ocupă al doilea și penultimul loc (sau invers), ..., în care obiectele a_n și a_{n+1} ocupă al n-lea și al $(n+1)$-lea loc (indiferent de ordine).

$$2^n = \underbrace{P_2 \times P_2 \times P_2 \times \ldots \times P_2}_{n \text{ factori}}$$

Dar obiectele $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ pot ocupa orice poziție față de extremi (și legate de aceste obiecte și perechile lor, respectiv $a_{2n}, a_{2n-1}, \ldots, a_{n+1}$) Prin urmare fiecare din cele 2^n grupări, generează alte $P_n = n!$ noi grupări Avem în total $2 \cdot n!$ grupări, care răspund problemei noastre.

Exemplu. Fie obiectele (a, A), (b, B). Cum $n = 2$, trebuie să obţinem $2\,!2^2 = 8$ permutări ce răspund problemei noastre.

Formăm tabloul tuturor permutărilor de patru obiecte şi la vom pune în evidenţă pe acelea care satisfac condiţiilor cerute :

$BbaA$	$BabA$	$\boxed{BaAb}$	$BbAa$	$BAba$	$\boxed{BAab}$
$aBaA$	$\boxed{aBbA}$	$aBAb$	$bBAa$	$\boxed{ABba}$	$ABab$
$baBA$	$\boxed{abBA}$	$aABb$	$bABa$	$\boxed{AbBa}$	$AaBb$
$baAB$	$\boxed{abAB}$	$aAbB$	$\boxed{bAaB}$	$AbaB$	$AabB$

Numărul grupărilor încadrate este 8.

Problema 7241

Să se demonstreze identitatea :

$$\left(\sum_{k=0}^{n} 2^k C_{2n}^{2k}\right)^2 - 2\left(\sum_{k=0}^{n-1} 2^k C_{2n}^{2k+1}\right)^2 = 1$$

Ion Tomescu, Bucureşti

Soluţie dată de *Eleodor Popescu*, elev Tr. Severin.

Pornim de la dezvoltarea :

$$(1+\sqrt{2})^{2n} = 1 + \sqrt{2}\,C_{2n}^1 + 2\,C_{2n}^2 + \ldots + 2^k\,C_{2n}^{2k} + \sqrt{2}\cdot 2^k C_{2n}^{2k+1} + \ldots$$
$$\ldots + 2^n = 1 + 2C_{2n}^2 + \ldots + 2^k C_{2n}^{2k} + \ldots + 2^n + \sqrt{2}\,(C_{2n}^1 + 2C_{2n}^3 + \ldots$$
$$\ldots + 2^k C_{2n}^{2k+1} + \cdots + 2^{n-1} C_{2n}^{2n-1}) = \sum_{k=0}^{n} 2^k C_{2n}^{2k} + \sqrt{2}\sum_{k=0}^{n} 2^k C_{2n}^{2k+1}$$

În mod analog, obţinem :

$$(1-\sqrt{2})^{2n} = \sum_{k=0}^{n} 2^k C_{2n}^{2k} - \sqrt{2}\sum_{k=0}^{n-1} 2^k \cdot C_{2n}^{2k+1}$$

Înmulţind cele două relaţii membru cu membru, obţinem :

$$(1-2)^{2n} = \left(\sum_{k=0}^{n} 2^k C_{2n}^{2k}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\sum_{k=0}^{n-1} 2^k C_{2n}^{2k+1}\right)^2 \text{ sau :}$$
$$1 = \left(\sum_{k=0}^{n} 2^k C_{2n}^{2k}\right)^2 - 2\left(\sum_{k=0}^{n-1} 2^k C_{2n}^{2k+1}\right)^2$$

Problema 7242

Să se găsească toate numerele naturale care satisfac ecuaţia :

$$x^2 + 3xy + 2y^2 = z^2$$

F. Kacso, student, Cluj

Soluția autorului. Observăm că este suficient dacă luăm toate soluțiile (x, y, z) relativ prime între ele, pentru că celelalte se obțin din aceste soluții înmulțindu-le cu un număr arbitrar. Se mai observă că dacă $(x, y, z) = 1$ atunci $(x, y) = 1$. În caz contrar conform ecuației ar rezulta că z are și el un divizor (care este chiar (x, y), deci x, y și z ar avea un divizor comun, contrar ipotezei.

Să scriem acum ecuația sub următoarea formă :

$$(x + y)(x + 2y) = z^2. \tag{1}$$

Ținînd seama că $x + 2y = (x + y) + y$, rezultă că $(x + y, x + 2y) = (x + y, y) = (x, y) = 1$, deci din relația (1) rezultă că

$$x + y = a^2,\ x + 2y = b^2;\ (a, b) = 1$$

din care rezultă

$$x = 2a^2 - b^2,\ y = b^2 - a^2,\ z = ab.$$

O soluție oarecare în numere naturale se scrie în felul următor :

$$x = \lambda(2a^2 - b^2),\ y = \lambda(b^2 - a^2),\ z = \lambda ab,$$

unde λ, a, b sînt numere naturale și $(a, b) = 1$, cu condiția $a^2 < b^2 < 2a^2$.

Problema 7243

a) *Să se arate, fără a se efectua calculele, că :*
$E = 1961^1 + 1963^2 + 1965^3 + 1967^4 + 1$ *nu poate fi un patrat perfect.*
b) *Să se arate că* $E - 81$ *se divide cu 1964.*

Dan Stănescu, elev Ploiești

Soluție dată de *G. Curcanu*, elev Tg. Jiu.

a) Pentru ca E să fie un patrat perfect este necesar, dar nu și suficient, ca numărul format din însumarea numerelor formate prin ridicări la putere din expresia E, să se termine cu una din cifrele : 0, 1, 4, 5, 6, 9. Deci trebuie calculată cifra unităților. Avem $1 + 9 + 5 + 1 + 1 = 17$.

Cifra unităților este $17 - 10 = 7$, deci E nu poate fi patrat perfect

b) Dacă notăm pe 1964 cu a, expresia E devine :

$$E = (a-3) + (a-1)^2 + (a+1)^3 + (a+3)^4 + 1 = a + (a-1)^2 + (a+1)^3 + (a+3)^4 - 2$$

$$E - 81 = a + (a-1)^2 + (a+1)^3 + (a+3)^4 - 83 = \mathfrak{M} \cdot a + \mathfrak{M} \cdot a + 1 + \mathfrak{M}a + 1 + \mathfrak{M}a + 3^4 - 83 = \mathfrak{M}a + 3^4 - 81 = \mathfrak{M}a + 81 - 81 = \mathfrak{M}a.$$

Problema 7245

Să se arate că dacă a, b, c, *sînt nenule, iar* n *este un număr pozitiv, impar, atunci :*

$$\frac{a(b-c)^n + b(c-a)^n + c(a-b)^n}{a^n(b-c) + b^n(c-a) + c^n(a-b)} + 1 = 0$$

(Generalizarea problemei E : 856).

Daniel Pestroiu, elev, Tg. Jiu.

Soluția autorului. Aducem la același numitor și dezvoltăm binoamele după formula lui Newton. Relația de demonstrat capătă forma :

$$a(b^n - C_n^1 b^{n-1}c + \ldots + C_n^{n-1}bc^{n-1} - c^n) + b(c^n - c_n^1 c^{n-1}a + \ldots +$$
$$+ C_n^{n-1}ca^{n-1} - a^n) + c(a^n - C_n^1 a^{n-1}b + \ldots + C_n^{n-1}ab^{n-1} - b^n) +$$
$$+ a^n(b-c) + b^n(c-a) + c^n(a-b) = 0$$

Vom ține cont că parantezele au un număr par de termeni și că $C_n^k = C_n^{n-k}$. Dezvoltînd, avem :

$$(ab^n - C_n^1 acb^{n-1} + \ldots . + C_n^1 abc^{n-1} - c^n a) + (bc^n - C_n^1 abc^{n-1} + \ldots . +$$
$$+ C_n^1 bca^{n-1} - ba^n) + (ca^n - C_n^1 a^{n-1}bc + \ldots + C_n^1 acb^{n-1} - cb^n) +$$
$$+ (a^n b - a^n c + b^n c - ab^n + c^n a - bc^n \equiv 0).$$

Relația $a,\ b,\ c \neq 0$ e necesară pentru a avea numitorul diferit de zero.

Problema 7246

Să se demonstreze că dacă au loc relațiile :

$$x + y + z \quad a + b + c \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2 \text{ și}$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = a^3 + b^3 + c^3$$

atunci există și relația

$$x^n + y^n + z^n = a^n + b^n + c^n$$

pentru orice număr natural n.

L. Pîrșan, student, București

Soluția autorului. Din relațiile de condiție avem :

$$(x + y + z)^2 = (a + b + c)^2 \text{ sau } x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca.$$

Deoarece avem condiția a doua rezultă că :

$$xy + yz + zx = ab + bc + ca$$

Să considerăm acum cunoscuta identitate :

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

Ținînd seama de relațiile de condiție avem :

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = a^3 +$$
$$+ b^3 + c^3 - 3abc.$$

Ținînd cont și de condiția a treia avem :

$$-3xyz = -3abc \text{ sau } xyz = abc.$$

Trecem la metoda inducției : să demonstrăm relația pentru $n = 4$. Considerăm identitatea ușor de verificat :

$$x^4 + y^4 + z^4 = (x^3 + y^3 + z^3)(x + y + z) - (x^2 + y^2 + z^2)(xy + yz + zx) + xyz(x + y + z)$$

Ținînd seama de relațiile de condiție avem :

$$x^4 + y^4 + z^4 = (a^3 + b^3 + c^3)(a + b + c) - (a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ca) + abc(a + b + c) = a^4 + b^4 + c^4$$

Presupunem că $x^m + y^m + z^m = a^m + b^m + c^m$ pentru $4 \leqslant m \leqslant n-1$ sînt adevărate. Să arătăm că

$$x^n + y^n + z^n = a^n + b^n + c^n$$

Considerăm de asemenea o identitate ușor de verificat

$$x^n + y^n + z^n = (x^{n-1} + y^{n-1} + z^{n-1})(x + y + z) - (xy + yz + zx)(x^{n-2} + y^{n-2} + z^{n-2}) + xyz(x^{n-3} + y^{n-3} + z^{n-3}).$$

Dacă ținem seama de relațiile de condiție și de ipoteza de inducție avem :

$$x^n + y^n + z^n = (a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1})(a + b + c) - (ab + bc + ca)(a^{n-2} + b^{n-2} + c^{n-2}) + abc(a^{n-3} + b^{n-3} + c^{n-3})$$

sau

$x^n + y^n + z^n = a^n + b^n + c^n$ oricare ar fi n natural > 4.

Problema 7248

Se dă tetraedrul $ABCD$ și în interiorul lui un punct I. Dreptele AI BI, CI, DI taie fețele opuse în punctele A', B', C', D'.

Fie punctele A_1, B_1, C_1, D_1 situate respectiv pe IA', IB', IC', ID'. astfel ca :

$$\frac{IA_1}{A_1A'} = \frac{IB_1}{B_1B'} = \frac{IC_1}{C_1C'} = \frac{ID_1}{D_1D'} = k.$$

Să se arate că există inegalitățile :

$$\frac{AA_1}{A_1A} + \frac{BB_1}{B_1B'} + \frac{CC_1}{C_1C'} + \frac{DD_1}{D_1D'} \geqslant 4(4k + 3);$$

$$\frac{A_1A'}{AA_1} + \frac{B_1B'}{BB_1} + \frac{C_1C'}{CC_1} + \frac{D_1D'}{DD_1} \geqslant \frac{4}{4k + 3}.$$

J. Weinstein, absolvent, Rădăuți

Soluție dată de *I. Dăncilă*, elev Sibiu.

Fie V volumul tetraedrului $ABCD$, V_a, V_b, V_c, V_d respectiv volumele tetraedrelor $IBCD$, $IACD$, $IABD$, $IABC$; h înălțimea din A a lui $ABCD$ și h_1 înălțimea din I a lui $IBCD$.

Avem :

$$\frac{AA_1}{A_1A'} = \frac{AI + \frac{k}{k+1} \cdot IA}{\frac{1}{k+1} \cdot IA'} = \frac{(k+1) \cdot AI + k \cdot IA}{IA'} = \frac{(k+1) \cdot AA' - IA'}{IA'} =$$

$$= \frac{(k+1) \cdot AA'}{IA'} - 1 ;$$

dar

$$\frac{AA'}{IA'} = \frac{h}{h_1} = \frac{V}{V_a}, \text{ deci :}$$

$$\frac{AA_1}{A_1A'} = \frac{(k+1) \cdot V}{V_a} - 1 ; \text{ rezultă că :}$$

$$\sum \frac{AA_1}{A_1A'} = (k+1) \cdot V \cdot \left(\frac{1}{V_a} + \frac{1}{V_b} + \frac{1}{V_c} + \frac{1}{V_d} \right) - 4 =$$

$$= (k+1) \cdot (V_a + V_b + V_c + V_d) \cdot \left(\frac{1}{V_a} + \frac{1}{V_b} + \frac{1}{V_c} + \frac{1}{V_d} \right) - 4 \geqslant$$

$$\geqslant 16 \cdot (k+1) - 4 = 4(4k+3) ; \text{ deci :}$$

$$\frac{AA_1}{A_1A'} + \frac{BB_1}{B_1B'} + \frac{CC_1}{C_1C'} + \frac{DD_1}{D_1D'} \geqslant 4(4k+3).$$

De asemenea avem :

$$\frac{A_1A'}{AA_1} + \frac{V_a}{(k+1)V - V_a} = \frac{(k+1)V}{(k+1)V - V_a} - 1 ;$$

rezultă că :

$$\sum \frac{A_1A'}{AA_1} = (k+1)\, V \cdot \left[\frac{1}{(k+1)V - V_a} + \frac{1}{(k+1)V - V_b} + \frac{1}{(k+1)\, V - V_c} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(k+1)V - V_d} \right] - 4 = \frac{k+1}{4k+3} [(k+1)V - V_a + (k+1)V - V_b +$$

$$+ (k+1)V - V_c + (k+1)V - V_d] \cdot \left[\frac{1}{(k+1)V - V_a} + \frac{1}{(k+1)V - V_b} + \right.$$

$$\left. \frac{1}{(k+1)V - V_c} + \frac{1}{(k+1)V - V_d} \right] - 4 \geqslant \frac{16(k+1)}{4k+3} - 4 = \frac{4 \cdot (4k+4-4k-3)}{4k+3} = \frac{4}{4k+3} ;$$

am obținut :

$$\frac{A_1A'}{AA_1} + \frac{B_1B'}{BB_1} + \frac{C_1C'}{CC_1} + \frac{D_1D'}{DD_1} \geqslant \frac{4}{4k+3}.$$

Problema E : 2395

La o cofetărie s-au vîndut în 7 zile 591 prăjituri :
a) *Să se afle cîte prăjituri s-au vîndut în 5 zile dacă în 2 zile s-au vîndut 97 prăjituri ; b) Să se afle cît costă cele 97 prăjituri știind că ele s-au vîndut cu 1,50 bucata și cît costă celelalte dacă s-au vîndut cu 2 lei bucata.*

Ioniță Marin, Panciu

Soluția autorului. — a) Cîte prăjituri s-au vîndut în 5 zile 592 — 97 = 495 prăjituri.

b) Cît s-a încasat pe cele 97 prăjituri vîndute cu 1,50 lei.

$$97 \times 1{,}50 = 145{,}50 \text{ lei}$$

c) Cît s-a încasat pe cele 495 prăjituri vîndute cu 2 lei.

$$495 \times 2 = 990 \text{ lei.}$$

Problema E : 2396

O echipă de 35 de muncitori a fost planificată să execute o lucrare în 50 de zile. Insă timp de 15 zile au lucrat numai 30 de muncitori, iar timp de 25 de zile numai 10 muncitori. Norma de lucru fiind aceeași pentru toți, să se afle cîți muncitori vor lucra în continuare pentru a termina lucrarea la timpul fixat.

D. Mârzan, R. — Vîlcea

Soluția autorului. — Efectuînd calculele avem :

$$[50.35 - (15 \cdot 30 + 25 \cdot 10)] : [50 - (30 + 10)] = 105 \text{ muncitori.}$$

Problema E : 2398

O lucrare este efectuată de 15 lucrători în 20 de zile. După ce lucrează 8 zile, 6 lucrători pleacă detașați pe alt șantier. In cîte zile se termină lucrarea.

Nelu Dobre, Merei Buzău

Soluție dată de *Victor Truță*, elev București.

1 lucrător ar termina lucrarea în 15.20 = 300 zile. Într-o zi el efectuează 1/300. Cei 15 lucrători în 8 zile efectuează din lucrare :

$$15.8\frac{1}{300} = \frac{2}{5}.$$

Mai rămîne de lucrat 3/5 din lucrare de către 9 lucrători.

Într-o zi 9 lucrători fac $9.\frac{1}{300} = \frac{3}{100}$ din lucrare. Ei vor termina lucrarea rămasă în

$$\frac{3}{5} : \frac{3}{100} = 20 \text{ zile.}$$

Toată lucrarea este terminată în 20 + 8 = 28 zile.

CHESTIUNI DE EXAMEN

Din problemele prezentate la O.I.M. 1966 de către țările participante

Propuse de profesori din R.P. Bulgaria

7768. 1. Fie n numere întregi pozitive, în ordinea

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n$$

Să se verifice că

$$(x_5^5 + x_2^5 + \ldots + x_n^5) + (x_1^7 + x_2^7 + \ldots + x_n^7) \geqslant 2\,(x_3^3 + x_2^3 + \ldots x_n^3)^2 \quad (1)$$

și să se arate că se obține egalitatea numai pentru $x_k = k$, $(k = 1, 2, \ldots n)$

7769. 2. Elevii unei clase au organizat 3 excursii. La fiecare excursie au participat 15 elevi. 7 elevi participanți la prima excursie, au participat de asemenea și la a doua și 8 elevi la a treia. La toate cele trei excursii au participat 4 elevi. Să se afle :

a) Cîți elevi au participat numai la prima excursie, cîți numai la a doua și cîți numai la a treia excursie.

b) Care este numărul elevilor care au participat cel puțin la o excursie.

7770. 3. Să se arate că pentru fiecare valoare întreagă a lui $n \geqslant 1$, suma

$$S_n = \frac{3}{1^2 \cdot 2^1} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \cdots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} + \frac{n^2}{4(1^3 + 2^3 + \cdots + n^3)}.$$

are o valoare constantă.

7771. 4. Sumele S (m întreg mai mare au cel puțin egal cu 4) sînt exprimate prin relațiile :

$$S_4 = 1, \quad S_{m+1} = S_m + 1\,(m-2) + 2\,(m-3) + 3\,(m-4) + \ldots + (m-2)1.$$

Să se arate că suma S_m este egală cu C_m^4.

Propuse de profesori din R.D. Germană

7772. 5. Printre patrulaterele convexe care se găsesc în interiorul semicercului de rază r, să se discute existența patrulaterului de arie maximă. În acest caz să se determine natura patrulaterului și să i se calculeze aria.

7773. 6. Fie $\operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{q}$; p și q întregi, $q \neq 0$. Să se arate că toate numerele $\operatorname{tg}\beta$, pentru care avem $\operatorname{tg} 2\beta = \operatorname{tg} 3\alpha$ sînt numere raționale în cazul $p^2 + q^2$ este un patrat perfect al unui număr întreg, diferit de zero.

Propuse de profesori din R.P. Mongolă

7774. 7. Să se rezolve ecuaţia

$$\sin x + 13 \sin^2 x + 3 \sin^2 x \cos^2 x = 12 - \cos x - 6 \cos^3 x - \cos x$$

7775. 8. Pentru care valori ale lui a, b, c, d, e, f, sistemul

$$ax + by + cz = d$$

$$a\varepsilon x + b\varepsilon^2 y + cz = e$$

$$a\varepsilon^2 x + b\varepsilon y + cz = f$$

unde $\varepsilon \neq 1$, este una din rădăcinile cubice ale unităţii, iar a, b, c numere reale, posedă o soluţie reală? Să se afle soluţia reală a sistemului.

Propusă de profesori din R.P. Polonă

7776. 9. Pe segmentul AB se construeşte de o aceeaşi parte a laturii AB trei triunghiuri asemenea KAB, BLA, ABM, astfel

$$\sphericalangle BAM = \sphericalangle KBA = \sphericalangle BAC = \alpha$$

$$\sphericalangle MBA = \sphericalangle BAK = \sphericalangle ABC = \beta$$

$$\sphericalangle KBA = \sphericalangle BAL = \sphericalangle ACB = \gamma, \text{ cu condiţia } \alpha < \beta < \gamma.$$

Să se arate că triunghiul KLM este asemenea celor trei triunghiuri construite.

Propusă de profesori din U.R.S.S.

7777. 10. Într-un tetraedru muchiile opuse sînt două cîte două perpendiculare. Să se arate că cele 6 mijloace ale muchiilor se află pe o aceeaşi sferă.

7778. 11. Un bidon de tablă albă cu volumul V şi forma unui cilindru drept şi a unui con aşezat pe baza superioară a cilindrului. Ce dimensiuni trebuie să ia bidonul pentru a folosi minimum de tablă albă.

Propuse de profesori din R.S. Cehoslovacă

7779. 12. Într-un plan se dă un sistem de drepte paralele, distanţa între două drepte vecine fiind aceeaşi egală cu unitatea. Să se arate dacă este posibil să se deplaseze în acest plan un dreptunghi, ale cărui laturi să aibe lungimi exprimate prin numere întregi, în aşa fel ca vîrfurile să se găsească pe patru drepte diferite ale sistemului.

7780. 13. Să se găsească printre toate patrulaterele convexe $ABCD$ cu laturi $AB = BC = CD = 1$, acela care are aria cea mai mare.

Propuse de profesori din Republica Socialistă Romînia.

7781. 14. Fie un triunghi oarecare ABC de arie S și perimetru $2p$ înscris într-un cerc de rază R. Bisectoarele interioare ale acestui triunghi taie cercul circumscris respectiv în punctele A_1, B_1, C_1 și fie S_1 aria triunghiului $A_1B_1C_1$. Bisectoarele interioare ale triunghiului $A_1B_1C_1$ taie cercul circumscris în A_2, B_2, C_2 și fie S aria triunghiului $A_2B_2C_2$. În mod analog se pot construi triunghiurile $A_3B_3C_3, \ldots A_nB_nC_n$.

a) Să se demontreze că cercul cercului înscris în triunghiul ABC coincide cu ortocentru triunghiului $A_1B_1C_1$.

b) $S < S_1 < S_2 < \ldots < S_n < \frac{3\sqrt{3}R^2}{2}$.

c) Dacă p, p_1, $p_2, \ldots p$ sînt semiperimetrele triunghiurilor formate mai sus, atunci $p < p_1 < p_2 < \ldots < \frac{3R\sqrt{3}}{2}$.

7782. 15. Să se afle valorile reale ale lui x pentru care

$$\sqrt{\frac{x+3a}{4a} + \sqrt{\frac{x-a}{a}}} + \sqrt{\frac{3+3a}{4a} - \sqrt{\frac{x-a}{a}}} = 2, \text{ unde } a > 0.$$

77783. 16. Să se afle toate valorile reale le lui x pentru care avem :

$$\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-2\sqrt{1-x^2}}} + \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-2\sqrt{1-x^2}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{x+3}{4} + \sqrt{\frac{x+1}{2}}} + \sqrt{\frac{x+3}{4} - \sqrt{\frac{x+1}{2}}}$$

7784. 17. Să se rezolve sistemul

$$(1+p_1^2)x_1 + p_1p_2x_2 + \ldots + p_1p_nx_n = 1 + p_1(p_1 + 2p_2 + \ldots + np_n)$$

$$p_2p_1x_1 + (1+p_2^2)x_2 + \ldots + p_1p_nx_n = 2 + p_2(p_1 + 2p_2 + \ldots + np_n)$$

$$p_np_1x + p_np_2x_2 + \ldots + (1+p_n^2)x_n = x + p_n(p_1 + 2p_2 + \ldots + np_n)$$

unde p_1, $p_2, \ldots . p_n$ sînt numere reale.

PROBLEME PROPUSE*

7785. Să se găsească numerele $\overline{abc}$ de trei cifre care au proprietatea : $\overline{abc} = \overline{cba} + \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}$.

D. Acu Cluj,

---

* IX (7785—7789); X (7790—7793); XI (7794—7803): S (7804 —7819). Soluțiile se primesc pînă la 15 ianuarie 1967. Fiecare elev poate trimite rezolvări și la problemele din clasa precedentă celei pe care o urmează.

7786. Să se determine m așa ca polinomul:

$$P(x, y) = x^2 + xy - 6y^2 - 2x + 9y + m$$

să se descompună în factori liniari.

Dacă $M(x, y)$ este un punct din plan, să se rezolve inecuația

$$P(x, y) > 0.$$

D. Constiniuc, profesor Galați

7787. Pe laturile unui patrulater oarecare $ABCD$, se consideră punctele A_1, B_1, C_1, D_1 astfel ca $\frac{AA_1}{A_1B} = \frac{BB_1}{B_1C} = \frac{CC_1}{C_1D} = \frac{DD_1}{D_1A} = \frac{m}{n}$. Pe laturile noului patrulater $A_1B_1C_1D_1$ se consideră punctele A_2, B_2, C_2, D_2 care le împart în același raport m/n. Se repetă acest proces la infinit. Să se calculeze

$$SABCD + SA_1B_1C_1D_1 + SA_2B_2C_2D_2 + SA_3B_3C_3D_3 + \ldots,$$

unde prin $SMNPQ$ s-a notat aria patrulaterului $MNPQ$.

Băluță Constantin, elev Filiași

7788. Fie trei numere întregi, neprime, A, B, C. Să se arate că c.m.m.m.c. între numărul A și c.m.m.d.c. al numerelor B și C este egal cu c.m.m.d.c. între c.m.m.m.c. al lui A și B și c.m.m.m.c. al lui A și C.

Bogza Mihai, București

7789. Se dă $F(x, y, z) = \frac{x^2y + x^2 - 6xy + 2y^2 - 6x + 2y}{x^2z + yz^2 - x^2 - xz + 4z - 4}$.

Să se determine y și z astfel ca să avem $F(x, y, z) =$ constant oricare ar fi x.

Ilie Stănescu, Sibiu

7790. În sistemul bielă-manivelă OMC — O fiind centrul de rotație, fie M_0 poziția lui M cînd punctul C se află la distanța maximă de centrul O.

a) Să se arate că punctul M_0 este egal depărtat de proiecția lui M pe direcția OC și bielă, cînd biela și manivela sînt perpendiculare.

b) In condiția de mai sus, notînd distanța $M_0C = l_0$ și lungimea manivelei $OM = r$, să se afle distanța de la M_0 la proiecția punctului M pe direcția OC.

A. C. Florea, profesor Cîmpina

L.7 cl. VII. Pşait Ecaterina (E : 2337—9, 54, 6, 9, 65, 6). *L.8* cl. XI. Creţu Ovidiu (6988, 9, 95, 6, 8, 7002—4, 69—66, 9, 70, 3). *L.9* cl. VII. Bodrojan Irina (E : 2337, 8, 57, 60, 4, 56 9, 66), Dascălu Victoria (E : 2337, 9, 56, 9, 60, 4—6).

LUGOJ. Cl. X. Anghel Valeriu (6989, 95, 8, 7002, 3, 22, 50, 9, 73, 6, 78, 80, 1, 91), Murariu Dorin (6995, 6, 8, 7002—4, 22, 50, 9, 69, 70, 3, 91), Neu Tiberiu (6987—9, 96,8, 7003, 22, 50, 9, 63, 73, 6, 8, 80, 1, 17). Orbulov Petru (6988, 95—9, 7001—4, 22, 4, 59, 66, 7, 73, 91), Peiu Ioan (6988, 9, 95—8, 7001—5, 22, 50, 63, 9, 70, 3, 80), Preoteasa Viorel (6995—8, 7001,3 22, 50, 69, 73, 91).

MĂCIN. Cl. XI. Simion Andrei (6987, 8, 90—2, 5—7000, 1—5, 10, 3, 9, 21, 4, 40, 5).

MIERCUREA CIUC. Cl. IX. Galaczi Peter (E : 2363—6, 7059—63, 6, 9, 73, 6, 7, 81)

MORENI. Cl. X. Matei Ion (6843, 5, 8, 51—4, 6, 8, 61—74, 8—81, 6—9, 902, 9, 22, 7, 9, 30—4, 6, 8m 46, 9, 50, 2, 4—9, 80, 3).

NADLAC (Banat). Cl. VII. Kralik Adam (E : 2294—6, 9, 3000, 1, 7, 11, 6).

NADRAG (Banat). *L.1* cl. XI. David Nicolae (7052, 66, 75, 6, 8, 80, 1, 4, 96, 100, 7, 9, 10, 4, 7).

NOVACI (Oltenia). Cl. VIII. Porumbel Ion (E : 2354, 6—9, 63, 5,6).

ORADEA. Cl. XI. Herman Gheorghe (6927, 31—4, 6, 8, 41, 3, 6, 50, 4, 7, 89, 95, 6, 7002—5, 14, 48), Meer Petru (6987, 8, 90, 5—8, 7000, 2—5, 14, 21, 2, 8, 45).

ORAŞ VICTORIA. Cl. IX. Moisin Mihai (6927, 8, 32, 6, 8, 41, 5, 6, 9, 50, 2, 4, 7).

ORŞOVA. Cl. VII. Boaşu Doru (E : 2336—8, 4—, 54, 6, 9, 70, 6), Ionescu Stana (E : 2338, 56, 7, 9, 66, 9, 70, 6), Munteanu Mariana (E : 2337, 8, 54, 6, 7, 89, 66, 70, 6), Mustăcilă Doina (E : 2338, 54, 6, 9, 65, 6, 76), Petrescu Nicolae E(: 2236, 54, 6, 7, 9, 60, 70, 6). Stancu Petru (E : 2338, 54, 6, 7, 9, 65, 6, 9, 70, 6). Cl. VIII. Dragotă Dorothea Octavia (E : 2338, 54, 6, 9, 70, 4—6). Marincovici Nicolae (E : 2338, 54, 6, 9, 62, 3, 74, 6), Oprea Cornelia (E : 2338, 64, 6, 66, 74—6, 9).

PĂTĂRLAGELE. Cl. XI. Boncu Luigi (6988, 9, 91, 2, 5, 6, 7002, 3, 10, 20, 4, 8, 45), Poşoiu Constantin (6988, 91, 2, 5, 7001—5, 10, 20—2, 4, 8, 45).

PĂUNEŞTI (Bacău). Cl. VI. Novac Gh. Virginica (E : 2336, 9, 49, 50, 2, 3, 61, 5, 9, 70). Cl. VII. Bîrlă Lucian (E : 2336—9, 52, 3 6, 65, 6), Novac Maria (E : 2345, 9, 52, 69, 75, 7 ; 6997, 7065, 81), Sandu Marioara (E : 2337, 8, 54, 6, 9, 66 ; 6986, 7003, 91). Cl. VIII. Berbece Maria (E : 2336—9, 45, 53, 4, 6, 66), Gheorghiu Gabriela (E : 2337, 40, 2, 5, 9, 50, 2, 70, 80), Gurău Neculai (E : 2307, 8, 11, 3, 25, 37, 8, 9, 54, 6) Novac Maria (E : 2337, 45, 50, 2, 3, 6996, 7), Stroescu Neculai (E : 2311, 3, 23, 37, 8, 54, 6, 9, 66), Rizuc Rodica (E : 2337, 40, 5, 9, 50, 2, 69, 70, 1).

PECIUL NOU (Banat). Cl. XI. Stoianovici Rada (6995—7, 7002, 3, 5, 7, 19, 48, 68, 73, 6, 9, 80, 116).

PERIEŢI (Argeş). *S.g.1.* Mihai Constanţa (E : 2337, 8, 54, 7, 9, 61, 5, 6).

PETROŞENI (Hunedoara). *S.g.1.* cl. V. Siclovan Codruţa (E : 2354, 6, 7, 9, 60, 1, 4, 5, 6). Cl. X. Stan Mihai (6988, 9, 95—9, 7001—5, 7, 10, 3, 5, 9, 49, 51, 2, 9, 60, 1, 6, 8, 73, 6, 7, 80, 1, 91).

PITEŞTI. *S.g.10* cl. VII. Mîndruţeanu Dan (E : 2336—8, 56, 7, 9, 64—6). L.1. cl. IX. Mîndruţeanu George (E : 2364—6, 78, 9, 80 ; 6995—7, 9, 7001, 2, 4, 59, 60, 7). Cl. XI. *Nistorescu Constantin* (7049—52, 5, 9—64, 8—70, 3—8, 80—3, 7108, 10, 19—25, 30—2).

PLOIEŞTI. *S.g.12* cl. VII Tiprigan Carmen (E : 2337, 8, 57, 6, 9, 62, 6, 76). *S.g.21* cl. VI. Lainaş Nicolae (E : 2354, 6, 7, 9, 73, 7—9). Cl. VII. Munteanu Monica (E : 2337, 8, 40, 54, 6, 7, 9, 65), Zielinski Roxana (E : 2336, 9, 54, 6—9, 63, 7—70). Cl. VIII. Turţudău Florin (E : 2338, 40, 54, 6, 7, 9, 62, 5). *L.1* cl. IX. Popescu Mariana 6995—7, 7002, 5, 59, 60, 3, 6, 9, 73, 6, 7, 81, 107). Cl. X. Bilciurescu Doina (7020—2, 4, 48—50, 2, 9, 63, 7, 81), Botoşanu Lidia (7020—2, 4, 48—50, 2, 9, 63, 6, 76, 7, 9, 80, 1, 91), Botoşanu Maria (7020—2, 48, 50, ,2, 6, 76, 80, 1, 91), Coman N. (6996, 7, 9, 7022, 4, 59, 60, 3, 6, 9, 65, 7, 81, 3), Grigore Ecaterina (7020—2, 4, 59, 60, 3, 9, 73, 7, 9, 81—3, 107), Grinţescu Ecaterina (6927, 31, 2, 46, 9, 57, 7003, 59, 63, 6, 9, 81), Ionescu Maria (7020—2, 4, 63, 73, 5, 7, 9, 81, 107), *Neguţ Gheorghe* (6957, 87—9, 95, 6, 9—7005, 8, 10, 20, 4, 49, 50, 2, 9—66, 9, 75—83, 91, 107, 10), Olteanu Romeo (6949, 63, 96, 7020—2, 9, 60, 6, 73, 6, 7, 9, 81), Tulinescu Anca (7020—2, 4, 7, 6—9, 81—3, 7). Cl. XI. *Vasiliu Constantin* (6921, 2, 8, 59, 60, 2—4, 73 5, 80, 3, 7—92, 5—9, 7000—5, 7, 17, 5, 30, 7—9, 44, 7). *L.2* cl. VII. Marinoată Veronica (E : 2337, 8, 56, 9, 62, 5, 71, 4—6), Miron Alexandru (E : 2342, 4, 50, 4—61). Cl. VIII. Dumitrescu Mihai (E : 2337, 8, 54, 6, 9, 64, 6, 74, 9), Marinescu Tudor (E : 2337, 8, 54, 6, 9, 64, 6, 74, 9), Stoica Mihai (E : 2354, 6—9, 63, 5, 6, 7, 80), Vişan Marian)E : 2336—8, 48, 50, 6, 8, 9, 63—7, 770—2, 4—9, 95, 6, 7002, 3). Cl. X. *Copoiu Florin* (6987—9, 95, 6, 8, 9. 7001,

4, 10 9,22 , 4, 50, 2, 60, 1, 3, 5—9, 73, 6, 80, 1, 3, 91, 107, 35, 40). Mazăre Alexandru (6988, 9, 97, 7020, 1, 4, 6, 67, 9, 73, 7, 81, 108, 10, 63). Cl. XI. *Stan Emil* (7011—3, 7—20, 4—9, 32, 3, 5—8, 40—3, 8—55, 9—66, 9, 70, 3, 4, 6—8, 80, 1, 4). *L.3* cl.X. Spiegel Wilhelmina (6987, 9, 91, 2, 7, 9, 7000, 1, 4, 21, 2, 4, 8). *L.4* cl. X. Albulescu Mircea (6995, 6, 8, 7002—5, 61, 6, 9, 73, 7, 110). Alexandrescu Vasile (6995—8, 7000, 2—5, 59—61, 3, 9), Ionescu Elena (6995, 7, 8, 7000, 2, 3, 5, 60, 6, ,9, 73, 7, 110), *Sachelarie Dan* (7047—52, 4, 5, 9—70, 2, 3, 6—8, 80, 1, 3, 4, 6, 8, 9, 91, 6, 7, 105, 10—2, 7, 9—24). *L.5* cl. X. *Voicilaș Corneliu* (6920—4, 7, 8, 30—9, 41—3, 5—7, 9, 50, 2—7, 9, 60, 3, 4, 6—9, 75, 80). *L.6* cl. VIII. Stan Constantin (E : 2348, 53, 6, 7 ; 6997—9, 7002, 3, 59, 61). *Sc. prof.* an I. Vrânceanu Virgil (E : 2367—75, 7—80).

PUCIOASA. Cl. VIII. Popescu Cornel (E : 2293—7, 9, 300—3, 7, 8). Cl. XI. *Târză Mihail* (6841, 59, 63, 7, 71, 928—39, 41—8, 50, 3, 4, 6, 8, 63, 88, 90, 1, 5, 7, 8, 7002—6, 22, 30, 45). *Absolvent Aron Constantin* (6920, 1, 7—58, 63, 73, 80, 8, 97, 7000, 2—7).

RÎMNICUL VÎLCEA. Cl. XI. Droașcă Florin (6987, 8, 90—2, 5, 6, 7001—3, 7, 45), Popescu Constantin (6987, 8, 90—2, 5—7, 9, 7000—5, 45).

ROMANEȘTI (Ploiești). *S.g.* cl. VII. Herea Ion (E : 2282, 3, 6, 91, 3—6, 301, 2).

ROȘIORII DE VEDE. Cl. XI. Stanciu Gheorghe (6988, 95—7, 7002—5, 22, 59—, 61, 73, 5, 80, 91, 6, 119).

ROZNOV (Bacău). Cl. XI. Archip Claudia (6847—9, 54, 62, 4, 6, 9, 70, 8, 9, 81 927, 30—2, 4, 7, 41, 5, 6, 9, 50, 4, 6).

SEBIȘ (Crișana). Cl. X. Pantazi Nicolae (6927, 9, 31, 3, 5, 6, 8, 42, 5, 6, 9, 52, 7, 9, 95, 8, 7001—3, 19, 24).

ȘELIMBĂR (Sibiu). Cl. VI. Gurean Dorinel (E : 2336, 54, 6, 7, 9—72, 6). Cl. VII. Antonie Haralambie (E : 2340, 54, 6, 9, 69—73, 6, 7), Iliuț Maria (E : 2337, 40, 54, 9, 69—73, 6, 7).

SIBIU. *S.g.18* cl. VII. Ban Adriana (E : 2336, 7, 67—73, 5—7), Ciurlei Minerva (E : 2336—9, 54, 9, 69, 70, 5), Crișan Lia (E : 2338, 54, 9, 62, 6, 9, 70, 6), Pișlea Mariana (E : 2336—9, 54, 9, 69, 70, 5, 6), Tatu Ioan (E : 2337—9, 54, 6, 7, 9, 69, 70, 2—4, 9). Cl. VIII. Albu Victor (E : 2336—9, 54, 6—8, 76), Capră Mariana (E : 2336, 8, 9, 54, 6, 7, 9, 69—74). *L.1* cl. X. Babeș Carmen (7020—2, 51, 2, 63, 70, 3, 5—8, 80, 1), Buzoianu Mureș (6989, 95, 6, 7000, 2, 3, 5, 14, 21, 2, 4, 8), Grosu Adrian (6987—9, 92, 6, 7020, 69, 71, 8, 80, 108, 10, 51), Leșiacu Dan (6987, 7002, 20, 2, 51, 60, 3, 70, 6—8, 80, 1), Mitran Nicolae (6987, 95, 6, 7002, 3, 24, 51, 63, 6, 9, 76, 7, 8, 80), Pompilian Alexandru (7005, 21, 2, 8, 51, 2, 66, 9, 73, 8, 88). Cl. XI. Avram Ruxandra (6988, 90, 7002, 5, 39, 45, 52, 66, 76, 83, 9, 105, 8), Cușmir Daria (6987—91, 7000, 33, 9, 50, 70, 80, 9, 96, 105, 8, 12), Todor Elvira (6988, 7039, 45, 7, 50, 1, 66, 70, 6, 8, 80, 105, 10, 2), Vasile Alexandra (6989, 90, 1, 5, 6, 7001, 2, 33, 5, 9, 45, 52, 60, 1, 83, 9, 105, 8). *L.3* cl. XI. Antal Indiko (6987, 95—8, 7002—5, 14, 7, 45), Gergeli Ilona (6987, 95—8, 7002—5, 14, 7, 45), Szilagy Erzebet (6987, 95—8, 7002—5, 14, 7, 45) *Zăgan Dumitru* (6987, 9—92, 5, 6, 9, 7002—5, 7, 21, 5, 7, 8, 31, 8, 44, 5, 7, 50—2, 73 6—8, 81, 7, 10, 5, 7, 14, 5, 6).

SIMERIA. Cl. X. *Horvat Andrei* (6796, 7, 9, 892, 3, 13, 7, 27, 34, 5, 47—54, 9, 62—6, 8—70, 9—81, 927, 8, 30—4, 6—8, 41—3, 5, 6, 9, 95, 6).

SINAIA. Cl. XI. Antonescu Elena (6990, 1, 7002, 3, 24, 8, 45, 51, 4, 50, 2, 3, 6, 9, 73, 7, 80, 8, 91, 110), Sava Costică (6988, 90—2, 5, 6, 7000—5, 7, 10, 24, 8, 40, 5, 51, 60, 1, 9, 73, 7, 80, 1, 4, 8, 81), *Stefan Viorel* (6990, 5, 6, 7000—5, 7, 14, 22, 4, 8, 45, 51, 4, 9, 60—6, 8—70, 3, 7, 91, 110, 7, 24, 31).

SUCEAVA. *S.g.1* cl. VIII. Iancovici Iosif (E : 2356—9, 63, 5, 6, 9, 76).

SIMLEUL SILVANIEI. Cl. XI. Atodiroaie Mihai (6921, 30, 6, 7, 40, 1, 5, 7, 62, 3, 7, 89, 5, 7, 9, 7002, 3, 5).

TIMIȘOARA. *L.7.* cl. XI. Rothenstein Ana (7002, 60, 1, 63, 4, 6, 9, 70, 3, 8, 100, 1, 10). Student Peiov Petru ((6927, 31—4, 6—8, 41—3, 50, 2, 4, 6, 7, 9, 63, 8, 92, 5, 6, 9, 7001—3, 24, 45, 63, 6, 9, 78, 87, 8).

TÎRGU JIU. Cl. IX. Ciocîrlie Valeriu (7049—2, 4, 9, 61, 2, 6, 9, 77, 8, 80, 91, 110).

TÎRGU MUREȘ. *L.1* cl. VI. Vamoș Călin (E : 2337, 8, 54, 6, 7, 9, 68, 9, 71). Cl. VII. Dragotă Adrian (E : 2336, 7, 57, 9, 61, 3, 5, 76).

TOPANA (Argeș). Cl. XI. *Ivana Ion* (6847—9, 51—4, 62—9, 72, 81, 3, 8, 96, 927—38, 46, 50, 4, 6) (va urma).

1966 MAR - 7

CĂTRE REZOLVITORII DE PROBLEME

— *Rezolvînd problemele pregătiți și Olimpiada Matematică 1966.*

Corespondenții care ne trimit probleme rezolvate trebuie să redacteze fiecare problemă separat, însoțind-o de toate calculele necesare și de figuri desenate cu îngrijire.

Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceeași foaie.

Evidențiații trebuie să aibă cel puțin 35—40 soluții bune.

Problemele care se propun de către colaboratorii revistei să fie clar alcătuite și însoțite de soluții, să fie personale, iar nu luate din cărți sau reviste. Elevii sînt sfătuiți să înceapă a propune probleme numai după ce au rezolvat un număr destul de mare de exerciții probleme. Problemele propuse, dar necorespunzătoare, nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse au fost publicate în cărți sau reviste, este rugat să arate precis volumul și pagina unde a mai apărut enunțul sau soluția problemei respective.

Solicităm probleme interesante legate de practică.

— *Problemele propuse urmînd a fi publicate ținînd seama de predarea la clasă a materiei respective, autorii lor sînt rugați să trimită problemele din vreme însoțite de una sau mai multe soluții îngrijit scrise precum și observări, discuții sau uneori generalizări arătînd și modul cum au fost stabilite.*

— *Problemele propuse* (P), *note matematice* (N), *articole* (A), *materiale privind cercurile de elevi* (C), *se vor trimite redacției* G.M.-B. *de preferat într-un plic separat de problemele rezolvate.*

Corespondentul nostru care a citit și a înțeles deplin multe din soluțiile publicate, a rezolvat multe din problemele propuse poate și este îndemnat să încerce să schițeze cîte o notă rezultată dintr-o observație făcută cu ocazia rezolvării unei chestiuni mai grele. Aceste note să fie *revăzute de mai multe ori înainte de a fi trimise*, pentru ca redactarea lor să fie *cît mai clară și concisă*. Figurile să fie făcute separat. În redactare se vor evita prescurtările.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

La publicarea problemelor rezolvate se vor menționa rezolvitorii care au dat o bună redactare și o soluție interesantă sau mai multe metode de rezolvare.

Elevii claselor a IX-a pot trimite soluții și la problemele propuse pentru clasa VIII-a. Problemele rezolvate trebuie să fie din ultimile trei numere apărute în G.M.-B. *Problemele rezolvate*, vor fi expediate în cursul unei luni și vor fi însoțite de un borderou cu numărul problemelor, scrise în ordinea crescîndă. Pe plic se vor scrie școala, clasa și localitatea rezolvitorului. Problemele propuse vor fi separate, corect rezolvate și citeț semnate. Desenele să fie făcute îngrijit pe foi separate.

Elevii claselor V—VIII vor fi anunțați în rubrica rezolvitorilor de probleme dacă trimit odată cel puțin 8 probleme bine rezolvate, iar elevii claselor IX—XI, pentru cel puțin 12 probleme bine rezolvate.

— *Rezolvitorii de probleme din G.M.-B care în anul 1965 vor întruni peste 150 probleme rezolvate și anunțate la rubrica rezolvitorilor în primele 12 numere apărute, pot trimite redacției, de îndată, o fișe arătînd care sînt aceste probleme, pentru a face controlul la întocmirea listei elevilor care vor fi premiați pe anul 1965.*

— *Liceele care în 1965 au elevi ca rezolvitori de probleme sau premiați la Olimpiada de matematică, pot trimite fișa cu activitatea extrașcolară la matematică, conform regulamentului întrecerii publicat în G.M-B, nr. 3 — 1965 pag. 112. La clasificarea liceelor se va ține seama și de numărul de clase medii pe care le-a avut în anul școlar 1964—1965.*

Autorii sînt rugați să semneze clar la sfîrșitul lucrării personale pe care o trimit pentru publicat și să dea adresa lor exactă.

Tirajul fiind limitat, gazetele se trimit mai întîi abonaților și de aceea rugăm colaboratorii noștri să se aboneze de îndată. Prețul este de 2 lei exemplarul. *Abonamentele se pot face prin poștele locale.*

I. P. „Informația" — c. 4695

INDEX 41601

Lei 2

E 1426

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE
DIN REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA

GAZETA MATEMATICĂ

SERIA B

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XVII — februarie 1966

2

1883

GAZETA MATEMATICĂ
SERIA B
Anul XVII, nr. 2 — februarie 1966

SUMARUL

		Pag.
1.	Asupra rezolvării numerice a ecuaţiilor de Bal Iuliana, Cluj	49
2.	Modelul lui Poincaré de Tiberiu Weszely	54
3.	Probleme în care intervine funcţia valoare absolută de Ion Stoian, Cluj	57
4.	Note Matematicede A. Heilper, D. Pestroiu şi M. Aciu	62
5.	Probleme rezolvate (7020; 7021; 7023; 7025; 7026; 7030; 7034; 7035; 7038; 7039; E: 2270; 2342; 2348	63
6.	Premiile Gazetei matematice seria B, pe anul 1964	75
7.	Chestiuni de examen (7355—7396)	76
8.	Probleme propuse (7397—7422)	82
9.	Exerciţii şi probleme pentru clasele V—VIII (E: 2450—2463)	86
10.	Poşta redacţiei	88
11.	Rubrica rezolvitorilor de probleme	89

ANUL XVII 2 FEBRUARIE

O mare parte din materialele publicate în acest număr a fost asigurată de către filiala Cluj a Societăţii de ştiinţe matematice din Republica Socialistă România

COMITETUL DE REDACŢIE

Dincă N., profesor; *Grosu A.*, profesoară; *Ionescu-Bujor C.*, prof. univ. emerit; *Ionescu-Ţiu C.*, profesor, redactor şef adjunct; *Kiss E.*, conf. univ. (Cluj); *Kovacs K.*, conf. univ. (Cluj); *Muşat I.*, profesor; *Ottescu C.*, profesor; *Plăviţu M.*, profesor; *Sacter O.*, conf. univ., redactor şef; *Simionescu Gh.*, conf. univ.; *Ţene L.*, profesoară şi *Voinea R.* prof. univ.

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 14.46.53 — Bucureşti

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică a şcolilor, precum şi orice material informativ se vor trimite pe adresa de mai sus.

GAZETA MATEMATICĂ
SERIA B
PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET
Anul XVII nr. 2 februarie 1966

ASUPRA REZOLVĂRII NUMERICE A ECUAȚIILOR

BAL IULIANA profesoară, liceul *Emil Racoviță*, Cluj

În cursul superior al școlii medii elevii se obișnuiesc treptat, să rezolve ecuații și sisteme de ecuații de gradul întîi și doi, precum și unele ecuații particulare de grad superior : ecuații binome, ecuații trinome și ecuații reciproce. De asemenea se învață găsirea rădăcinilor raționale ale ecuațiilor algebrice. În toate aceste rezolvări se urmărește găsirea rădăcinilor exacte ale ecuațiilor algebrice. Acest lucru nu este întotdeauna necesar în practică, deoarece chiar datele care au condus la formarea ecuațiilor corespunzătoare nu sînt exacte. Găsirea rădăcinilor exacte nici nu este posibilă în general, deoarece pentru ecuațiile algebrice de cel puțin gradul al cincilea nu avem formule cu radicali pentru rezolvarea lor, iar formulele pentru rezolvarea ecuațiilor de gradele III și IV sînt complicate. Din aceste motive se impune folosirea unor metode care să ne dea valori aproximative sau apropiate, ale rădăcinilor. Așa se procedează la rezolvarea ecuațiilor trigonometrice și logaritmice cu ajutorul tabelelor.

În clasa a XI-a, după ce se cunoaște calculul diferențial, se abordează rezolvarea ecuațiilor pe această cale. Aici se dau metode pentru determinarea unui interval cît mai mic, în care se găsește o rădăcină reală a ecuației date. Rădăcina este considerată ca limita unui șir convergent x_1, x_2, ..., x_n, ... fiecare din termenii săi reprezentînd o valoare aproximativă a ei. La astfel de șiruri conduc aplicările succesive ale metodei înjumătățirii segmentului, a metodei coardei și metodei tangentei. Dificultățile ivite din cauza volumului mare de calcule ce trebuie făcute nu mai constituie o piedică, deoarece aceste calcule se pot programa la mașinile electronice. Unele dintre acestea funcționează în București, Cluj și Timișoara, ele sînt folosite, bineînțeles, cînd este vorba de găsirea rădăcinilor cu o precizie foarte mare. În cazul cînd precizia cerută este mică calculele se pot face cu mîna, sau folosind mașinile de birou obișnuite.

Metode grafice pot fi de asemenea folosite cu succes, cînd precizia cerută nu e mare. Ele au avantajul că prezintă intuitiv și rapid, soluția. Printre ele, metodele nomografice au o importanță deosebită.

În cele ce urmează vom prezenta *metoda iterației* cunoscută și sub numele de metoda aproximațiilor succesive. Ea presupune o mică extindere a cunoștințelor ce se dau în prezent în școala medie, cu noțiuni despre serii și constă în următoarele.

Pentru a rezolva ecuaţia

$$F(x) = 0, \tag{1}$$

o presupunem adusă la forma echivalentă

$$x = \varphi(x), \tag{2}$$

unde $\varphi(x)$ este o funcţie derivabilă pe un anumit interval.

Ecuaţia (1) se poate aduce la forma (2) în mai multe feluri; spre exemplu, ecuaţia

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

este echivalentă cu ecuaţiile

$$x = \frac{x^3 - 5}{2}; \quad x = \sqrt[3]{2x + 5};$$

$$x = x + C(x^3 - 2x - 5), \tag{2'}$$

care sînt de forma (2).

Se formează şirul

$$x_1 = \varphi(x_0), \quad x_2 = \varphi(x_1), \ \ldots, \ x_n = \varphi(x_{n-1}), \ \ldots, \tag{3}$$

în care x_0 este o valoare aproximativă a unei rădăcini reale a ecuaţiei (1), pe care am presupus-o izolată într-un interval.

Dacă şirul (3), e convergent, atunci limita lui este o rădăcină a ecuaţiei (1). Într-adevăr, $\varphi(x)$ fiind continuă,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_{n-1}) = \varphi\left(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}\right) = \varphi(\xi_0)$$

sau

$$\xi_0 = \varphi(\xi_0)$$

din care rezultă că ξ_0 este o rădăcină a ecuaţiei.

Acest procedeu ne permite să găsim valori aproximative ale rădăcinii oricît de apropiate de ea. Se pune întrebarea: cum trebuie să fie funcţia $\varphi(x)$, pentru ca şirul (3) să fie convergent.

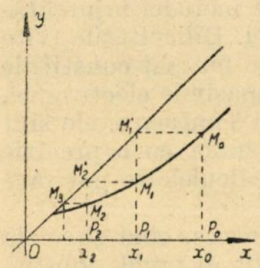


Fig. 1

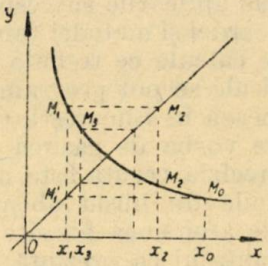


Fig. 2

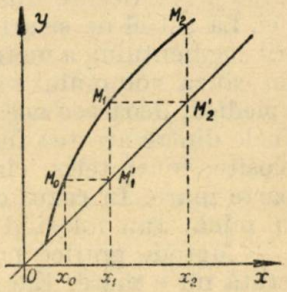


Fig. 3

Grafic, acest procedeu se poate ilustra prin mai multe cazuri de figură, unde rădăcinile ecuaţiei apar ca abscisele punctelor de intersecţie ale curbei $y = \varphi(x)$, cu bisectoarea întîia $y = x$ (fig. 1, 2, 3).

Corespunzător naturii şirului, pe grafic va corespunde o linie poligonală ale cărei vîrfuri se apropie sau se depărtează de punctul de intersecţie. În fig. 1 vîrfurile liniei poligonale se apropie de punctul de intersecţie de o parte a bisectoarei, în fig. 2 se apropie trecînd dintr-o parte în alta, iar în fig. 3 aceste vîrfuri se depărtează.

Examinînd situaţia proiecţiilor acestor vîrfuri pe axa Ox constatăm că în primele două cazuri aceste puncte se îngrămădesc în jurul proiecţiei punctului de intersecţie, iar în ultimul caz, se depărtează. Aceste cazuri grafice corespund la cazurile cînd şirul iterativ $\{x_n\}$ converge sau diverge. Construcţia graficului rezultă din reprezentarea succesivă a egalităţilor procesului iterativ. Astfel, pornind de la valoarea aproximativă x_0, construim ordonata $\varphi(x_0)$, ridicînd în punctul P_0 de pe axa Ox de abscisă x_0, o perpendiculară pe axa Ox şi considerînd pe această perpendiculară punctul M_0 de intersecţie cu graficul funcţiei $\varphi(x)$. Pentru construirea punctului M_1 de abscisă $x_1 = \varphi(x_0)$ ducem prin M_0 o paralelă la Ox care taie bisectoarea $y = x$ în M'_1, a cărui abscisă este x_1. Paralela la Oy dusă prin M'_1 taie graficul funcţiei $\varphi(x)$ în M_1. Pornind de la punctul M_1 de pe grafic construim în continuare, în mod analog, punctul M_2 de abscisă $x_2 = \varphi(x_1)$ şi aşa mai departe.

Pentru demonstrarea convergenţei acestui şir, condiţiile sînt date de

Teorema: *Fie* $\varphi(x)$ *derivabilă pe segmentul* $[a, b]$. *Dacă avem* $|\varphi'(x)| < q < 1$, *pentru orice* $x \in [a, b]$, (4) *şi* $\varphi(x) \in [a, b]$, *atunci şirul* $x_n = \varphi(x_{n-1})$, (5) *converge independent de valoarea iniţială* $x_0 \in [a, b]$, *iar limita sa* $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ *este rădăcina ecuaţiei* $x = \varphi(x)$.

Să considerăm diferenţa a doi termeni consecutivi ai şirului $\{x_n\}$,

$$x_{n+1} - x_n = \varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1}).$$

În ipotezele teoremei, membrul al doilea poate fi transformat cu ajutorul teoremei lui Lagrange şi avem

$$x_{n+1} - x_n = \varphi'(x') \cdot (x_n - x_{n-1}),$$

la care, aplicînd teorema valorilor absolute găsim

$$|x_{n+1} - x_n| = |\varphi'(x')| \, |x_n - x_{n-1}| < q\,|x_n - x_{n-1}|$$

Dînd lui n valorile 1, 2, ..., n, ... obţinem şirul de inegalităţi

$$\begin{aligned}
&|x_2 - x_1| < q\,|x_1 - x_0|,\\
&|x_3 - x_2 < q|x_2 - x_1| \leqslant q^2\,|x_1 - x_0|, \qquad (6)\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&|x_{n+1} - x_n| < q^n\,|x_1 - x_0|,\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Pentru studiul convergenţei şirului $\{x_n\}$, considerăm seria

$$x_0 + (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_n - x_{n-1}) + \ldots \qquad (7)$$

pentru care suma parţială este

$$S_{n+1} = x_n$$

Această serie este convergentă odată cu șirul $\{x_n\}$, deoarece

$$\lim_{n\to\infty} S_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Ținînd seama de inegalitățile (6) rezultă că seria (7) este absolut convergentă conform criteriului comparației:

$$| x_{n+1} - x_n | < q^n | x_1 - x_0 |.$$

Punînd $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$ rezultă că, trecînd la limită în egalitatea (5),

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_{n-1}) = \varphi(\lim_{n\to\infty} x_{n-1})$$

sau:

$$\xi = \varphi(\xi),$$

adică ξ este rădăcina căutată.

Să arătăm că rădăcina ξ este unică. Presupunînd că și ξ_1 este rădăcină ar rezulta

$$\xi - \xi_1 = \varphi(\xi) - \varphi(\xi_1) = (\xi - \xi_1)\varphi'(c); \quad c \in [\xi, \xi_1],$$

din care rezultă $\varphi'(c) = 1$, contrar ipotezei teoremei.

Exemplu. Să se rezolve cu metoda iterației ecuația

$$x^3 - 2x - 5 = 0.$$

Punem ecuația sub forma echivalentă

$$x = x + C(x^3 - 2x - 5), \quad \varphi(x) = x - \frac{x^3}{9} + \frac{2x}{9} + \frac{5}{9}.$$

S-a determinat C din (2') astfel ca $| \varphi'(x) | < \frac{1}{3}$ în intervalul $[2; 2, 1]$, deoarece

$$\varphi'(x) = \frac{11}{9} - \frac{x^2}{3}; \quad x \in [2; 2, 1]; \quad | \varphi'(x) | < \frac{1}{3}.$$

Luăm ca valoare aproximativă a rădăcinii $x_0 = 2$ și formăm șirul cerut de metoda iterației

$$x_1 = \varphi(x_0) = 2{,}111111 \; ; \; x_2 = \varphi(x_1) = 2{,}0903826 \; ; \; x_3 = \varphi(x_2) = 2{,}0955406 \; ;$$
$$x_4 = \varphi(x_3) = 2{,}0943132 \; ; \; x_5 = \varphi(x_4) = 2{,}0946086 \; ; \; x_6 = \varphi(x_5) = 2{,}0945377 \; ;$$
$$x_7 = \varphi(x_6) = 2{,}0945548 \; ; \; x_8 = \varphi(x_7) = 2{,}0945507 \; ; \; x_9 = \varphi(x_8) = 2{,}0945517 \; ;$$
$$x_{10} = \varphi(x_9) = 2{,}0945514.$$

Pentru calculul erorii pornim de la evaluarea diferenței

$$x_{n+p} - x_n = x_{n+p} - x_{n+p-1} + x_n - x_{n+p-2} + \ldots + x_{n+1} - x_n$$

și aplicînd teorema valorilor absolute

$$| x_{n+p} - x_n | = | x_{n+p} - x_{n+p-1} | + \ldots + | x_{n+1} - x_n | \leqslant$$
$$| x_1 - x_0 | [q^{n+p-1} + q^{n+p-2} + \ldots + q^n]$$

sau :

$$| x_{n+p} - x_n | < \frac{q^n}{1-q} | x_1 - x_0 |.$$

Notînd cu ξ rădăcina ecuației avem evident și inegalitatea

$$| \xi - x_n | \leqslant \frac{q^n}{1-q} | x_1 - x_0 |,$$

care ne dă eroarea pe care o facem cînd ne oprim la termenul al n-lea adică la iterația a n^{-a}.

În cazul nostru, $n = 10$

$$|\xi - x_{10}| \leqslant \frac{3^{\frac{1}{10}}}{\frac{2}{3}} \cdot 0{,}2 = \frac{1}{3^9} \cdot 0{,}1,$$

$$\max | \varphi'(x) | < q = \frac{1}{3}, \quad x \in [2\,;\ 2,\ 1]$$

sau

$$| \xi - x_{10} | < \frac{1}{10^5},$$

adică eroarea absolută este mai mică decît 10^{-5}; x_{10} este o valoare aproximativă prin lipsă, cu 5 zecimale exacte.

Ca încheiere facem observația că această metodă se pretează foarte mult programării la mașini electronice. Ea mai are avantajul că un calcul greșit la o iterație oarecare nu conduce la rezultate greșite pentru iterațiile următoare, ci numai la o creștere a numărului iterațiilor pentru obținerea unui rezultat cu precizie dată.

BIBLIOGRAFIE

1. *E. Arghiriade, A. Dragomir, P. Dragomir* — Algebră. Ed. didactică și pedagogică, 1964.
2. *E. Durand* — Solutions numériques des équations algébriques. Masson & c-ie, Paris, 1960.
3. *Marcel N. Roșculeț* — Analiza matematică. Ed. didactică și pedagogică, București, 1964.
4. *B. P. Demidovici, L. A. Maron* — Osnovî vîcislitelnoi matematiki. Lit. Moscova, 1963.
5. *O. Sacter* — Elemente de teoria ecuațiilor algebrice și transcendente, Editura tehnică, 1962.

MODELUL LUI POINCARÉ [1])

TIBERIU WESZELY, asistent Inst. Pedagogic Tîrgu Mureş

Prima lucrare care conţine o expunere completă şi sistematică a fundamentelor geometriei a fost opera celebră : *Elementele*, a lui *Euclid*. „Elementele" sînt alcătuite din 13 cărţi. Euclid începe fiecare carte cu definirea noţiunilor pe care le foloseşte în cuprinsul ei. Prima carte începe cu 23 de definiţii, dintre care amintim doar cîteva.

Definiţia I — Punctul este ceea ce nu are părţi.

Definiţia II — Linia este lungime fără lăţime.

Definiţia III — Marginile unei linii sînt puncte.

Definiţia IV — Dreapta este linia situată la fel faţă de toate punctele ei, etc.

După definiţii, *Euclid* aduce postulate şi axiome, adică afirmaţii care sînt acceptate fără demonstraţie. Dintre aceste postulate şi axiome, să amintim postulatul V, care va juca un rol important în raţionamentele noastre ulterioare.

Postulatul V — Cînd o secantă taie alte două drepte şi formează cu ele unghiuri interne şi aşezate de aceeaşi parte a secantei a căror sumă este mai mică decît două unghiuri drepte, dreptele se vor intersecta de acea parte a secantei unde această sumă este mai mică decît două unghiuri drepte.

Acesta este celebrul postulat al paralelelor. Mai tîrziu s-au depus multe eforturi pentru a demonstra postulatul V, ca pe o teoremă, pentru că acesta nu a părut atît de evident ca celelalte postulate şi axiome. Aceste încercări nu au dat nici un rezultat. S-a ajuns însă, la o serie de afirmaţii echivalente cu postulatul V, adică la afirmaţii dintre care dacă acceptăm una ca axiomă, celelalte se pot demonstra ; putem da cîteva ca exemplu : Printr-un punct exterior unei drepte date putem duce o singură dreaptă paralelă cu dreapta dată. — Suma unghiurilor unui triunghi este 180°. — Există triunghiuri asemenea dar neegale. — Există triunghiuri cu arie oricît de mare, etc.

Insuccesele repetate în această direcţie precum şi nevoile practicii au dus în prima jumătate a secolului XIX la crearea geometriei neeuclidiene de către Janos Bolyai [2]) şi N. Lobacevski [3]), care a însemnat una din cele mai mari revoluţii înfăptuite în domeniul geometriei. Aici postulatul paralelelor al lui Euclid a fost înlocuit cu postulatul conform căruia printr-un punct exterior unei drepte trec două drepte paralele cu dreapta dată.

---

1) *Henri Poincaré*, născut la Nancy în 1864, membru al Academiei de Ştiinţe din Paris, profesor la Sorbona, a fost unul dintre marii matematicieni ai lumii. A scris peste 500 de memorii matematice, aducînd contribuţii esenţiale în teoria ecuaţiilor diferenţiale, în teoria funcţiilor automorfe, în calculul probabilităţilor, în mecanica cerească etc. A murit în 1912.

2) *Janos Bolyai* s-a născut în decembrie 1802 la Cluj. A avut abia 21 de ani cînd a obţinut primele rezultate în legătură cu postulatul paralelelor. Opera lui principală „Appendix" a apărut în 1832 la Tîrgu Mureş, în limba latină, iar mai tîrziu a fost tradusă în toate limbile moderne. În limba romînă a apărut în 1953 în Editura Academiei R.P.R. Bolyai a murit în 1860 la Tîrgu Mureş.

3) *Nicolai Lobacevski* (1793—1856) profesor la Universitatea din Kazan a fost primul care a răspuns la problema bimilenară a paralelelor. Primele rezultate le-a publicat în 1829 după care mai publică o serie de lucrări în legătură cu această problemă.

Spre finele secolului al XIX-lea după ce au fost recunoscute ideile lui *Bolyai* şi *Lobacevski*, după ce au apărut lucrările lui B. Riemann [1]), problema construcţiei logice a geometriei a ajuns la ordinea zilei. Dintre aceste lucrări, cea mai însemnată şi cunoscută a fost lucrarea lui D. Hilbert [2]) *Fundamentele geometriei* apărută în 1899. În această carte Hilbert nu numai că dă un sistem complet de axiome, de la care plecînd se poate obţine prin deducţie logică întregul material al geometriei, ci dă şi principiile care permit să se demonstreze că un sistem de axiome este complet şi să se arate independenţa unor axiome de altele. Spre deosebire de „Elementele" lui Euclid, „Fundamentele geometriei" nu conţin nici o descriere a obiectelor studiului geometriei. Începînd expunerea axiomelor, Hilbert cere să existe trei grupuri de „obiecte" numite „puncte", „drepte" şi „plane". Între obiectele astfel definite trebuie să existe anumite relaţii care se exprimă prin cuvintele : „este situat pe", „trece prin", „între" etc. Desigur aceste principii de bază au fost elaborate de către Hilbert ţinînd seamă de întregul material empiric adunat în geometrie în aşa mod încît acest material să poată fi dedus din ele prin raţionamente strict logice. Cu toate acestea „obiectele" despre care este vorba nu trebuie să aibă o natură anumită sau o formă bine determinată. Ele pot fi alese oricum, cu condiţia să respecte cerinţele axiomelor.

În afară de geometria euclidiană, ale cărei teoreme nu contrazic felul cum se obişnuieşte să fie imaginate obiectele geometrice, există şi alte sisteme geometrice ca cel hiperbolic (al lui Bolyai şi Lobacevski) şi cel eliptic (al lui Riemann), care sînt contrarii reprezentării noastre spaţiale imediate. Prin construirea modelelor acestor sisteme geometrice neeuclidiene putem înlătura şi acest impediment aparent. Or, aceste modele au şi alte proprietăţi importante. Pe de o parte cu ajutorul lor se poate demonstra că necontradicţia geometriei lui Bolyai-Lobacevski decurge din necontradicţia geometriei lui Euclid, pe de altă parte permite o metodă uşoară şi rodnică pentru studiul proprietăţilor şi relaţiilor geometriei neeuclidiene. În cele ce urmează ne vom ocupa cu modelul lui *Henri Poincaré*, unul din modelele cele mai reuşite ale geometriei neeuclidiene hiperbolice.

Modelul lui Poincaré. Să considerăm în planul euclidian o dreaptă *a* pe care ne-o vom imagina orizontală. Această dreaptă împarte planul în două semiplane, pe care le vom numi, semiplanul superior, respectiv inferior. Vom numi „puncte neeuclidiene" punctele semiplanului superior (fără punctele dreptei *a*) şi „drepte neeuclidiene" semicercurile euclidiene situate în semiplanul superior şi ortogonale dreptei *a* (adică avînd centrele pe dreapta *a*); precum şi semidreptele euclidiene ale semiplanului superior care se sprijină pe dreapta *a* şi sînt perpendiculare pe ea (fig. 1). În cele ce urmează punctele neeuclidiene, dreptele neeuclidiene astfel definite vor fi numite pur şi simplu puncte, respectiv drepte. Acest model al

---

[1]) *Bernhard Riemann* (1826—1866) profesor la Universitatea din Göttingen, unul dintre cei mai mari matematicieni, care a îmbogăţit ştiinţa prin contribuţii esenţiale în teoria funcţiilor de o variabilă complexă şi prin introducerea noţiunii generale de spaţiu neeuclidian, numit astăzi spaţiu riemannian, definit printr-o metrică dată.

[2]) *David Hilbert* (1862—1941) a fost profesor la Universitatea din Göttingen. În afară de crearea sistemului de axiome ale geometriei, D. Hilbert a obţinut rezultate remarcabile în teoria ecuaţiilor integrale, în teoria numerelor, logica matematică etc. A fost vestit pentru cursurile frumoase pe care le-a ţinut la Universitate.

geometriei neeuclidiene de tip hiperbolic a fost considerat de Poincaré. Se poate arăta că toate axiomele lui Hilbert în afară de axioma paralelelor sînt verificate. De exemplu, pentru oricare două puncte diferite A şi B există o dreaptă d şi numai una singură care trece prin fiecare din punctele A şi B. Pe orice dreaptă se găsesc două puncte. Există cel puţin trei puncte nesituate pe aceeaşi dreaptă etc.

Să construim de exemplu, dreapta d care trece prin punctele distincte A şi B. Pentru aceasta construim mediatoarea segmentului AB, care intersectează dreapta a în punctul O. Semicercul cu centrul în O şi raza OA

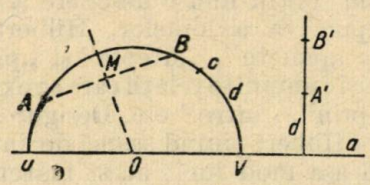


Fig. 1

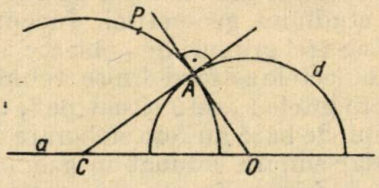


Fig. 2

(sau OB) va fi dreapta căutată. Dacă mediatoarea MO nu intersectează dreapta a înseamnă că A şi B se află pe o semidreaptă perpendiculară pe a, cum sînt de exemplu, punctele A' şi B' (fig. 1) În acest caz dreapta căutată va fi semidreapta $A'B'$.

Prin unghiul a două drepte ale modelului Poincaré vom înţelege, ca şi în geometria plană euclidiană, unghiul sub care se taie cele două cercuri, care se măsoară prin unghiul format de tangentele duse la ele în punctul lor de intersecţie.

Fie dată o dreaptă d şi un punct P exterior dreptei d. Prin P se poate duce o dreaptă perpendiculară pe dreapta d (fig. 2). Această problemă ne conduce din nou la o problemă din planul euclidian. Trebuie să construim un semicerc cu centrul C pe dreapta a, care trece prin punctul P şi taie ortogonal semicercul (O). Cum cercul (C) este unic determinat prin aceste trei condiţii, perpendiculara coborîtă din P pe dreapta d este unică.

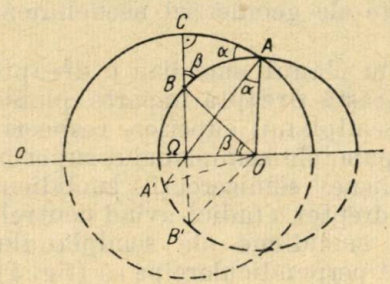


Fig. 3

Să considerăm acum un triunghi în modelul nostru. Pentru simplificare vom lua un triunghi ABC dreptunghic în C, în aşa fel încît latura CB să fie raza $C\Omega$ perpendiculară pe a, unde Ω este centrul semicercului care ne dă dreapta AC în model (fig. 3). Fie O centrul semicercului care reprezintă dreapta AB.

Vom calcula suma unghiurilor triunghiului ABC. Notînd unghiurile ca pe figură, trebuie determinată suma $\alpha + \beta$ deoarece $C = 90°$.

Se poate arăta uşor că:

$$\sphericalangle CAB = \sphericalangle \Omega AO = \alpha \quad \text{şi} \quad \sphericalangle ABC = \sphericalangle \Omega OB = \beta.$$

După teorema simplă din geometria plană euclidiană care spune că dintre coardele cercului (O) care trec prin punctul interior Ω, cea mai scurtă

este cea perpendiculară pe $O\Omega$, avem $BB' < AA'$. Ținînd seama de această inegalitate, tot dintr-o teoremă bine cunoscută deducem : $\sphericalangle BOB' < \sphericalangle AOA'$. Cum sumele unghiurilor triunghiurilor euclidiene AOA' și BOB' sînt egale cu 180° și aceste triunghiuri fiind isoscele mai rezultă că $\sphericalangle OBB' > \sphericalangle OAA'$ sau, ca notațiile noastre $\sphericalangle OBB' > \alpha$.

În triunghiul euclidian dreptunghic $O\Omega M$ însă, avem $\sphericalangle OB\Omega + \beta = 90°$. Avînd în vedere ultima inegalitate, rezultă că $\alpha + \beta < 90°$. Prin urmare pentru suma unghiurilor triunghiului ABC din modelul nostru vom avea

$$\alpha + \beta + C < 180°.$$

Aceasta ne arată că suma unghiurilor unui triunghi al modelului nostru este mai mică decît două unghiuri drepte. Și cum ipoteza că suma unghiurilor oricărui triunghi este egală cu două unghiuri drepte este echivalentă cu postulatul lui Euclid, rezultă că în geometria noastră, construită cu ajutorul modelului, postulatul lui Euclid nu mai are loc.

PENTRU CERCURILE DE ELEVI

PROBLEME ÎN CARE INTERVINE FUNCȚIA VALOARE ABSOLUTĂ

I. STOIAN, profesor Cluj

Cu ocazia diferitelor examene de maturitate, admitere în învățămîntul superior și la olimpiadele de matematică au fost date, printre altele, probleme care conțin funcții în a căror expresie analitică intervine valoarea absolută. Mulți candidați au dat răspunsuri nesatisfăcătoare, ba chiar au răspuns că nu au întîlnit astfel de probleme.

În cele ce urmează ne propunem să prezentăm cîteva probleme de acest gen, împreună cu soluțiile respective.

1. Se știe că *valoarea absolută* sau *modulul* unui număr real x se notează prin $|x|$ și se definește prin

$$|x| = \begin{cases} x \text{ pentru } x > 0, \\ 0 \text{ pentru } x = 0, \\ -x \text{ pentru } x < 0. \end{cases} \qquad (1)$$

a) Dacă considerăm funcția $f(x) = |x|$, felul în care a fost definit $|x|$ ne conduce la reprezentarea grafică din fig. 1. Se vede aici că pe intervalul $[0, +\infty)$ avem graficul funcției $f(x) = x$, iar pentru $x \in (-\infty, 0]$ graficul funcției $f(x) = -x$.

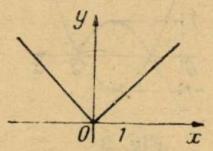


Fig. 1

b) Să considerăm funcția $f(x) = |ax + b|$, unde $a > 0$. Rădăcina binomului este $-\frac{b}{a}$ și conform regulei semnului binomului de gradul I, pentru $x \geqslant -\frac{b}{a}$ avem $ax + b \geqslant 0$, iar pentru $x \leqslant -\frac{b}{a}$, $ax + b \leqslant 0$.

Prin urmare,

$$f(x) = \begin{cases} -(ax+b), \text{ pentru } x \leqslant -\dfrac{b}{a}; \\ ax+b, \text{ pentru } x \geqslant -\dfrac{b}{a}. \end{cases}$$

Un studiu analog se poate face şi pentru $a < 0$. De exemplu, în cazul funcţiei $f(x) = |2-x|$, avem

$$f(x) = \begin{cases} 2-x, \text{ pentru } x \leqslant 2 \\ x-2, \text{ pentru } x \geqslant 2 \end{cases}$$

Graficul funcţiei este cel din fig. 2.

c) În cazul funcţiei[1])

$$f(x) = |ax^2 + bx + c|,$$

fie $a > 0$ şi x_1, x_2 rădăcinile trinomului $ax^2 + bx + c$, pe care să le considerăm reale şi diferite ($x_1 < x_2$). Avem :

$$|ax^2 + bx + c| = \begin{cases} ax^2 + bx + c, \text{ pentru } x \in (-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty); \\ -(ax^2 + bx + c), \text{ pentru } x \in [x_1, x_2] \end{cases}$$

De exemplu, în cazul funcţiei $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ şi avem

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, \text{ pentru } x \in (-\infty, 1] \cup [3, +\infty); \\ -(x^2 - 4x + 3), \text{ pentru } x \in [1; 3]. \end{cases}$$

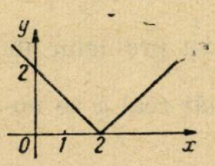


Fig. 2

Graficul variaţiei acestei funcţii este cel din fig. 3.

De remarcat faptul că graficul este acelaşi cu cel al funcţiei $y = x^2 - 4x + 3$, unde se ia simetricul faţă de Ox, al porţiunii de curbă cuprinsă între x_1 şi x_2.

d) Dacă funcţia conţine mai multe valori absolute, procedeul este analog. Fie de exemplu, funcţia [2])

$$f(x) = |2x - 1| + x - |x + 1| - 2; \quad x \in R.$$

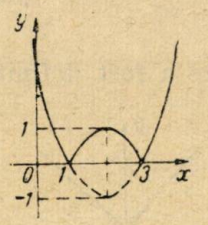


Fig. 3

Vom studia mai întîi, semnul binoamelor $2x - 1$ şi $x + 1$

x	$-\infty$		-1		$1/2$		$+\infty$
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	

În felul acesta am stabilit trei intervale pe care funcţia va fi definită în mod diferit :

1° pentru $x \in (-\infty, -1]$, deoarece binoamele $2x - 1$ şi $x + 1$ sînt negative pe acest interval, avem $|2x-1| = 1-2x$, $|x+1| = -x-1$.

[1]) vezi G.M.B., octombrie 1954, pag. 383.
[2]) vezi problema 6816, G.M.B., 1964.

(conform celor stabilite la (1)), iar $f(x) = 1 - 2x + x + x + 1 - 2$, deci, $f(x) = 0$;

2° pentru $x \in [-1; 1/2]$ avem $|2x - 1| = 1 - 2x$, $|x + 1| = x + 1$, iar $f(x) = 1 - 2x + x - x - 1 - 2$, deci $f(x) = -2x - 2$;

3° pentru $x \in [1/2, +\infty)$, $|2x - 1| = 2x - 1$, $|x + 1| = 1 + x$ și avem $f(x) = 2x - 4$.

În concluzie,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x \in (-\infty, -1]; \\ -2x - 2 & \text{pentru } x \in [-1, 1/2]; \\ 2x - 4 & \text{pentru } x \in [1/2, +\infty). \end{cases}$$

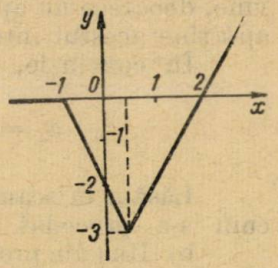


Fig. 4

Graficul variației acestei funcții este cel din fig. 4.

Cu ajutorul acestui grafic putem da și soluțiile ecuației

$$|2x - 1| + x - |x + 1| - 2 = 0.$$

Soluțiile sînt, evident, $x \in (-\infty, -1] \cup \{2\}$, adică intersecția dintre mulțimea punctelor graficului și mulțimea punctelor de pe axa Ox.

2. *Ecuații în care intervine funcția valoare absolută*

O ecuație se poate scrie ca o egalitate de două funcții. Soluțiile unei ecuații trebuie căutate pe intersecția domeniilor de definiție a celor două funcții și anume, acele valori care, aparținînd intersecției de mai sus fac ca cele două funcții să fie egale. Dacă într-o ecuație funcțiile care intervin conțin valori absolute, rezolvarea ecuației prezintă aspecte interesante. Vom ilustra acest lucru prin cîteva exemple.

a) Să se rezolve ecuația

$$x \cdot |x + 1| = 2x - 2 \cdot |1 - x| + 6.$$

S-ar putea proceda ca în exemplul precedent, reprezentînd grafic variația funcției

$$f(x) = x \cdot |x + 1| - 2x + 2 \cdot |1 - x| - 6.$$

Putem însă rezolva ecuația și fără reprezentarea grafică. Vom studia semnul binoamelor $x + 1$ și $1 - x$:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$1 - x$		$+$		$+$	0	$-$	

și vom căuta soluții pe cele trei intervale: $(-\infty, -1]$, $[-1,1]$, $[1, +\infty]$.

1° Pentru $x \in (-\infty, -1]$ avem $|x + 1| = -x - 1$, $|1 - x| = 1 - x$ (se va urmări în tabel semnul celor două binoame). Ecuația devine

$$x(-x - 1) = 2x - 2(1 - x) + 6; \; x^2 + 5x + 4 = 0,$$

cu rădăcinile $x_1 = -4$, $x_2 = -1$. Ambele valori aparțin intervalului $(-\infty, -1]$ prin urmare, vor fi soluții pentru ecuația dată.

2° Pentru $x \in [-1, 1]$ avem $|x+1| = x+1$, $|1-x| = 1-x$ și înlocuind în ecuație obținem $x^2 - 3x - 4 = 0$; $x = -1$ (am regăsit pe x_2 de la pct. 1°) și $x = 4$, care nu convine, deoarece nu aparține intervalului $[-1, 1]$.

3° Pentru $x \in [1, +\infty)$, $|x+1| = x+1$ și $|1-x| = x-1$; $x^2 + x - 8 = 0$, $x_{3,4} = 1/2(-1 \pm \sqrt{33})$. Valoarea $1/2\ (-1 - \sqrt{33})$ nu convine, deoarece nu aparține intervalului $[1, +\infty)$; valoarea $1/2(-1 + \sqrt{33})$ aparține acestui interval deci, va fi rădăcină pentru ecuația dată.

În concluzie, rădăcinile ecuației sînt:

$$x_1 = -4,\ x_2 = -1,\ x_3 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{33}).$$

Lăsăm în seama cititorilor să rezolve ecuația și pe cale grafică, așa cum s-a procedat în exemplul precedent.

b) Una din problemele date în acest an la etapa regională a olimpiadei de matematică, deși enunțată sub altă formă, este tot o ecuație în cursul rezolvării căreia intervine valoarea absolută:

Să se arate că egalitatea *

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = 2. \tag{1}$$

este verificată pentru $1 \leqslant x \leqslant 2$.

Cu alte cuvinte, trebuie să dovedim că soluția ecuației este $x \in [1; 2]$. Aici vom căuta, mai întîi, domeniul de definiție al funcției

$$f(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} - 2. \tag{2}$$

Trebuie să avem $x - 1 \geqslant 0$, adică

$$x \in [1, +\infty). \tag{3}$$

Pentru $x \geqslant 1$ avem $x + 2\sqrt{x-1} > 0$ și mai trebuie ca $x - 2\sqrt{x-1} \geqslant 0$, $x \geqslant 2\sqrt{x-1}$. Prin ridicare la patrat $x^2 \geqslant 4(x-1)$, $(x-2)^2 \geqslant 0$ care se verifică pentru orice x. Prin urmare, domeniul de definiție al funcției (2) este $x \in [1, \infty)$.

Ridicăm la pătrat ambii membri ai egalității (1) și avem

$$x + \sqrt{(x-2)^2} = 2 \tag{4}$$

Dar, $\sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$ și ecuația (4) devine

$$x + |x-2| = 2 \tag{5}$$

Prin rezolvarea acestei ecuații găsim $x \in (-\infty, 2]$, dar cum soluția trebuie să aparțină domeniului de definiție (3), rezultă $x \in [1; 2]$, ceea ce trebuia demonstrat.

3. *Inegalități în care intervine valoarea absolută*

Cele arătate mai sus se aplică în cazul inegalităților, după cum vom ilustra prin cîteva exemple.

---

* Propusă de Prof. *C. Ionescu-Țiu.*

a) Să se rezolve inecuația

$$\left|\frac{2x^2-1}{x^2-1}\right| < 1. \tag{1}$$

Ușor se demonstrează că dacă $|A| \leqslant \alpha$, atunci $-\alpha \leqslant A \leqslant \alpha$, iar dacă $|A| \geqslant \alpha$, atunci $A \geqslant \alpha$ sau $A \leqslant -\alpha$; $(\alpha > 0)$. În acest fel inegalitatea (1) este echivalentă cu inegalitățile

$$-1 < \frac{2x^2-1}{x^2-1} < 1$$

și cu sistemul:

$$\frac{2x^2-1}{x^2-1} < 1, \quad \frac{2x^2-1}{x^2-1} > -1$$

pe care îl rezolvăm ușor.

b) Să se rezolve inecuația:

$$\left|\frac{x-1}{x+1}\right| > \left|\frac{1}{x-1}\right| - 1. \tag{2}$$

Soluțiile inecuația trebuie căutate pe domeniul de definiție $x \in R - \{-1; 1\}$. După ce stabilim semnul celor două fracții căutăm soluții pe intervalele $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ și $(1, +\infty)$.

1° Pentru $x \in (-\infty, -1)$, $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = \frac{x-1}{x+1}$, $\left|\frac{1}{x-1}\right| = \frac{1}{1-x}$; înlocuim în inegalitate (2) și rezolvînd, găsim $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ din care reținem ca soluție $x \in (-\infty, -1)$.

2° Pentru $x \in (-1, 1)$, $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = \frac{1-x}{1+x}$, $\left|\frac{1}{x-1}\right| = \frac{1}{1-x}$; înlocuim în inegalitatea (2) și rezolvînd găsim $x \in \left(-1, \frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty)$, dar, conform condiției $x \in (-1, 1)$, reținem ca soluție doar $x \in \left(-1, \frac{1}{3}\right)$.

3° Pentru $x \in (1, +\infty)$ găsim $x \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{3-\sqrt{17}}{4}, 1\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{17}}{4}, +\infty\right)$ din care reținem ca soluție $x \in \left(\frac{3+\sqrt{17}}{4}, +\infty\right)$.

În concluzie, soluția inecuației date o constituie reuniunea de mulțimi

$$x \in (-\infty, -1) \cup \left(-1, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{17}}{4}, +\infty\right).$$

S-ar putea da, desigur, nenumărate astfel de exemple.

Am prezentat doar cîteva, pentru a servi cititorilor și colaboratorilor Gazetei Matematice drept îndrumar în rezolvarea unor probleme de acest gen.

NOTE MATEMATICE

Generalizarea problemei 4830.

Se dă o ecuație $\sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-1} = 0$ cu rădăcinile pozitive. Să se demonstreze că are loc relația

$$\frac{a_k a_{n-k}}{a_0 a_n} \geqslant (C_n^k)^2$$

Demonstrație. Știm că avem $\Sigma x_1 x_2 \ldots x_k = (-1)^k \frac{a_k}{a_0}$ (1) unde x_i sînt rădăcinile ecuației.

Tot așa avem $\Sigma x_1 x_2 \ldots x_{n-k} = (-1)^{n-k} \frac{a_{n-k}}{a_0}$ (2) și

$x_1 x_2 \ldots x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$ (3). Împărțind (2) cu (3) membru cu membru obținem:

$$\Sigma \frac{1}{x_1 x_2 \ldots x_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_k} \tag{4}$$

Știm că media aritmetică a mai multor numere pozitive este mai mare sau cel mult egală cu cea geometrică și că $\Sigma x_1 x_2 \ldots x_k$ are C_n^k termeni.

Deci

$$\Sigma x_1 x_2 \ldots x_k \geqslant C_n^k \sqrt[C_n^k]{\Pi x_1 x_2 \ldots x_k}$$

și

$$\Sigma \frac{1}{x_1 x_2 \ldots x_k} \geqslant C_n^{n-k} \sqrt[C_n^{n-k}]{\Pi \frac{1}{x_1 x_2 \ldots x_k}}$$

Înmulțind relațiile de mai sus și ținînd cont că $C_n^k = C_n^{n-k}$ și că

$$\Pi x_1 x_2 \ldots x_k \cdot \Pi \frac{1}{x_1 x_2 \ldots x_k} = 1, \text{ obținem}$$

$$\Sigma \frac{1}{x_1 x_2 \ldots x_k} \cdot \Sigma x_1 x_2 \ldots x_k \geqslant (C_n^k)^2.$$

Ținînd cont de (1) și (4) obținem

$$(-1)^k \frac{a_k}{a_0} \cdot (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n} \geqslant (C_n^k)^2 \quad \text{dar} \quad (-1)^{2k} = 1,$$

Deci

$$\frac{a_k \cdot a_{n-k}}{a_0 \cdot a_n} \geqslant (C_n^k)^2.$$

Egalitate, obținem cînd $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

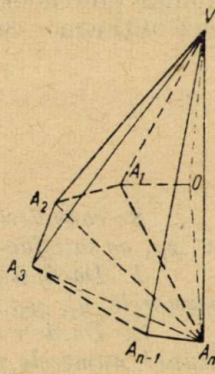
Pentru $n = 3$ și $k = 1$ obținem $\frac{a_1 a_2}{a_0 a_3} \geqslant 9$,

adică tocmai problema 4830.

Andrei Heilper, elev Cluj și
Daniel Pestroiu, elev Tg. Jiu

Generalizarea problemei E : 1280.

Dacă în piramida $VA_1A_2 \ldots A_n$, muchia VA_1 este perpendiculară pe A_1A_n, muchia VA_2 este perpendiculară pe $A_2A_n \ldots$ muchia VA_{n-1} este perpendiculară pe $A_{n-1}A_n$, atunci perpendiculara dusă din vîrful V pe planul bazei cade pe cercul circumscris poligonului $A_1A_2 \ldots A_n$.



Fie piramida $VA_1A_2 \ldots A_n$ în care $VA_1 \perp A_1A_n$, $VA_2 \perp A_2A_n, \ldots, VA_{n-1} \perp A_{n-1}A_n$. Să demonstrăm întîi că punctele $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ se află pe același cerc. Observăm că din punctele $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$ segmentul VA_n este văzut sub un unghi drept, deci aceste puncte se află pe sfera de diametru VA_n. Punctele A_1, $A_2, A_3, \ldots, A_n$ se vor afla pe cercul obținut prin tăierea sferei cu planul $A_1A_2A_3 \ldots A_n$. Fie VO perpendiculara din vîrful V pe planul bazei. Conform reciprocei teoremei celor trei perpendiculare, $OA_1 \perp A_1A_n$; $OA_2 \perp A_2A_n, \ldots, OA_{n-1} \perp A_{n-1}A_n$, deci din punctele $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}$ segmentul OA_n este văzut sub un unghi drept. Aceasta înseamnă că punctele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ și O se află pe același cerc. În cazul particular $n = 3$, obținem problema E : 1280.

Mihai Aciu, clasa a X-a, Cluj

PROBLEME REZOLVATE

Problema 7020

Să se rezolve în numere reale :

$$3(x^2 + y^2 + z^2) = 2(xy + yz + zx) + 8y + 16z - 56$$

Eugen Popa, elev Iași

Soluția autorului.
Relația se scrie succesiv

$$2(x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + yz + zx) - 8y - 16z + 56 = 0,$$

$$(x + y - z - 2)^2 + (x - y + z - 4)^2 + (-x + y + z - 6)^2 = 0,$$

de unde, ținînd seama că x, y, z sînt reale,

$$x + y - z = 2,\ x - y + z = 4,\ x + y + z = 6$$

Rezolvînd acest sistem se găsește soluția cerută:

$$x = 3,\ y = 4,\ z = 5$$

Soluția a II-a.

Considerăm egalitatea dată ca ecuație de grad II în x:

$$3x^2 - 2x(y + z) + (3y^2 + 3z^2 - 2yz - 8y - 16z + 56) = 0$$

Discriminantul acestei ecuații trebuie să fie pozitiv. Obținem astfel:

$$(y + z)^2 - 9y^2 - 9z^2 + 6yz + 24y + 48z - 168 \geqslant 0, \text{ sau}$$

$$-8y^2 + 8y(z + 3) - 8(z^2 - 6z + 21) \geqslant 0.$$

Discriminantul acestui termen este: $-64(z - 5)^2$ și pentru ca trinomul precedent să admită valori nenegative trebuie ca $z = 5$. În acest caz obținem $-8(y - 4)^2 \geqslant 0$, deci $y = 4$ și ecuația se reduce la:

$$3(x^2 - 6x + 9) = 0, \text{ de unde } x = 3.$$

Problema 7021

Se consideră perechile de numere (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), $x_1 < x_2 < x_3$, *ce satisfac relația* $ax + by = c$, *unde* $a \neq 0$ *și* $b \neq 0$. *Să se arate că:*

1. Dacă numerele x_1, x_2, x_3 *sînt în progresie aritmetică, atunci și numerele* y_1, y_2, y_3 *formează o progresie aritmetică și reciproc.*

2. Dacă $c \neq 0$ *și numerele* x_1, x_2, x_3 *sînt în progresie geometrică, atunci numerele* y_1, y_2, y_3 *nu pot fi nici în progresie aritmetică și nici în progresie geometrică.*

Craioveanu Mircea, student, Iași

Soluție dată de *Căpățînă Valeriu*, elev Roman.

1. În baza enunțului putem scrie

$$(1)\qquad \begin{aligned} ax_1 + by_1 &= c \\ ax_2 + by_2 &= c \\ ax_3 + by_3 &= c \end{aligned}$$

Dacă numerele x_1, x_2, x_3 sînt în progresie aritmetică, putem scrie

$$2x_2 = x_1 + x_3.$$

Dar în baza relațiilor (1) aceasta revine la

$$2\left(\frac{c}{a} - \frac{b}{a}y_2\right) = \frac{c}{a} - \frac{b}{a}y_1 + \frac{c}{a} - \frac{b}{a}y_2,$$

de unde rezultă

$$2y_2 = y_1 + y_3.$$

Analog se procedează pentru a dovedi afirmația reciprocă.

2. Presupunem că x_1, x_2, x_3 sînt în progresie geometrică adică că $x_2^2 = x_1x_3$. În baza relațiilor (1), aceasta se mai scrie

$$\left(\frac{c}{a} - \frac{b}{a}y_2\right)^2 = \left(\frac{c}{a} - \frac{b}{a}y_1\right)\left(\frac{c}{a} - \frac{b}{a}y_3\right),$$

de unde deducem că

$$-2bcy_2 + y_2^2b_2^2 = -bc(y_1 + y_3) + b^2y_1y_3 \tag{2}$$

Dacă am presupune prin absurd că y_1, y_2, y_3 ar forma, în ipotezele noastre o progresie aritmetică, atunci din (2) ar rezulta că

$$y_2^2 = y_1y_3 \quad (\text{căci } b \neq 0)$$

adică că numerele y_1, y_2, y_3 ar forma și o progresie geometrică.

Dar atunci rezultă că $y_1 = y_2 = y_3$ și în baza relațiilor (1) că $x_1 = x_2 = x_3$, absurd în baza ipotezei $x_1 < x_2 < x_3$.

Un raționament analog ne dovedește că y_1, y_2, y_3 nu pot forma (în aceleași ipoteze) o progresie geometrică, căci în caz contrar din (2) ar urma că $2y_2 = y_1 + y_3$ (căci $x \neq 0$), ceea ce n-ar fi posibil decît dacă $y_1 = y_2 = y_3$, adică $x_1 = x_2 = x_3$, absurd.

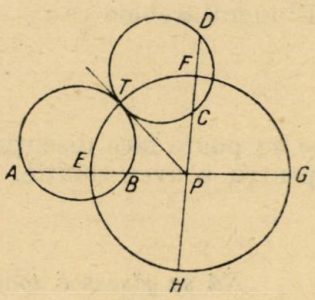
Dacă $c = 0$ din (2) rezultă imediat că și y_1, y_2, y_3 ar forma o progresie geometrică.

Problema 7023

Se consideră patrulaterul inscriptibil $ABCD$ fix și două cercuri (O_1) și (O_2) tangente în T, unul trecînd prin A și B celălalt prin C și D. Să se găsească locul geometric al punctului T cînd cercurile (O_1) și (O_2) variază :

Gh. Nanu și *D. Brînzei*, Iași

Soluția dată de *Frangu Octavian*, elev Brăila. Patrulaterul $ABCD$ fiind inscriptibil, punctul P de intersecție a lui AB și CD (dacă există) va verifica relația : $PA \cdot PB = PC \cdot PD$, deci se va afla pe axa radicală a cercurilor (O_1) și (O_2). Exprimînd puterea sa față de cercul O_1 obțin $PT^2 = PA \cdot PB = \text{const.}$, deci locul geometric căutat va fi un cerc cu centrul în P minus punctele sale de pe AB și CD.



Dacă dreptele AB și CD nu se întîlnesc, $ABCD$ trebuie să fie trapez isoscel, linia centrelor cercurilor (O_1) și (O_2) este axa de simetrie a trapezului și e invariabilă. În acest caz locul geometric este compus din toate punctele axei de simetrie a trapezului, exceptînd cele 2 puncte de intersecție cu laturile paralele AB și CD.

Problema 7025

Să se afle soluțiile ecuației

$$\frac{\cos^2 x - m}{\cos^2 \alpha - m} = -\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{tg} x$$

Nanu Gheorghe, Iași

Soluție dată de *Hîncu Marius*, elev Oradea Ecuația se mai scrie :

$$\frac{\cos^2 x - m}{\cos^2 \alpha - m} = -\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \text{ sau :}$$

$\sin\alpha \cos x(\cos^2 x - m) + \cos\alpha \sin x (\cos^2\alpha - m) = 0$ sau :
$\sin\alpha \cos^3 x + \sin x \cos^3\alpha - m(\sin\alpha \cos x + \cos\alpha \sin x) = 0$
$\sin\alpha \cos x (1 - \sin^2 x) + \sin x \cos\alpha (1 - \sin^2\alpha) - m\sin(\alpha + x) = 0$
$\sin(\alpha + x) - \sin x \sin\alpha (\cos x \sin x + \cos\alpha \sin\alpha) - m \sin(\alpha + x) = 0$
$\sin(\alpha + x) - m \sin(\alpha + x) - \frac{1}{2} \sin x \sin\alpha (\sin 2x + \sin 2\alpha) =$
$(1 - m) \sin(\alpha + x) - \sin x \sin\alpha \sin(x + \alpha) \cos(x - \alpha) = 0$
$\sin(\alpha + x) [(1 - m) - \sin x \sin\alpha \cos(x - \alpha)] = 0$

Deci ecuația inițială s-a redus la ecuațiile :

$$\sin(\alpha + x) = 0 \tag{1}$$

$$(1 - m) - \sin x \sin\alpha \cos(x - \alpha) = 0 \tag{2}$$

Ecuația (1) are drept soluție $x = k\pi - \alpha$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$

Ecuația (2) se mai scrie :

$$(1 - m) - \frac{1}{2} [\sin(2x - \alpha) + \sin\alpha] \sin\alpha = 0 \text{ și de aici}$$

$$\sin(2x - \alpha) = \frac{2(1 - m) - \sin^2\alpha}{\sin\alpha} \text{ și deci :}$$

$$x = k\pi + \frac{\alpha}{2} + \frac{(-1)^k}{2} \arcsin \frac{(1 - m) - \sin^2\alpha}{\sin\alpha} (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Evident trebuie ca :

$$\left| \frac{2(1 - m) - \sin^2\alpha}{\sin\alpha} \right| \leqslant 1$$

și se poate face discuția limitelor între care poate varia în funcție de m pentru a avea soluție.

Problema 7026

Să se găsească toate perechile de numere m,n nedivizibile cu 3 pentru care expresia $E = m^n + n^m$ să fie divizibilă cu 3. Pentru $m = 2$, să se găsească n, astfel încît expresia să se dividă prin 7.

Gh. Nanu, D. Brînzei, Iași

Soluție dată de *Lașiță Ileana*, elevă Sibiu. Perechea (m,n) trebuie să fie de forma $(3p + 1, 3q + 1)$, $(3p + 1, 3q + 2)$, $(3p + 2, 3q + 1)$, $(3q + 2, 3p + 2)$.

Voi folosi în cele ce urmează o consecință cunoscută a formulei binomului lui *Newton*: $(\mathfrak{M}p + a)^n = \mathfrak{M}p + a^n$.

$E(3p+1,\ 3q+1) = (3p+1)^{3q+1} + (3q+1)\,3^{p+1} = \mathfrak{M}3 + 1 + 1 \neq \mathfrak{M}3$

$E(3p+1, 3q+2) = (3p+1)^{3q+2} + (3q+2)^{3p+1} = \mathfrak{M}3 + 1 + 2^{3p+1}$

Trebuie deci ca $1 + 2^{3p+1}$ să se dividă prin 3, sau $1 + (-1)^{3p+1}$ să fie nul. Deci $p = 2r$.

Deci o primă soluție este $m = 6r + 1$, $n = 3q + 2$.

Analog obținem și soluția $m = 3p + 2$, $n = 6r + 1$.

Apoi: $E(3p+2),\ 3q+2) = (-1)^{3q+2}$, deci p și q trebuie să fie de parități diferite. De aici și celelalte soluții

$$m = 6p + 2,\ n = 6q + 5$$

$$n = 6p + 5,\ n = 6q + 2$$

În continuare trebuie să se considere $E(2,n) = 2^n + n^2$.

Considerăm primele puteri ale lui 2 : 2,4,8 = 7 + 1

Este natural să considerăm n de forma:

$$n = 3k,\ n = 3k + 1, n = 3k + 2.$$

$E(2,3k) = 8^k + (3k)^2 = \mathfrak{M}7 + 2k^2 + 1$. Considerînd k una din formele $7t$, $7t + 1$, $7t + 2$, $7t + 3$ se deduce că în nici un caz $2k^2+1$ nu este multiplu de 7. Considerăm acum

$$E(2,3k+1) = 2^{3k+1} + (3k+1)^2 = 2.8^k + 9k^2 + 6k + 1$$

$\mathfrak{M}7 + 2k^2 - k + 3 = \mathfrak{M}7 + (2k - 3)(k + 1)$, ceea ce arată că $2k - 3$ trebuie să fie multiplu de 7 de unde $k = 7p + 5$ sau $k + 1$ să fie multiplu de 7, de unde rezultă $k = 7p - 1$. Obținem deci soluțiile

$$n = 3(7p + 5) + 1 = 21p + 16$$

$$n = 3(7p - 1) + 1 = 21p - 2$$

Raționînd analog găsim

$E(2,3k + 2) = \mathfrak{M}7 + 2k^2 + k - 2$ și $2k^2 + k - 2$ se dovedește a nu fi divizibil prin 7.

Problema 7030

Se consideră ecuațiile

$$2x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$m(m-1)x^2 + 2(m^3 + m^2 + 1)x + m^3 + m + 1 = 0,$$

m fiind un număr real diferit de 0 și 1.

1) *Să se arate că cea de a doua ecuație admite rădăcini reale și distincte pentru orice valoare a lui m.*

2) *Să se determine valorile lui m pentru care între rădăcinile fiecăreia dintre ecuații se găsește o rădăcină a celeilalte ecuații.*

Cohal Traian, profesor, Iași

Soluția autorului.

1) Discriminantul ecuației este

$$\Delta = (m^3 + m^2 + 1)^2 - m(m-1)(m^3 + m + 1) =$$

$$= m^6 + m^5 + 2m^4 + m^3 + 2m^2 + m + 1 =$$

sau

$$= m^6 + m^5 + m^4 + m^4 + m^3 + m^2 + m^2 + m + 1 =$$

$$= (m^2 + m + 1)(m^4 + m^2 + 1)$$

Evident,

$$\Delta > 0 \text{ pentru orice } m.$$

2) Condiția pe care trebuie să o satisfacă coeficienții ecuațiilor $x^2 + ax + b = 0$, $c^2 + px + q = 0$ pentru ca între rădăcinile fiecăreia dintre ecuații să se găsească o rădăcină a celei de-a doua este

$$(b-q)^2 + (a-p)(aq - bp) < 0 \qquad (1)$$

Ținînd seama de condiția problemei pentru m avem:

$$a = 1, \quad b = -\frac{1}{2}$$

$$p = \frac{2(m^3 + m^2 + 1)}{m^2 - m}, \quad q = \frac{m^3 + m + 1}{m^2 - m}.$$

Înlocuind în (1) obținem:

$$\frac{2(2m^2 + m^2 + m + 2)(2m^3 + 2m + 1)}{(m^2 - m)^2} < 0,$$

sau

$$\frac{2(m+1)(2m^2 - m + 2)(m^3 + m + 1)}{(m^2 - m)^2} < 0.$$

Deoarece

$$2m^2 - m + 2 > 0, \quad (m^2 - m)^2 > 0$$

inecuația devine

$$(m+1)(m^3 + m + 1) < 0$$

Polinomul $m^3 + m + 1$ are o singură rădăcină reală situată în intervalul $(-1,0)$. Să notăm această rădăcină cu α.

Astfel polinomul $m^3 + m + 1$ poate fi scris ca produsul dintre $m - \alpha$ și un trinom de gradul al doilea, care este pozitiv pentru orice m.

Deci rezolvarea inecuației revine la

$$(m+1)(m - \alpha) < 0$$

De unde

$$-1 < m < \alpha.$$

Problema 7034

Un automobil pleacă din localitatea A spre localitatea B situată la distanța de L km. După o oră de mers cu viteza de 60 km/h are o pană și o repară în 20 de minute, după care pornește din nou cu viteza de 50 km/h și după 2 ore ajunge în orașul B. Cu 20 de minute mai devreme decît a plecat din A, un alt automobil pleacă din localitatea B spre A cu viteza de 75 km/h și ajunge într-o localitate C situată între B și A la 150 km de B. După ce încarcă niște lăzi timp de 30 minute se întoarce înapoi în B cu aceeași viteză. Se cere să se exprime distanța dintre cele 2 automobile ca funcție de timp și să se arate că această funcție este continuă, dar nu e derivabilă în toate punctele.

C. C. Ilioi, Iași

Soluție dată de *Cecilia Miulescu*, elevă Răcari

Din mersul primului automobil se deduce distanța între A și B egală cu $60 + 2.50 = 160$ km. Dacă luăm ca origine a timpului ora cînd al doilea pleacă din B și notăm cu $S(t)$ distanța între automobile, atunci

$$S(t) = L - 75\ t, \text{ pentru } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{3}$$

$$S(t) = L - 75\ t - 60\left(t - \frac{1}{3}\right) \text{ pentru } \frac{1}{3} \leqslant t \leqslant \frac{4}{3}$$

La momentul $t = \frac{4}{3}$, $S(t) = 0$, deci automobilele se întîlnesc. În continuare

$$S(t) = 75\left(t - \frac{4}{3}\right) \text{ pentru } \frac{4}{3} \leqslant t \leqslant \frac{5}{3}$$

La momentul $t = 2$ al doilea ajunge în C. Deci

$$S(t) = 75\left(t - \frac{4}{3}\right) + 50\left(t - \frac{5}{3}\right);\ \frac{5}{3} \leqslant t \leqslant 2,$$

$$S(t) = 75\left(2 - \frac{4}{3}\right) + 50\left(t - \frac{5}{3}\right);\ 2 \leqslant t \leqslant \frac{5}{2},$$

$$S(t) = 50 + 50\left(t - \frac{5}{3}\right)$$

Al doilea automobil se întoarce în B cu viteza de 75 km/oră, deci

$$S(t) = 50 + 50\left(t - \frac{5}{3}\right) - 75\left(t - \frac{5}{2}\right);\ \frac{5}{2} \leqslant t \leqslant \frac{11}{3},$$

pînă la momentul cînd primul ajunge în B. În fine

$$S(t) = 150 - 75\left(t - \frac{5}{2}\right);\ \frac{11}{3} \leqslant t \leqslant \frac{9}{2}$$

Cele 2 automobile se întîlnesc în B la momentul $t = \frac{9}{2}$.

Se verifică ușor că în punctele $t = \frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2, \frac{5}{2}, \frac{11}{3}$ funcția $S(t)$ este continuă dar nu este derivabilă.

Problema 7035

Se consideră în mulțimea R a numerelor reale, următoarea lege de compoziție :

$$a * b = e^{a+b}, \quad a \in R, \quad b \in R$$

a) *Această lege este definită pentru întreaga mulțime a numerelor reale? Este comutativă? Să se arate că în general această lege nu este asociativă.*

b) *Să se arate că oricare ar fi numerele reale a și c $(a<c)$ există totdeauna cel puțin un număr real b $(a < b < c)$ astfel încît*

$$(a * b') * c = a * (b' * c), \text{ unde } b' = -b.$$

De asemenea să se verifice că : $(a * b) * a = a * (b * a)$ oricare ar fi numerele reale a și b.

c) *Să se arate că pentru fiecare număr real pozitiv a) $(a>0)$ există un număr real negativ $\bar{a}$, astfel că $a * \bar{a} = a$.*

Să se dovedească apoi că orice număr real a are un invers a', $a * a' = 1$ și că $(a * b)' = -(a * b)$, $0' = 0$.

d) *Să se rezolve și să se discute ecuația $a * x = b$, în care a și b sînt două numere reale date.*

e) *Să se rezolve ecuația $x * 3 * x = e^{-2}$*

Mircea Craioveanu, student Iași

Soluția autorului.

a) Funcția e^x fiind definită pe întreaga mulțime a numerelor reale, legea de compoziție dată este definită pentru întreaga mulțime a numerelor reale. Această lege este comutativă, căci

$$a * b = e^{a+b} = e^{b+a} = b * a.$$

Considerînd trei numerele reale a, b, c relația

$(a * b) * c = a * (b * c)$ ce ar exprima asociativitatea legii de compoziție revine la

$$e^{e^{a+b}+c} = e^{a+e^{b+c}}, \text{ sau } e^{a+b} + c = a + e^{b+c} \qquad (1)$$

Or, în general (1) nu are loc oricare ar fi numerele reale a,b,c. Deci în general legea de compoziție nu este asociativă.

b) Fie două numere reale a și c, $a < c$. Să căutăm numere reale x pentru care

$(a * x) * c = a * (x * c)$. Dar aceasta după cum am văzut revine la (1) :

$e^{a+x} + c = a + e^{x+c}$, ceea ce este echivalent cu

$$e^x = \frac{e^a - e^c}{a - c} \qquad (2)$$

Dar în baza teoremei lui *Lagrange* rezultă că există cel puțin un punct b, $a < b < c$, astfel încît

$$\frac{e^a - e^c}{a - c} = e^b$$

În baza acestei relații (2) devine $e^{-x} = e^b$, adică $x = -b = b'$, ceea ce demonstrează afirmația făcută. Relația $(a * b) * a = a * (b * a)$ este adevărată, căci (1) se reduce în acest caz la $e^{a+b} + a = a + e^{b+a}$, ceea ce reprezintă o identitate. Aceeași relație rezultă și în baza comutativității legii de compoziție. În adevăr, putem scrie

$$(a * b) * a = a * (a * b) = a * (b * a),$$

Se poate folosi evident teorema lui *Rolle* în locul celei a lui *Lagrange*.

c) Considerăm numărul real a, $a > 0$ și să determinăm un număr real x astfel ca $a * x = a$, ceea ce în baza definiției legii de compoziție revine la

$$e^{a+x} = a,$$

de unde rezultă $x = \ln a - a$, unic determinat pentru fiecare $a > 0$.

Ținînd seama de inegalitatea $\ln a < a$, rezultă că $x < 0$. Găsirea inversului revine la determinarea unui număr real a astfel încît

$a * a' = 1$, adică $e^{a+a'} = 1$, de unde $a + a' = 0$, adică $a' = -a$. Așadar, orice număr real a admite un invers egal cu $-a$. În particular inversul numărului o va fi $0' = -0 = 0$. De asemenea în baza acestei observații rezultă că

$$(a * b)' = -e^{a+b} = -(a * b)$$

d) Ecuația $a * x = b$, revine la $e^{a+x} = b$. Pentru $b \leqslant 0$, această ecuație nu admite soluție. Pentru $b >$ o admite o soluție unică dată de

$$x = \ln b - a$$

e) În primul rînd să observăm că în baza celor arătate la b) avem $(x * 3) * x = x * (3 * x)$ oricare ar fi numărul real x, ceea ce permite scrierea în maniera $x * 3 * x$.

Ecuația $x * 3 * x = e^{-2}$ este echivalentă cu

$e^{x+e^{3+x}} = e^{-2}$ sau $e^{3+x} = -x - 2$, care admite evident soluția unică $x = -3$.

Problema 7038

Fie AB și CD doi diametri ficși perpendiculari ai unui cerc oarecare O și M un punct variabil pe același cerc. Notăm cu N piciorul perpendicularei din M pe AB. Dreapta ND și paralela din C la AB se taie în P.

Se cere locul geometric descris de punctul G, centrul de greutate al triunghiului MNP.

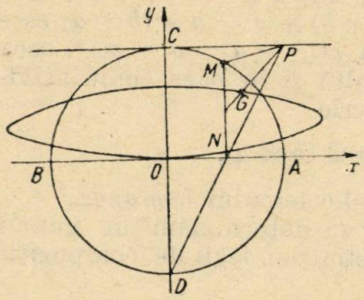
C. Săndulache, Negrești-Iași

Solutie dată de *V. Negruțiu* elev Oradea. Luînd cei doi diametri ca axe avem : $A(r,0)$; $B(-r, 0)$; $C(0,r)$ și $D(0,-r)$. Ecuația cercului : $x^2 + y^2 - r^2 = 0$.

Luăm $M(\alpha, \beta)$ deci $N(\alpha, 0)$. Ecuaţia dreptei ND este

$$y + r = \frac{rx}{\alpha}$$

Dacă introducem în această ecuaţie $y = r$ obţinem $P(2\alpha, r)$.



Ecuaţiile lui G sînt

$$x = \frac{4\alpha}{3}, \quad y = \frac{\beta + r}{3}$$

cu condiţia $\alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0$.

Eliminînd parametrii α şi β obţinem:

$$\alpha = \frac{3x}{4}; \quad \beta = 3y - r,$$

$$\frac{9x^2}{16} + (3y - r)^2 - r^2 = 0 \text{ sau } \frac{x^2}{\frac{13r^2}{9}} + \frac{\left(y - \frac{r}{3}\right)^2}{\frac{r^2}{9}} - 1 = 0$$

Locul căutat este o elipsă cu centrul în $\left(0, \frac{r}{3}\right)$ avînd ca semiaxe:

$a = \frac{4r}{3}$; $b = \frac{r}{3}$.

Problema 7039

Dacă $|a| > 1$ *să se demonstreze că*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{an + b}{a^n} = \frac{a^2 + ab - b}{(a-1)^2}$$

Mocanu H. Ovidiu, student, Iaşi

Soluţie dată de *Eleodor Popescu*, elev Tr. Severin,

Seria se poate scrie succesiv astfel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{an + b}{a^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{a^{n-1}} + \frac{b}{a^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a^{n-1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b}{a^n} =$$

$$= \left(1 + \frac{2}{a} + \frac{3}{a^2} + \frac{4}{a^3} + \ldots\right) + \frac{b}{a}\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \ldots\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \ldots + \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{a}} +$$

$$+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+\ldots+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+\ldots+\frac{1}{a^3}+\ldots=$$

$$=\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\ldots\right)+\frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\ldots\right)+\frac{1}{a^2}\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\ldots\right)+$$

$$+\frac{1}{a^3}\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\ldots\right)+\ldots+\frac{b}{a-1}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\ldots\right)\cdot\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\ldots\right)+\frac{b}{a-1}=$$

$$=\left(\frac{1}{1-\frac{1}{a}}\right)^2+\frac{b}{a-1}=\frac{a^2}{(a-1)^2}+\frac{b}{a-1}=\frac{a^2+ab-b}{(a-1)^2}.$$

Observație. Pentru cazul particular $a=2$, $b=-1$, obținem: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=3$, enunțul unei probleme apărute în G.M.F.(B) nr. 8, 1963.

Problema E : 2270

M-am născut în ultimul secol, în anul în care ultimele sale două cifre sînt una dublul celeilalte și alcătuiesc un număr de patru ori mai mare decît numărul lunii în care m-am născut. Știind că numărul lunii în care m-am născut este patratul zilei mele de naștere, să se afle ziua, luna și anul în care m-am născut.

Stelian Lambă, Constanța

Soluția autorului. Un an avînd 12 luni, înseamnă că m-am născut într-una din aceste luni, cu un anumit număr de ordine. Numărul lunii în care m-am născut fiind patratul zilei mele de naștere, reiese că dintre numerele de la 1 la 12 convin doar 4 și 9, ca fiind patrate perfecte. Deci, se pune întrebarea : m-am născut în luna a 4-a sau a 9-a?

Știind însă că ultimele două cifre din anul în care m-am născut sînt una dublul celeilalte și alcătuiesc un număr de 4 ori mai mare decît numărul lunii în care m-am născut, e ușor de văzut că m-am născut în luna a 9-a, deoarece $4\times4=16$ și $4\times9=36$.

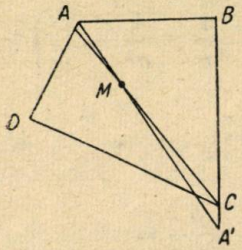
Rezultă în fine, că m-am născut la 3 septembrie 1936.

Problema E : 2342

Să se calculeze unghiul format de două bisectoare ale unghiurilor opuse ale unui patrulater oarecare, în funcție de unghiurile patrulaterului. Să se găsească în ce condiții bisectoarele sînt paralele și în ce caz ambele perechi de bisectoare sînt paralele.

Soluție dată de *Stan Mihai*, elev Petroșeni.

Am considerat bisectoarea AA' unde A' este pe BC și bisectoarea CM, unde M este pe AA'. Avem



$$\sphericalangle AA'B = 180° - B - \frac{A}{2},$$

$$\sphericalangle CMA' = \sphericalangle MCB - \sphericalangle AA'B,$$

deci

$$\sphericalangle CMA' = \frac{C}{2} - 180° + B + \frac{A}{2},$$

rezultă $\sphericalangle CMA' = \dfrac{B - D}{2}$.

Condiția ca cele două bisectoare să fie paralele este ca $\sphericalangle B = \sphericalangle D$.

Dacă și celelalte bisectoare sînt paralele, patrulaterul $ABCD$ va fi un paralelogram.

Problema E : 2348

Se dau cercurile O de rază r și O' de rază R. Se duce tangenta comună TT'. Fie A intersecția tangentei comune cu linia centrelor, iar B intersecția cercului de rază r cu OO'.

a) *Știind că $OO' = 2r$, să se arate că $\sphericalangle TAB = 30°$.*

b) *Aria $AT'O' = 2r^2\sqrt{3}$.*

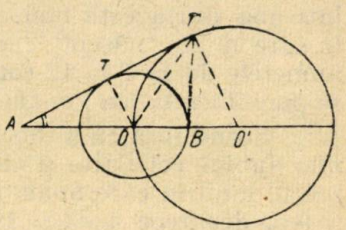
c) *$T'O' \cdot AT' = O'A \cdot T'B'$.*

G. V. Nistor, Buzău

Soluție dată de *Weiner Irina*, elevă București

a) Dacă $OO' = 2r$, rezultă că $R = 2r$. Triunghiurile ABO și $AT'O'$ sînt asemenea avînd A comun, raportul de asemănare fiind

$$\frac{OT}{O'T'} = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2},$$



deci

$$\frac{AO}{AO'} = \frac{1}{2} \text{ și } AO = OO' = R.$$

În triunghiul $AT'O'$, $T'O' = \dfrac{1}{2} AO'$,

rezultă $A = 30°$.

În triunghiul dreptunghic ATO', mediana $T'O = \dfrac{AO'}{2} = R$ și deci triunghiul TOO' este echilateral, iar $T'B$ este înălțime ($OB = BO'$).

$$T'B^2 = T'O'^2 - O'B^2$$

$$T'B = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{4r^2 - r^2} = \sqrt{3r^2}$$

$$T'B = r\sqrt{3}.$$

$$\text{Aria } AT'O' = \frac{AO' \cdot T'B}{2} = \frac{2R \cdot r\sqrt{3}}{2} = 2r \cdot r\sqrt{3} = 2r^2\sqrt{3}$$

Triunghiurile $AT'O'$ şi $T'BO'$ sînt asemenea ($BT'O' = A = 30°$). Scriem proporţionalitatea laturilor :

$$\frac{T'O'}{AO'} = \frac{T'B}{AT'} = \frac{BO'}{T'O'}.$$

Din primele două rapoarte rezultă

$$T'O' \cdot AT' = O'A \cdot T'B'$$

PREMIILE GAZETEI MATEMATICE SERIA B PE ANUL 1965

Pentru activitatea deosebită depusă de către evidenţiaţii publicaţi în volumul al XVI-lea (1965) al Gazetei matematice seria B, se acordă următoarele premii şi menţiuni.

PREMII

1. *Dăncilă Ion* (clasa XI. L. 3 Sibiu) ; 2. *Bîscă Octavian* (cl. XI. L. I. Craiova) ; 3. *Chiţescu Ion* (cl. XI. L. 10 Bucureşti) ; 4. *Popescu Eleodor* (cl. XI. L. 1 Tr. Severin) ; 5. *Popa I. Eugen* (cl. IX L. 3 Iaşi) ; 6. *Farkaş Petru* (cl. XI. L. 8 Cluj) ; 7. *Bucur Liliana* (cl. XI L. 3. Sibiu) ; 8. *Botez Dan* (cl. X. L. 17 Bucureşti), 9. *Manolache Nicolae* (cl. IX L. 5 Bucureşti), 10. *Voiculescu Dan* (cl. IX L. 21, Bucureşti), 11. *Perl Toma* (cl. XI L. 8 Cluj). 12. *Filipoiu Alexandru* (cl. XI L. 1 Buzău), 13. *Bena Dorin* (cl. XI L. 1. Caransebeş), 14. *Popovici Cornel* (cl. X L. 1 Timişoara) ; 15. *Lungulescu Bogdan Eugen* (cl. VIII L. 1 Piteşti), 16. *Stan Emil* (cl. X L. 2 Ploieşti), 17. *Radu Vasile* (cl. XI L. 2 Ploieşti), 18. *Orăşeanu Laurenţiu* (cl. IX L. 2 Ploieşti), 19. *Răduinea Nicolae Vasile* (cl. X L. 3 Constanţa), 20. *Weinstein Jack* (cl. XI L. 2 Rădăuţi), 21. *Oproescu Gabriel* (cl. XI L. 1 Ploieşti), 22. *Negruţiu Vasile* (cl. XI L. 1 Oradea), 23. *Niculescu Constantin* (cl. X L. 3 Tîrgovişte), 24. *Miulescu Cecilia* (cl. XI Răcari, Bucureşti), 25. *Poenaru Paraschiva* (cl. VIII Vlahi, Dobrogea), 26. *Frangu Octavian* (cl. XI L. 1 Brăila), 27. *Lău Gheorghe Dan* (cl. X L. C-lung Suceava), 28. *Hincu Marius* (cl. X L. 1 Oradea), 29. *Memetea Ovidiu* (cl. X. L. 1 Oradea), 30. *Ralescu Dan Andrei* (cl. IX L. 12 Bucureşti), 31. *Stănescu Dan* (cl. IX L. 1 Ploieşti), 32. *Pătra Cristian* (cl. VIII L. 1. Craiova), 33. *Rugină Andrei* (cl. IX L. Roman), 34. *Laşiţă Ileana* (cl. X L. 2 Sibiu), 35. *Geleriu Dan* (cl. XI L. 3. Sibiu), 36. *Brînda Rodica* (cl. XI L. 1 Cluj), 37. *Curcanu George* (cl. X L. 1. Tg. Jiu), 38. *Căpăţînă Ion* (cl. XI L. 1 Hunedoara), 39. *Ursulescu Octavian* (cl. XI. L. 11 Bucureşti), 40. *Sachelarie Dan* cl. IX L. 4 Ploieşti), 41. *Andrei Viorel* (cl. XI L. 1 Galaţi), 42. *Trif Nicolae* (cl. X L. 2 Sibiu), 43. *Vărtan Florin* (cl. X L. 2 Tîrgovişte), 44. *Căpăţînă Valeriu* (cl. X L. Roman), 45. *Aionesei Ioan* (cl. X L. Truşeşti), 46. *Almer David* (cl. X L. 17 Bucureşti), 47. *Marinov Corneliu* (cl. XI L. 4 Braşov), 48. *Alexandru Doru* (cl. IX. L. 1 Cîmpina), 49. *Pop E. Gheorghe* (cl. X, L. 1 Turda), 50. *Hărăguş Ştefan* (cl. IX L. 1 Lugoj), 51. *Lăzărescu Sorin Răducu* (cl. IX L. 13 Bucureşti), 52. *Cărbunaru Constantin*, student Bucureşti.

MENŢIUNI

1. *Cîrtoaje Vasile* (cl. X L. M. Breaza), 2. *Jurcă Ion* (cl. XI L. 1. Lugoj), 3. *Kivu Ileana* (cl. XI, L. 12 Bucureşti), 4. *Lăzărescu Vasile* (cl. XI L. 2 Brăila), 5. *Logofătu C. Bogdan* (cl. VIII L. 36 Bucureşti), 6. *Baltă D. Mihai* (cl. IX Stefăneşti-Botoşani), 7. *Bercovici Nelu* (cl. X L. Roman), 8. *Buşe C. Marcu* (cl. X L. Horezu-Argeş), 9. *Pestroiu Daniel* (cl. X L. 1 Tg. Jiu), 10. *Petrescu A. Ion* (cl. X L. 2 Craiova), 11. *Magda Radu* (cl. X. L. 3 Sibiu), 12. *Ghera Petru Ioan* (cl. XI L. 1 Lugoj), 13. *Pătruţ Popa Ion* (cl. XI Ineu), 14. *Badea Lori* (cl. X C. Ş. Bîrlad), 15. *Gheorghiu Doina Rodica* (cl IX L. 6 Bucureşti), 16. *Turculeţ Demostene*, cl. XI Truşeşti), 17. *Vasilescu Nicolae* (cl. X Pucioasa), 18. *Radu Luminiţa* (cl. XI L. 10 Bucureşti), 19. *Bîrlog Corneliu* (cl. XI, Pucioasa), 20. *Tonceanu Dan* (cl. X L. 11 Bucureşti), 21. *Cartianu Dan* (cl. X L. 12 Bucureşti), 22. *Nistorescu Constantin* (cl. X L. 3 Piteşti), 23. *Ioniţă Georgeta* (cl. VIII L. 39 Bucureşti), 24. *Arapu Bogdan* (cl. IX L. 13 Bucureşti), 25. *Sava Petru* (cl. IX L. Făget

Banat), 26. *Stan Mihai* (cl. VIII. L. Petroşeni), 27. *Vijelie Luminiţa* (clasa VII S. g. 169), 28. *Cojan Marius* (cl. X L. Buzău), 29. *Stancu Virgil* (cl. X L. 3 Tîrgovişte), 30. *Gheorghe Felicia* (cl. VIII L. 2 Craiova), 31. *Boşcaiu Voicu* (cl. IX L. 1, Arad), 32. *Cherciu Mihai* (c. X L. 3 Ploieşti), 33. *Ghiţulescu Dan* (cl. XI L. 3 Craiova), 34. *Gonciar Ştefan* (cl. XI;. Feteşti), *Mignea Arminius* (cl. IX L. 2 Ploieşti), 36. *Mîrza Mihai* (cl. XI Truşeşti), 37. *Georgescu George* (student Bucureşti), 38. *Cosmanciuc Dumitru* (cl. XI Truşeşti), 39. *Andrei Titus* (cl. XI Pătîrlagele) Bucureşti), 40. *Eremia Vasile* (cl. XI L. 3 Constanţa), 41. *Aron C. Constantin* (cl. XI Pucioasa), 42. *Mascan Marius* (cl. XI C-lung Suceava), 43. *Arcip Petre* (cl. XI Truşeşti), 44. *Filimon Hicolae* (cl. XI L. M. Breaza), 45. *Văleanu Vladimir* (cl. VII L. 28 Bucureşti), 46. *Turcu Ilie* (cl. IX L. 1 Craiova), 47. *Pascaru Aurel* (cl. IX. L. 11 Bucureşti), 48. *Sabău Ioan* (cl. IX L. 1 Baia Mare), 49. *Picol Gheorghe* (cl. VII Ştefăneşti Argeş), 50. *Ştefănescu Mircea* (cl. IX L. 1 Caransebeş), 51. *Mărculescu Corneliu* (cl X Pucioasa), 52. *Reghină Vasile* (cl. X L. 1 Ploieşti), 53. *Lutaşu Marius* (cl. X L. 11 Bucureşti), 54. *Sandu Darius* (cl. XI L. 1 Craiova), 55. *Bîrsan N. Dorel* (cl. X L. 1. Tg. Jiu), 56. *Vrînceanu Vasile* (cl. XI L. 1 Ploieşti), 57. *Pavel C. Dumitru* (cl. XI Pătîrlagele), 58. *Simion Gheorghe* (cl. XI L. 1 Ploieşti), 59. *Vlăsceanu Stan* (cl. X Oltenița), 60. *Vişan Ştefan* (cl. X L. 2 Ploieşti), 61. *Zăgan Dumitru*, (cl. X L. 2 Sibiu), 62. *Sergiescu Vlad* (cl. IX L. 22 Bucureşti), 63. *Băluţă Constantin* (cl. X Filiaşi, Oltenia).

★

Evidenţiaţii de mai sus, premiaţi sau menţionaţi ca rezolvitori de probleme în anul 1965, care nu ne-au trimis adresa lor exactă, sînt rugaţi să ne comunice pe o carte poştală (nu plic) adresa lor actuală, indicînd şi numărul de ordine din prezenta listă a premiilor, pentru a li se trimite pachetul cu cărţi sau reviste acordate ca premii.

CHESTIUNI DE EXAMEN

Probleme date la examenul de admitere la Universitatea din Tokio în 1964

La facultatea de ştiinţe Etapa I — aprox. o oră.

7355. 1. Pentru ca funcţia $f(x) = |x-1| + |x-2| + |x-a|$ să ia valoarea minimă în punctul $x = a$ este necesar şi suficient ca* $\overline{|(1)|} \leqslant a \leqslant \overline{|(2)|}$. Atunci valoarea minimă este $\overline{|(3)|}$ şi $f(0) + f(3) = \overline{|(4)|}$.

2. Centrul de greutate G al ΔABC este în originea coordonatelor. A are coordonatele $\left(\frac{2}{3},0\right)$ iar B coordonatele $\left(\frac{1}{3},1\right)$, Atunci ordonata lui C este $\overline{|(5)|}$. După o rotaţie de 60° a triunghiului ABC în sens direct în jurul originii, punctul C ocupă poziţia C' a cărei ordonată este $\overline{|(6)|}$. Ordonata centrului cercului circumscris triunghiului ABC este $\overline{|(7)|}$ şi aria ΔABC este $\overline{|(8)|}$.

7356. 3. Funcţia $f(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) - \cos x$ definită în $0 \leqslant x \leqslant 2$ ia valoarea maximă în $x = \overline{|(9)|}\,\pi$ şi această valoare maximă este $\overline{|(10)|}$; valoarea minimă este luată în $x = \overline{|(11)|}\,\pi$ şi este egală cu $\overline{|(12)|}$.

7357. 4. O semidreaptă AX care pleacă din A se roteşte în sens direct în jurul lui A cu o viteză unghiulară pozitivă de $\frac{\pi}{6}$ pe secundă iar o rază BY care pleacă din B se roteşte în jurul lui B cu o viteză unghiulară negativă de $\frac{\pi}{12}$ pe secundă. Punctele A, B sînt la distanţa R. La momentul $t = 0$, AX coincide cu AB şi BY cu BA. După t_0 secunde Ax şi BY devin pentru prima dată paralele. Atunci $t_0 = \overline{|(13)|}$ pentru $0 < t < t_0$, AX şi BY se intersectează în P_t.

---

* În loc de chenar unde este numărul întrebării, se va trece rezultatul; iar justificarea se va face separat. Se primesc soluţii pînă la 15 iunie 1966.

Fie $f(t)$ distanța între A și P_t. Atunci

$$f(t) = \frac{1}{\overline{|(14)|}\cos \overline{|(15)|}\pi t + \overline{|(16)|}}, \quad \overline{|(15)|} > 0$$

7358. 5. În (1), (2), (3) x, y sînt numere reale. Să se completeze în $\overline{|\quad|}$ literele a, b, c, d, conform sensului de mai jos:

(1) Este $\overline{|(17)|}$ ca $x + y$ și xy să fie întregi pentru ca x și y să fie întregi.

(2) Este $\overline{|(18)|}$ ca $x + y > 2$ și $xy > 1$ pentru ca $x > 1$ și $y > 1$

(3) Este $\overline{|(19)|}$ ca $x = y = 0$ pentru ca $x^2 + y^2 = 0$

(4) Fie x, y numere complexe. Atunci este $\overline{|(20)|}$ ca $x = y = 0$ pentru ca $x^2 + y^2 = 0$.

a) necesar și suficient; b) necesar dar nu suficient; c) suficient dar nu necesar; d) nici necesar nici suficient.

La facultatea de litere. Etapa I

7359. 1. Funcția $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x + 1$ ia valoarea maximă în $x = \overline{|(1)|}$, și cea minimă în $x = \overline{|(2)|}$. Ecuația $f(x) = a$ are trei rădăcini reale cînd $\overline{|(3)|} < a < \overline{|(4)|}$,

7360. 2. Dacă ΔABC are proprietățile: (1) $\sphericalangle BAC = 120°$ (2) $AB > AC$, (3) $BC = \sqrt{21}$ (4) aria $ABC = \sqrt{3}$ atunci $AB = \overline{|(5)|}$, $AC = \overline{|(6)|}$ și raza cercului înscris este $\frac{1}{2}\sqrt{\overline{|(7)|}\left(\overline{|(8)|} - \sqrt{21}\right)}$.

7361. 3. $ABCDEF$ este un exagon în plan cu $\sphericalangle A = 100°$. Laturile sale AB, BC, CD, DE, EG sînt pe dreptele cu ecuațiile $3x - y = 1$, $x + y = 4$, $y = 1$, $\alpha x - y = 14$, $x = 6$ $x + \alpha y = \beta$. Atunci

$$\sphericalangle B = \overline{|(9)|}, \ \sphericalangle C = \overline{|(10)|}, \ \sphericalangle D = \overline{|(11)|}, \ \sphericalangle E = \overline{|(12)|}, \ \sphericalangle F = \overline{|(13)|}.$$

7362 4. $f(x)$ este un polinom cu proprietățile

(1) $f(0) = -4$, (2) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x + a} = 2$, (3) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{f(x)}{x + a} = b$ există și este diferită de 0 și ∞ (a este o constantă).

Atunci gradul lui $f(x)$ este $\overline{|(14)|}$, coeficientul lui x în $f(x)$ este $\overline{|(15)|}$, $a = \overline{|(16)|}$, $b = \overline{|(17)|}$

7363. 5. Să considerăm următoarele trei propoziții:

(A) dacă $3x + 4y \geqslant a$, atunci $x^2 + y^2 \geqslant 1$,

(B) dacă $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $3x + 4y \leqslant b$ atunci $x^2 + y^2 \leqslant 1$,

(C) dacă $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $3x + 4y \geqslant 0$ atunci $x + y \geqslant 1$.

atunci

Valoarea minimă a lui a pentru care (A) are loc este $\overline{|(18)|}$,

Valoarea maximă a lui b pentru care (B) are loc este $\overline{|(19)|}$,

Valoarea minimă a lui c pentru care (C) are loc este $\overline{|(20)|}$.

Etapa II (aprox. $2\frac{1}{2}$ ore).

7364. 1. a, b, c numere diferite x. y. z rădăcinile sistemului

$$x + ay + a^2 z = a^3$$
$$x + by + b^2 z = b^3$$
$$x + cy + c^2 z = c^3$$

Să se exprime $a^3 + b^3 + c^3$ în funcție de x, y, z.

7365. 2. Se consideră curbele $y = x^2(1)$, $y = 3x^2 + 24\ x + 50$ (2).

Să se găsească coordonatele (α, β) ale punctelor P cu proprietăţile că pentru orice punct de pe curba (1) punctul B pe segmentul PA cu $\frac{PB}{PA} = \frac{m}{n}$ este pe curba (2). Să se găsească valoarea lui $\frac{m}{n}$.

7366, 3. V-$ABCD$ este o piramidă cu vîrful V şi baza $ABCD$ un pătrat. Toate feţele sînt triunghiuri isoscele cu baza 20 cm şi înălţimea 40 cm. Fie P un punct pe VA cu $\frac{VA}{AP} = \frac{3}{1}$. Să se găsească aria secţiunii piramidei cu planul care trece prin P, B, C.

7367. 4. Fie $A_1A_2A_3A_4$ un patrulater cu vîrfurile $A_1(0,0)$, $A_2(1, 0)$, $A_3(2, 2)$, $A_4(0,2)$. Fie P_1 mijlocul lui P_4A_4 P_2 mijlocul lui P_1A_1. P_3 mijlocul lui P_2A_2, P_4 mijlocul lui P_3A_3. Să se găsească coordonatele punctelor P_1, P_2, P_3, P_4 şi aria lui $P_1P_2P_3P_4$.

7368. 5. Fie $P(a, b)$ un punct pe $xy = 1$ în primul cadran şi Q un punct mobil pe aceeaşi curbă în cadranul trei.

(1) Să se exprime lungimea minimă a segmentului PQ în funcţie de a

(2) Să se găsească valoarea lui a astfel încît segmentul PQ de lungime minimă să facă un unghi de 30° cu direcţia pozitivă a axei Ox.

7369. 6. Presupunem că $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ satisface condiţiile

(1) $f(1) = 4$

(2) $f(x) \geqslant 0$ pentru $x \geqslant 0$

Să se găsească valorile lui a, b pentru care $\int_0^1 f(x)dx$ este maximă şi valorile pentru care integrala e minimă [1].

7370. 5′. Fie AQ intersecţiile axei Ox cu curba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \neq 0)$ şi cu tangenta în $P(x, y)$. Să se găsească

$$\lim_{x \to 0} \frac{(AQ)^2}{(AP)^2} \quad \text{şi} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{(AQ)^2}{(AP)^2}.$$

Probleme date la admiterea în facultatea de matematică-mecanică a Universităţii A. I. Cuza, Iaşi, 1965.

7371. Se dă expresia $E(x, y) = x^2 - xy + y^2 - y + 1$.

a) Să se arate că $E(x, y) < 0$ oricare ar fi x şi y reali.

b) Dintre toate valorile pe care le ia expresia pentru x şi y variabili există una care este cea mai mică. Să se afle această valoare.

c) Să se arate că există două numere reale a, b încît

$$E(x, y) = E(2a - x\,;\ 2b - y)$$

oricare ar fi x, y reali.

d) Să se rezolve ecuaţia $E(\sin \alpha, \cos\alpha) = 1 + \sin^2\alpha$.

7372. Se consideră sistemul:

$$x + y + z = 3(\sin^2 \alpha + 4)$$
$$-x + z = 4 \cos \alpha$$
$$x - 2y + z = 0$$

a) Să se calculeze soluţia (x, y, z) a sistemului.

b) Să se observe că numerele x, y, z obţinute la a) sînt în progresie aritmetică şi să se calculeze suma primilor 20 de termeni ai acestei progresii.

c) Să se determine parametrul α aşa că suma pătratelor numerelor x, y, z obţinute în soluţia sistemului dat, să fie egală cu 75.

---

[1] La Facultatea de litere primele 4 probleme comune apoi problema 5′

d) Să se determine parametrul α aşa ca raportul dintre x şi z să fie mai mare sau egal cu 1 ($x/z \geqslant 1$).

7373. Se consideră sistemul:

$$ax + 2y = 3,$$
$$3x + 4y = 5,$$

unde a este un parametru real. Se cere:

a) Să se rezolve sistemul.

b) Notînd cu (x_1, y_1) soluţia obţinută, să se determine valorile lui a, astfel ca numerele x_1, y_1, $x^2_1 + y^2_1$ să fie în progresie aritmetică.

c) Să se rezolve ecuaţia $\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right) = x_0$, unde x_0 este valoarea lui x_1, pentru $a = 1$.

7374. Fie ecuaţia: $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Dacă rădăcinile acestei ecuaţii sînt în progresie aritmetică să se arate că:

a) Raţia este dată de formula $r = \pm \frac{1}{10}\sqrt{15\ a^2 - 40\ b}$;

b) Cei doi termeni extremi sînt rădăcinile ecuaţiei

$$40\ x^2 + 20\ ax - 11\ a^2 + 36\ b = 0$$

iar cei doi termeni de la mijloc rădăcinile ecuaţiei

$$40\ x^2 + 20\ ax + a^2 + 4b = 0.$$

7375. Să se determine unghiul α pentru care expresia:

a) $F = (\cos\alpha - i\sin\alpha)(\cos 5\alpha + i\sin 5\alpha)$

are valoare reală.

b) Să se arate că expresia:

$$E = \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{(1 - \sin x)(1 - \cos x)}{\sin x \cos x}$$

nu depinde de x.

7376. Se consideră trinomul $E = x^2 + 2(m - 4)x + m^2 + 6m$ şi se cere:

a) Să se discute rădăcinile trinomului, cînd m variază de la $-\infty$ la $+\infty$.

b) Să se găsească valorile lui m pentru care $\log E$ are sens, oricare ar fi x.

c) Să se determine m astfel ca o rădăcină a trinomului să fie $\cos\frac{5\pi}{5}$

7377. Să se rezolve sistemul

$$\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y = -2\sqrt{3}$$
$$\operatorname{cotg}x + \operatorname{cotg}y = 2\sqrt{3}$$

7378. Se consideră polinomul $P(x) = 2x^2 + 6x + 3 - \alpha(x^2 + 1)$, unde α este un parametru real. Se cere:

a) Să se determine α astfel ca $P(x)$ să fie un patrat perfect.

b) Să se calculeze $E = x_1^3 + x_2^3$, unde x_1, x_2 sînt rădăcinile ecuaţiei $P(x) = 0$, fără a rezolva ecuaţia.

c) Ce valori poate lua parametrul α pentru ca $E < 0$

7379. Să se verifice identităţile:

$$\frac{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x - 1} = \frac{2}{3},$$

$$\cos^2 2\alpha + \cos^2(\alpha - \beta) - 2\cos(\alpha - \beta)\cos(\alpha + \beta)\cos^2\alpha = \sin^2(\alpha + \beta)$$

7380. Se consideră un triunghi dreptunghic ABC, cu catetele $AB = c$ şi $AC = b$ situate pe axele de coordonate.

a) Să se scrie ecuația cercului circumscris acestui triunghi și a tangentei la cerc în B.

b) Prin B și C se construiesc perpendicularele d_1 și d_2 respectiv pe AB și AC, iar pe d_1 și d_2, punctele B' și C' astfel ca $\sphericalangle B'AC' \equiv \sphericalangle BAC$. Se cere:

1° Să se arate că triunghiurile BAB', CAC' sînt asemenea și triunghiurile ABC, $AB'C'$ sînt asemenea.

2° Să se arate că relațiile de mai sus sînt adevărate și în cazul cînd triunghiul ABC este oarecare; de asemenea și în cazul cînd triunghiul ABC este oarecare, iar dreptele d_1 și d_2 formează cu dreaptele AB, respectiv AC, unghiuri oarecare egale între ele.

3° Notînd prin V, V_1, V_2 volumele generate prin rotația succesivă a triunghiului dreptunghic ABC în jurul ipotenuzei, respectiv fiecărei catete, să se arate că există relația:

$$\frac{1}{V^2} = \frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2}$$

7381. Fie trapezul dreptunghic $OBAC$, cu baza mare $OA = a$, înălțimea $OC = c$ și unghiul $A = 60°$. Bisectoarea unghiului B taie dreptele OC și OA respectiv în D și E. Paralela prin E la AB taie dreapta BC în F, iar dreapta dusă prin D simetric cu DO în raport cu DE taie pe EF în G. Se cere:

a) Să se demonstreze că patrulaterul $FABF$ este un romb.

b) Să se arate că $|GD \pm DC| = OC$, (după cum D este pe segmentul OC sau pe prelungirea lui).

c) Să se calculeze volumul solidului obținut prin rotirea patrulaterului $OABD$ în jurul lui OD.

d) Să se scrie ecuația parabolei raportată la axa de simetrie și la OC ca tangentă la vîrf, avînd focarul în A. Să se găsească punctele de intersecție ale parabolei cu dreapta AB.

7382. Un mobil parcurge 35 m coborînd în lungul unui plan înclinat. Care a fost durata parcurgerii traiectoriei știind că proiecția orizontală a drumului parcurs este de 21 m și coeficientul de frecare la înaintare este de 0,2.

7383. Să se determine distanța la care trebuie așezate două lentile convergente identice, cu distanțele focale 8 cm, pentru ca mărimea imaginii data de cea de-a doua lentilă să fie reală și de două ori mai mare ca obiectul aflat față de prima lentilă la distanța de 40 cm.

7384. Pe axa optica a unei lentile convergente, la 150 cm de lentilă se află un obiect luminos. Lentila este construită din sticla cu indicele de refracție $n = 1{,}5$. Razele de curbură ale celor două suprafețe convexe sînt egale între ele și egale cu 50 cm. Se cere să se determine:

a) Distanța focală a lentilei; b) locul unde se formează imaginea obiectului.

7385. Un mobil are viteza inițială de 2 000 cm/s și o accelerație de frînare de 50 cm/s^2. După cît timp viteza lui se reduce la jumătate Dar la zero? Care sînt spațiile parcurse de mobil, din cele două cazuri?

★

7386. a) Să se reprezinte grafic $y = x^3 - 3x^2 - 1$. Să se arate că această curbă admite un centru de simetrie.

b) Să se discute grafic numărul rădăcinilor ecuației $x^3 - 3x^2 - (1 + m) = 0$.

Bacalaureat Cambodgia, 1964

7387. Un comitet este format din 11 membri. În cîte feluri se pot alege dintre acești 11 membri, un președinte, un vice-președinte și un secretar?

În cîte feluri se pot alege 3 membri dintre cei 11, fără să se țină seamă de funcțiunile pe care acești 3 membri le vor îndeplini?

Bacalaureat Cambodgia 1964

7388. Un corp cu temperatura inițială de 100°C este așezat într-o incintă cu temperatură constantă de 10°C. Se presupune că legea răcirii corpului în funcție de timp este dată de formula $\theta = 10 + k\left(\frac{2}{3}\right)^{t/5}$, în care θ este temperatura corpului în grade Celsius și t timpul în minute.

a) Să se calculeze constanta k.

b) Să se calculeze temperatura corpului după 5 minute.

c) Să se calculeze timpul necesar pentru ca temperatura corpului să ajungă la 50°C, 36°C. (Dacă va fi necesar se va calcula cu aproximație de 1 minut prin lipsă.)

Bacalaureat Dakar, 1964

7389. Să se determine a, b, c astfel ca

$$F(x) = (ax^2 + bx + c)\cdot\sqrt{3 - 2x}$$

să fie o primitivă a lui $f(x) = x\sqrt{3-2x}$.

Pentru $0 < x < \frac{3}{2}$ funcția $f(x)$ ia valori pozitive. Care este aria limitată prin curba sa reprezentativă și axa absciselor între punctele de abscise 0 și $\frac{3}{2}$?

Bacalaureat Dakar, 1964

7390. a) — Se dă funcția

$$y = \frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin 2x}}.$$

Să se calculeze derivata și să se folosească această derivată pentru studiul variațiilor și reprezentarea grafică a lui y, cînd x variază de la 0 la 2π.

7391. b) Să se rezolve inecuația $\sin x - \sqrt{3}\cos x > 2$.

7392. c) O urnă conține 2 bile albe, 1 bilă neagră, 7 bile roșii. Se scot succesiv două bile din urnă. Care este probabilitatea de a extrage o bilă neagră și o bilă albă, oricare ar fi ordinea extragerii bilelor, prima bilă trasă nefiind repusă în urnă înainte de scoaterea celei de-a doua.

Bacalaureat Maroc, 1963

7393. Un sac conține 7 bile albe, 5 roșii, 3 albastre. Care este probabilitatea în proba care consistă din scoaterea simultană a 3 bile :

a) de a scoate 3 bile de culori diferite ; b) de a scoate 3 bile dintre care cel puțin două sînt roșii ; c) de a scoate măcar una albă din cele trei.

Bacalaureat Tahiti, 1963

7394. Să se studieze și să se reprezinte grafic în axe ortonormate variația funcției $y = \log \sin x$.

Bacalaureat Tahiti, 1963

7395. a) Să se găsească expresia generală a cuplurilor de numere întregi (x,y) care verifică ecuația $5x - 3y = 0$.

b) După determinarea unui cuplu particular de numere întregi verificînd ecuația $5x - 3y = 1$, să se găsească expresia generală a cuplurilor de numere întregi (x,y) care verifică această ecuație.

Subiect tip bacalaureat, Franța 1964

7396. Să se studieze variația funcției

$$y = \log |x^2 - 4x + 1|.$$

Să se traseze curba reprezentativă. (Se va preciza alura ramurilor infinite, punctele curbei situate pe axa x-ilor, precum și tangenta în fiecare din aceste puncte.)

Subiect tip, bacalaureat, Franța 1964

PROBLEME PROPUSE *)

7397. Numărul laturilor unui poligon convex este de 7 ori mai mic decît numărul tuturor diagonalelor sale.

Un al doilea poligon are cu 15 diagonale mai puțin.

Să se afle numărul laturilor și al tuturor diagonalelor la ambele poligoane convexe.

Bîrzan Romanel, Cluj

7398. Să se rezolve în numere naturale ecuația

$$3(x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + yz + zx) + 4(x - y - 3z + 5) = 0$$

Patre Farkaș, elev Cluj

7399. Se înscrie într-un cerc un triunghi oarecare ABC. Mediana AA' întîlnește cercul în M. Să se deducă relația

$$\frac{AB^2 + AC^2}{AB \cdot AC} = \frac{BM^2 + CM^2}{BM \cdot CM}.$$

Perl Toma, absolvent Cluj

7400. Să se rezolve sistemul:

$$(x + 1)(y^2 + y + x) + x^2y(y + 1) = 0$$
$$(y + 1)(z^2 + z + y) + y^2z(z + 1) = 3$$
$$(z + 1)(x^2 + x + z) + z^2x(x + 1) = 15$$

Perl Toma, elev Cluj

7401. Se dă un cerc (O) și un punct A exterior. Prin A se duce o dreaptă variabilă (D) ce taie (O) în P și Q.

Tangentele în P și Q se taie în R. Să se arate că cercurile PQR formează un fascicul.

Andrei Heilper, elev Cluj

7402. Să se găsească toate numerele naturale pentru care n^3+n^2+n+1 se divide cu 5.

Să se demonstreze că $E = 9^k + (-1)^{k+1}$ se divide cu 5.

Petre Farkaș, elev Cluj

7403. Să se rezolve ecuația

$$\log_a x + \log_b x + \log_c x = \frac{22}{3},$$

știind că bazele a, b, c sînt în progresie geometrică, produsul celor trei baze fiind 512, iar pătratul lui b este medie armonică între $12a\sqrt{2}$ și $3c\sqrt{2}$.

P. Dumitreasa, profesor Cluj

---

*) IX (7397—7401); X (7402—7408); XI (7409—7415); S (7416—7422). Soluțiile se primesc pînă la 15 iunie 1966.

7404. Să se găsească toate soluțiile în numere naturale ale ecuației

$$x^2 + xy = z^2$$

F. Kacso, student Cluj

7405. Să se demonstreze că numărul

$$N = 2^{1965} + 11$$

este divizibil cu 43.

F. Kacso, student Cluj

7406. Din punctul A al unui cerc se iau de o parte și de alta arcele $AM = 2\alpha$ și $AN = \alpha$. Să se determine valoarea lui α pentru care aria triunghiului MAN este maximă.

Mihai Aciu, elev Cluj

7407. Să se arate că pentru ca ecuația

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

să aibă rădăcinile reale și pozitive, este necesară condiția

$$(-1)^n a_k a_{n-1} \geqslant (-1)^n n^2 a_0 a_n .$$

D. Acu, student Cluj

7408. Să se rezolve ecuațiile

$$\sum_{k=1}^{n} \sin^3(a + kx) = \frac{-\sin 3\left(a + \frac{n+1}{2} x\right) \sin \frac{3nx}{2}}{4 \sin \frac{3x}{2}},$$

$$\sum_{k=1}^{n} \cos^3(a + kx) = \frac{\cos 3\left(a + \frac{n+1}{2} x\right) \sin \frac{3nx}{2}}{4 \sin \frac{3x}{2}}.$$

(Generalizarea problemei nr. 6556).

Gheorghe E. Pop, absolvent Turda

7409. Se dă un cerc (C) și o dreaptă (D) tangentă cercului. Se consideră familia de cercuri (Γ) care au proprietatea că sînt tangente simultan atît cercului (C) cît și dreptei (D). Se cere locul geometric al centrelor cercurilor din familia (Γ).

M. Cisłelecan, student Cluj

7410. Se dă șirul

$$1, 4, 11, 22, 37, 56, \ldots$$

și se cere:

a) Să se scrie expresia termenului general și să se afle suma primilor săi n termeni.

b) Notînd cu a_k termenul de rang k să se determine k astfel ca să avem

$$\frac{3a_k - 5}{a_{k+3}} = \frac{3a_{k+1} + 4}{a_{k+5}}$$

Perl Toma, elev Cluj

7411. Se dă o elipsă (E) și un punct P în planul ei. Se duc dreptele PA și PB unde A și B sînt extremitățile axei mari. Dreptele PA și PB taie elipsa a doua oară în R și S. Dreptele RB și AS se taie în Q. Să se arate că punctul Q se află pe perpendiculara din P pe AB.

* * *

7412. Se consideră elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ și se notează cu A și A' cele 2 vîrfuri ale axei mari. O dreaptă variabilă ce trece prin A întîlnește elipsa în P și tangenta la elipsă în A' în punctul Q. Să se găsească locul geometric al punctului S de pe dreaptă pentru care punctele A,P,Q și S formează o diviziune armonică.

Cornel Mild, elev Cluj

7413. Să se rezolve inegalitatea

$$|x^2 - x - 2| \geqslant \left|\frac{1}{x+1}\right| + x^2 + 1$$

Stoian Ion, Cluj

7414. Se consideră o elipsă și în planul ei un punct fix M. O dreaptă variabilă ce trece prin M întîlnește elipsa în P și Q.

a) Să se afle locul geometric al intersecției tangentelor la elipsă în P și Q.

b) Dacă O este centrul elipsei să se găsească locul geometric al baricentrului triunghiului OPQ.

Cornel Mild, elev Cluj

7415. Se dă parabola $y^2 = 2px$ și un punct M variabil pe ea. Se consideră cele două cercuri care sînt tangente simultan atît axei Ox cît și parabolei în M. Să se arate că ordonata punctului M este media armonică a razelor celor două cercuri.

M. Cistelecan, student Cluj

7416. Dacă avem n numere pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n$, atunci

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \leqslant \ln \frac{e^{a_1} + e^{a_2} + \ldots + e^{a_n}}{n}$$

* * *

7417. Se dă un punct, o dreaptă și un plan.

a) Să se construiască un romb care să aibă un vîrf în acel punct, alt vîrf pe dreaptă și o latură conținută în planul dat.

b) Se cere locul geometric al intersecțiilor diagonalelor rombului.

c) Să se studieze cazurile cînd rombul este un pătrat.

Mihai Aciu, elev Cluj

7418. Să se arate că dacă $x > 0$, avem

$$\frac{x}{x+2} + \frac{x+2}{x} - \sqrt{4 + \left(\frac{x}{x+2} - \frac{x+2}{x}\right)^2} = 0$$

iar dacă $x < 0$, avem:

$$\frac{x}{x+1} + \frac{x+2}{x} + \sqrt{4 + \left(\frac{x}{x+2} - \frac{x+2}{x}\right)^2} = 0$$

C. Ionescu-Țiu

7419. Într-o mulțime $\mathcal{M}$ se definește o lege de compunere internă, notată $*$ asociativă și necomutativă.

Să se demonstreze că dacă există un element e, neutru la dreapta și fiecare element $a \in \mathcal{M}$, are un element simetric la dreapta a', astfel ca $a * a' = e$, atunci există același element neutru e și la stînga și fiecare element posedă același simetric și la stînga.

Enunț analog, dacă se presupune existența unui element neutru la stînga și a unui simetric la dreapta sau existența unui element neutru la dreapta și a unui simetric la stînga.

Corneliu N. Popescu, București

7420. Se dau în același plan două cercuri nesecante de raze r_1 și r_2 avînd centrele la distanța a. Să se afle polul axei radicale a acestor două cercuri față de cercul tangent exterior și polul față de cercul tangent interior cercurilor date. Se cere și o construcție grafică.

C. Ionescu-Țiu

7421. Să se reprezinte grafic funcțiile

$$x - y + 1 = \sqrt{x + y + 1 - 2xy}$$

$$x + y - 1 = \sqrt{x + y + 1 + 2xy}$$

D. I. Manolache, profesor C. de Argeș

7422. Să se rezolve ecuațiile:

$$\left|1 + \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right| \pm \left|1 - \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right| = \frac{3}{2}.$$

C. Ionescu-Țiu

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE PENTRU CLASELE V—VIII *

E : 2450. Un pionier trebuie să facă un drum. Mergînd pe bicicletă, în prima oră a parcurs mai puțin cu 1 km din jumătatea drumului. În a doua oră, face $\frac{5}{7}$ din drumul rămas și încă 1 km și mai rămîn de făcut 3 km. De cîți km a fost drumul?

La admitere în clasa IX-a Brașov, 1965

E : 2451. Să se arate că fiecare zi a săptămînii apare cel puțin odată, la începutul fiecărei luni a anului.

Cunoscînd pe ce zi cade 1 ianuarie, să se afle denumirea zilei care apare de cele mai multe ori la începutul lunilor anului.

Perl Toma, elev Cluj

E : 2452. Pentru acțiunile social culturale la noi în țară s-a cheltuit în medie pentru o familie alcătuită din patru persoane în anul 1959 de trei ori mai mult decît în anul 1950, iar în anul 1963 cu 3120 lei mai mult decît în anul 1950.

Raportul dintre sumele cheltuite în anii 1959 și 1963 este egal cu $\frac{33}{50}$.

Să se afle sumele cheltuite în anii 1950, 1959 și 1963 pentru o familie compusă din patru persoane.

Viorel Arimescu, profesor Deva

E : 2453. Două brigăzi de tractoare ară un teren în 3 zile. În prima zi ară $\frac{3}{8}$ din suprafață, a doua zi $\frac{1}{2}$ din rest, ceea ce înseamnă cu 14 ha mai puțin ca în prima zi. Cît au arat în fiecare zi și ce suprafață au arat în cele 3 zile.

Nelu I. Dobre, Merei Buzău

E : 2454. Să se calculeze

$$\frac{\left[1,(7)+\frac{12}{54}\right]\cdot\left(3,14-\frac{7}{50}+4\frac{1}{2}\right)}{\left[0,3(12)+\frac{97}{330}\right]\cdot\left(\sqrt{1,44}+\sqrt{0,36}\right)}:\frac{15}{1,8}$$

M. V. Focșeneanu, profesor Mănești

E : 2455. Să se efectueze :

$$\frac{\left(5,225-\frac{5}{9}-3\frac{5}{6}\right)\frac{36}{43}+1,3}{\left(2\frac{23}{50}+1\frac{16}{75}\right):(55,1:5)-\sqrt{0,0081}+\frac{227}{300}}+\sqrt{\frac{24^2}{144}}$$

La admitere în clasa a IX-a, Brașov 1965

---

* V (E: 2450—2453); VI (E: 2454—2456); VII (E; 2457—2459); VIII (E : 2460—2463) Soluțiile se primesc pînă la 15 iunie 1966.

E : 2456. Doi tractoriști ară un teren în 12 zile. Dacă primul ar lucra 6 zile iar al doilea 5 zile, ar ara împreună $46\frac{3}{7}$ % din suprafața de teren ce aveau de arat. Să se afle în cîte zile ar putea ara fiecare dintre ei suprafața de teren ce li s-a repartizat.

D. Mîrzan, R. Vîlcea

E : 2457. Fie un triunghi dreptunghic ABC $(b > c)$ $(A = 90°)$ și mediana AM. Perpendiculara în M pe AM intersectează înălțimea AS a triunghiului dat în P. Să se afle perimetrul triunghiului MSP.

L. Constantinescu, Sibiu

E. 2458. O unitate agricolă dispune anual de 180 tone grăunțe, 2 520 tone masă verde și 610 tone fînuri. Consumul specific din aceste furaje precum și valoarea produselor animaliere anuale sînt redate în tabelul ce urmează :

Specia de animale	Grăunțe t/cap	Masă verde t/cap	Fînuri t/cap	Valoarea prod. animaliere mii lei
vacă de lapte	0,25	10,0	2,35	3,6
10 oi adulte	0,3	4,2	1,35	1,9
10 porci grași	4,8	5,0	—	9,0

Se cere să se stabilească numărul de animale ce se pot ține cu resursele de mai sus de furaje, realizînd valoarea maximă a producției animalelor.

Dorel Rusu, elev Cluj

E : 2459. În triunghiul ABC, laturile AC și BC sînt egale. Punctele D și E sînt pe AC și $AD = DE = EC$. Sînt date $BD = 8{,}5$ m și $BE = 10$ m. Să se calculeze aria triunghiului BDE.

Corneliu Georgescu, Craiova

E : 2460. Se dă expresia

$$\frac{1-\dfrac{4x}{(x+1)}}{\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2x}{x^2-1}}.$$

a) Să se aducă la forma cea mai simplă.

b) Să se arate că această expresie nu poate avea valoarea numerică egală cu $+1$ pentru nici o valoare a lui x;

c) Pentru ce valoare a lui x această expresie are valoarea numerică $\frac{3}{5}$?

La admitere în clasa a IX-a Banat, 1965

E : 2461. Într-un paralelogram se dă : $AB = 10$ m, $AD = 6$ m, aria parelogramului este de 45 mp.

Cu cît creşte aria paralogramului ;

a) dacă mărim latura AD cu 2 m.

b) dacă mărim latura AB cu 2 m.

c) Să se calculeze aria rombului cu laturile de cîte 2 m avînd aceleaşi unghiuri cu paralelogramul dat.

La admitere în clasa a IX-a, Banat 1965

E : 2462. Să se arate că :

$$\frac{1-\dfrac{1-x}{1+x}}{1+\dfrac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{1+\dfrac{1+x}{1-x}}{1-\dfrac{1+x}{1-x}} + 1 = 0.$$

C. Ionescu-Ţiu

E : 2463. Să se descompună în factori expresiile

$$(a-b)^2 + a(b-1)^2 - b(1-a)^2;$$

$$[4ab - (1+a^2)(1+b^2)]^2 - 4[(1+a^2)b - a(1+b^2)]^2.$$

C. Ionescu-Ţiu

ERATĂ. – La problema E : 2412 se va adăuga : în total fiind 44 elevi.

– La problema E : 2420 se va adăuga : cînd are valoarea cea mai mare.

– *Notă.* Problema 7286 se mai găseşte în c.d.p. de algebră de A. Ioachimescu, Ed. 1938, Cap. IV, nr. 42.

– Problema 6647 s-a publicat şi în G.M., 1943 pag. 265.

POŞTA REDACŢIEI

Unor elevi din Cîmpina, Galaţi şi Ploieşti. S-au primit la redacţie şi plicuri trimise recomandat însă în interior conţineau numai foi simple, fără nici o rezolvare de probleme din G.M.-B. Exemplu : Ploieşti 1. Rec. 366 şi 367 din 20.11.1965.

Mai multor rezolvitori de probleme. Numele cu semnătura problemelor rezolvate este neciteaţă şi astfel poate apare denaturat numele rezolvitorilor. Problemele propuse la rubrica chestiuni de examen pot fi rezolvate, însă soluţiile se primesc numai timp de 3 luni de la apariţia publicării lor, la fel ca şi la celelalte probleme şi exerciţii propuse. Se anunţă primirea soluţiilor bune numai dacă în plicul trimis sînt cel puţin 12 probleme bine rezolvate pentru elevii din licee sau cel puţin 8 pentru cei din şcoli generale, de aceea nu toate soluţiile primite sînt anunţate la rubrica rezolvitorilor. Sosesc însă plicuri cu 1 sau 2 probleme rezolvate sau probleme propuse nesemnate sau scrise mai multe pe o aceeaşi foaie, de aceea nu putem ţine seama de ele. Nu este suficientă semnătura de pe plic, trebuind să fie semnată citeţ fiecare lucrare trimisă spre publicare.

Stănciulescu Ion, elev Craiova şi altor corespondenţi. Problemele rezolvate ce aţi trimis aveau depăşit termenul de 3 luni de la apariţia publicării lor.

Unor propunători de probleme. Un elev începător la rezolvări de probleme nu este indicat să propună probleme, fiind necesar ca mai întîi să poată singur să rezolve probleme deja propuse în Gazeta matematică, să urmărească notele sau articolele pe care le-ar putea înţelege cu cunoştinţele dobîndite. Multe probleme propuse de corespondenţi sau note, sînt cunoscute

sau banale şi de aceea ele nu pot fi publicate. Enunţuri de probleme propuse fără a fi însoţite de soluţii corespunzătoare nu pot fi publicate.

Aurel Boar, Arad. Materialele ce se publică în Gazeta matematică trebuie să intereseze în primul rînd pe tineretul şcolar căruia se şi adresează Gazeta, de aceea nu se pot publica orice fel de chestiuni de matematică în această revistă.

Vrăjitoru Isac, elev Mehadia. Este adevărat că enunţurile unor chestiuni de examen au mai fost publicate şi în culegeri, însă au sosit la redacţie cu întîrziere.

La recomandata Braşov 1 nr. 752/1956. Scrisul prea grăbit şi foarte greu de citit, iar semnătura indescifrabilă nu pot fi de folos redacţiei la aclătuirea rubricii respective.

Unor rezolvitori de probleme. Mai primim încă rezolvarea mai multor probleme pe aceeaşi foaie, sau scrise cu totul neîngrijit, cu creionul, uneori fără enunţul problemei, sau chiar fără numărul de ordine al problemei. Se înţelege că nu putem ţine seamă de aceste probleme.

Mai multor elevi de aceiaşi clasă şi şcoală. Trimiterea în grup de probleme rezolvate, toate soluţiile fiind identice şi scrise cu aceleaşi cuvinte dovedesc că nu reprezintă munca fiecăruia. Nu ţinem seamă nici de problemele rezolvate fără număr de ordine, fără enunţ, sau scrise la maşina de scris şi apoi semnate.

Abonamentele se pot face prin oficiile poştale unde vă adresaţi şi în caz de neprimirea revistelor, iar nu redacţiei. Abonamentul se poate face individual şi pentru numerele care urmează să apară pînă la finele anului, însă cu circa două luni înainte de apariţia primului număr cu care începeţi abonamentul; iar vînzarea la chioşcuri se face într-un număr redus deoarece se trimit mai întîi abonaţilor.

Procurarea de cărţi apărute în biblioteca SSMF sau a altor cărţi anunţate la rubrica „Cărţi noi" se face din comerţ prin librării, deoarece la Societatea de ştiinţe matematice nu se pot face nici abonamente, nici vînzări de cărţi apărute.

Elevii din clasa IX pot trimite soluţii numai la problemele repartizate la clasa VIII, nu şi pentru cele repartizate claselor V—VII, iar elevii claselor X—XI pot trimite soluţii şi la problemele propuse la rubrica Chestiuni de examen ca şi la probleme propuse, însă numai în decurs de trei luni şi conform anunţului adresat pe ultima copertă a Gazetei „Către rezolvitorii de probleme".

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME *

Soluţii bune primite pînă la 1 decembrie 1965. (urmare)

TRUŞEŞTI (Suceava). Cl. XI. *Aionesei Ioan* (6975, 82, 7010, 4, 7, 20, 2, 8, 43, 4—7, 50, 9, 70, 2, 3, 6, 8, 80, 1, 3, 4, 91, 6, 105, 7—11, 5, 7, 9, 25, 7, 30, 2, 4, 5, 43, 63), Gavril Stefan (6988, 90, 5—7, 7000, 3—5, 7, 14, 22, 4, 30, 9, 45, 7, 51, 2, 4, 63, 6, 70, 3, 7, 8, 80, 1, 105, 10, 7), Simion Constantin (6990, 5—7, 7002, 4, 5, 7, 14, 22, 4, 30, 45, 66, 70, 3, 7, 80, 105, 10, 7, 9).

TURDA. Cl. XI. Rusu Epaminonda (6923, 43, 5, 50, 2, 4, 7, 97, 7002—5), Serban Viorel (6987—9, 95—9, 7001, 5, 7, 10, 8, 22, 4, 7).

TURNU SEVERIN. *S.g.1* cl. VIII. Sîrbulescu Ion (E : 2337, 45, 58, 9, 64, 5, 73—5). Cl.VIII. Iupceanu Ion (E : 2337, 8, 56, 9, 64—6, 9, 73, 4, 6).

ZALAU. L.1. cl. XI. Turcaş Teodor (7000, 3, 5, 7, 18, 28, 33, 7, 45, 51, 4, 6, 73, 7, 80, 1).

★

Pînă la 1 decembrie 1965 s-au primit soluţii bune la probleme propuse în G.M.—B de la:

AIUD. *Cl. VII.* Maftei Doina (E : 2354, 6—9, 61, 5, 6, 9, 71, 7) *Liceul 1 cl. XI.* Sdrulla Dumitru (7054—6, 63, 6, 9, 76, 89, 120, 2, 4, 5, 30, 2).

ALBEŞTI (Oltenia). *Cl. VI.* Belega Nicolae (E : 2354, 6—9, 66, 9, 70, 4, 6). *Cl. VII.* Belega Viorica (E : 2365, 9, 70, 3, 4, 6—80).

ARAD. *Liceul 1 cl. VIII.* Decis Florin (E : 2354, 6, 7, 9, 60, 2, 5, 6, 9, 73), Luluşa Lucia (E : 2354—9, 62—4, 6) Săciu Cornelia (E : 2354, 6—8, 60, 7, 8, 77). *Cl. IX.* Balla Ioan (7049, 51, 2, 9—62, 4, 6—9), Boşcaiu Voicu (E : 2363—6; 7048, 59—61, 6, 9, 73, 6, 91), Pătru

---

* *Evidenţiaţii ca rezolvitori de probleme sînt scrişi cu litere cursive.*

Ionel (E : 2363—6, 78—80; 7075—7, 127, 31). *Cl. X.* Betea Dan (7048—52, 60—4, 7, 8, 70, 6, 7, 80, 91, 110, 7), Lucuţa Petru (7048—52, 4, 9—64, 6—70, 3, 7—81, 91, 6, 109, 10, 4, 7), Onceanu Pavel (7051, 9, 63, 6, 70, 3, 6, 8, 80, 8, 120, 2, 4, 31). *Cl. XI.* Pîrvănescu Horia (7048, 9, 51, 2, 4, 5, 9—64, 6, 7, 9, 73, 7, 8, 80,1, 91, 105, 7). *L.4 cl. IX* Gall Anton (E : 2363—6 78—80; 7076, 81, 91, 130, 1, 40), Gruber Iosif (E : 2363—6, 78—80; 7077, 81, 91, 130, 1, 40), Grun Gerhard (E : 2363—6, 78—80; 7078, 81, 91, 130, 1). *Cl. X.* Leifel Ana (7076, 7, 81, 91, 108, 12, 26, 30—2, 5, 40). Löfler Anton (7076, 7, 81, 91, 108, 12, 26, 30, 1, 5, 40), Szebold Ioan (7076, 7, 81, 91, 108, 11, 2, 26, 30—2, 5, 40). *Grup şcolar uzine anul I.* Hotăran Petru (E : 2354, 6, 8, 61—6).

BACĂU. *Liceul 1. cl. IX.* Sasu Dan (E : 2358, 9, 65—7, 9—75, 9, 80). Cl. X. Ţarălungă Lucian (6996, 7, 4002, 3, 60, 1, 70, 6, 80, 119, 30, 1).

BAIA DE ARAMĂ. *Cl. IX.* Drăgulescu Anca (E : 2359, 65—7, 69—72, 4, 5), Raicu Ion (E :2367—72, 4, 9, 80).

BAIA MARE. *S. g. 9. cl. VIII.* Trosin Aurora (E : 2356, 7, 60, 1, 9, 75, 7, 8). *L.cl.VIII.* Marinescu Dorin (E : 2354—9, 65, 6). *Cl. IX.* Alexandrescu Dana (E : 2363—6, 78—80; 7076, 127, 30, 1), Gherman Adrian (E : 2363—6, 77—80; 7076, 127, 9, 31), Levai M. Iudita (E : 2354 —6, 8, 9, 63, 5; 7080, 1, 129—31). Cl. X. Ormezei Elisabeta (7069, 70, 7, 8, 80, 1, 119, 27, 9— —31, 5). *Cl. XI.* Oprea Alexandru (7068—70, 7, 80, 1, 9, 115, 24, 31, 6, 40, 3), Veronescu Mircea (7119—22, 4, 9, 34, 6, 42—4, 59). *L. 3 cl. VIII.* Graur Călin (E : 2356, 7, 9, 62, 5, 9, 70,6). *Cl. X.* Apşan Dan (7054, 5, 60, 1, 3, 5, 7, 8, 70, 119, 36, 45, 63, N, P).

BĂLCEŞTI (Oltenia). *Cl. IX.* Mihai Aureliana (E : 2354, 6, 8, 9, 65—72, 7).

BĂNEASA (Dobrogea). *Cl. IX.* Dumitru Stana (E : 2336, 8, 9, 42, 4—6, 8—54, 6—9, 62, 4—6), Niculescu Veronica (E : 2336, 8, 9, 42, 4—6, 8—54, 6—9, 62, 4—6), Poenaru Paraschiva (E : 2336, 8, 9, 42, 4—6, 8—54, 6—9, 62, 4—6).

BECHET (Oltenia). Cl. IX. Popa D. Ion (E : 2365, 6, 78—80; 7051, 68, 73, 6, 110,9, 28, 30, 1).

BELINT (Banat). Cl. VII. Cirsta Florica (E : 2354, 6, 7, 9, 69, 70, 3, 4, 6).

BISTRIŢA (Cluj). *Absolvent* Verveagă T. (7048—50, 76—8, 80, 1, 91, 6, 110, 4, 9—22, 4, 31, 2, 4—6, 51). *S.g.3 cl. VIII.* Fucă-Tomescu Mihai (E : 2354, 6—62, 4—6; 7060, 4). *L.1 cl. IX.* Timofte Corneliu (E : 2351, 63—6, 78—80; 7076, 7, 80, 1). Cl. XI. Enceanu Roland (7066, 70, 3, 7, 8, 80, 1, 110, 7, 30, 1, 4, 5, 46, 88), Fucă-Tomescu Sergiu (7048, 51, 2, 4, 9, 60, 4, 6, 9, 70, 3, 88, 117), Mihăilaş Liana (7050—2, 4, 5, 64, 77, 8, 80, 91, 110, 5, 7). *L. 2 cl. X.* Meneş Mihai (7050—2, 66, 73, 7, 81, 108, 11, 4, 7, 35). *Cl. XI.* Deak Andrei (7070, 6, 80, 115, 7, 20, 2, 4, 9—31, 5).

BÎRCA (Oltenia). C. VIII. Popa Ştefan (E : 2354, 7—9, 62, 4—6, 85; 7060, 72), Proca Ştefan (E : 2357, 67—72, 4—6, 85; 7054, 70, 6, 127).

BÎRLAD. *L. 3 cl. V.* Sava Anca (E : 2356, 7, 9, 71—3, 6, 7). *Cl. VI* Asultanei Eugen (E : 2354, 6, 7, 9, 64—6, 70—4, 6), Bichir Ionel (E : 2354—66), Mustaţă Adriana (E : 2356, 7, 9, 66, 71—4, 6—8), Cl. VII. Vasiliu Gelu (E : 2359, 65, 6, 71, 4, 5, 6, 80). *Cl. VIII.* Asultanei Mariana (E : 2367, 9, 71—4, 6—8, 80), Müller Iulia (E : 2356, 67, 9, 71—4, 6, 7), Protopopescu Cristina (E : 2365, 7, 9—72, 5—8, 80), Tabără Felicia (E : 2354, 6, 9, 60, 7, 9, 70, 3, 4, 6).

BOTOŞANI *L. 1 cl. IX.* Strahmuţchi Constantin (E : 2354, 6, 8, 9, 62, 4—6, 73—5, 8, 9), Toma I. Carmen (E : 2354, 6—9, 64—6, 8—70, 5, 4, 9). *Cl. XI.* Dale Constantin (7059, 60, 76, 7, 81, 3, 91, 119, 20, 7, 30, 1, 6, 51), Lazarovici Hary (7056, 63, 9, 70, 6, 7, 80, 1, 3, 91, 3, 107, 14, 9, 20, 7, 31, 4—6, 43, 51).

BOZOVICI (Banat) Cl. VIII. Ignea Ana (E : 2354, 76—80, 2—5).

BRAD (Hunedoara). *S. g. 1cl. VIII.* Năstăsoiu Lidia (E : 2359, 65, 6, 9—74, 6, 7, 9, 80). *S. g. 2 cl. VIII.* Trufaşu Dan (E : 2354, 6, 9, 63—6, 9—71, 4, 6, 9, 80).

BRAŞOV *S. g. 6 cl. VI* Zsido Eva (E : 2354—6, 8, 9, 67, 9—71, 3). *L. 4 cl. VIII.* Boşag Georgeta (E : 2356, 7, 9, 70, 3, 6, 9, 81, 2), Boşag Livia (E : 2356, 7, 9, 70, 3, 6, 9, 81, 2), Olteanu Sonia (E : 2355, 67, 9, 71—4, 9, 80), Olteanu Valentina (E : 2361, 5, 70, 6, 7,81—8) Papp Evi (E : 2356, 7, 9, 61, 3, 5, 6, 70), Popovici D. Sergiu (E : 2356, 7, 61, 3, 5, 70, 3, 6), Szabo Clara (E : 2355, 6, 65, 7, 9—71, 3, 80), Tudor Titina (E : 2356, 7, 9, 69, 70, 4, 6, 80). *Cl. X.* Bontaş Vasile (7048—52, 5, 64, 5, 9, 70, 3, 91, 114). Cl. CI. *Cotora Gheorghe* (7048— —52, 4—6, 9—61, 3, 4, 6, 7, 9, 70, 3, 5—8, 80, 1, 3, 7, 91, 3, 6, 107, 10, 1, 4, 9, 22, 30, 1, 45), *Pitiş Gh.* (7048, 50—2, 5, 6, 60—4, 6, 8—70, 3, 4, 6—8, 80, 1, 7—9, 91, 105, 10, 7, 9—22, 4, 5, 7, 30—2, 4—6, 8, 42, 5).

BRĂILA *S. g. 7. cl. VI* Borşai Lucia (E : 2354, 6, 7, 68—70, 6, 7), Ceapă Mariana (E : 2354, 6, 7, 9, 69, 70, 6, 7), Dendrino Artemis (E : 2354, 6—9, 69, 70, 1, 4, 6), Eftimie Doru (E : 2354, 6, 7, 9, 62, 4, 7, 9—71, 6, 9), Gherman Teodor (E : 2354, 6, 9, 67, 9, 70, 6, 7), Ghiţă Sorin (E : 2354, 6, 7, 67, 9, 70, 6, 7), Monas Pericle (E : 2354, 6, 9, 67, 9, 71, 6, 7), Poenaru Constantin (E : 2354, 6, 7, 67, 9, 70, 6, 7), Porumb Ioana (E : 2356, 7, 9, 69—71, 4,

5), Zamfir Mihaela (E : 2354, 5, 6, 7, 9, 69, 70, 2, 6, 7). Cl. VII. Epure Marlena (E :2354, 6, 7, 9, 62, 9, 70, 5—7), Sgîrcitu Georgeta (E : 2354, 6, 7, 9, 62, 9, 70, 5—7). *L.3 cl. X* Crivăţ Nicolae (7051, 2, 61, 3, 6, 70, 3, 80, 120, 21, 5). *S. g. 7 cl. VIII.* Marinescu Elena (E : 2354, 6, 9, 69, 70, 3, 5, 6, 9), Simulescu Eugen (E : 2356—8, 69—71, 4, 6, 80), TînţaruT. Doru (E : 2354, 6, 7, 9, 65, 70, 4—6). *S. g. 22 cl. VIII.* Dragomir Gh. (E : 2354, 6, 7, 9, 63, 5—71, 3, 4, 6—80).

BREAZA *S. g. 2 cl. VI.* Chiţu Daniela (E : 2356—8, 69—71, 3, 4). *L. 1 cl. X.* Tăleanu Constantin (7048, 9, 51, 61, 9, 70, 3, 5—8, 80, 1, 91, 107, 8, 10). *L. militar cl. XI* Pinaru Ion (7055, 9, 61, 3, 4, 9, 77, 107, 20—2, 31, 6).

BREBINA (Bucureşti). *Cl. VIII.* Neacşu Lucian (E : 2356, 9, 64—6, 9, 70, 8, 80).

BUCUREŞTI, *S. g. 3 cl. VIII* Georgescu Marius (E : 2354, 6, 7, 9, 65, 6, 70, 6, 81, 3), Paraschiv Monica (E : 2356, 7, 9—62, 6, 9, 81, 92), Rosner Ştefan (E : 2356, 7, 9, 62, 3, 5, 6, 8—72, 6, 9, 92), Stoiciu Gh. (E : 2357, 69—72, 4, 9, 80, 3). *S.g.4.cl. VIII* Ioniţă Nicolae (E : 2356, 7, 9, 61, 3—6, 8). *S. g. 5 cl. VII* Gelles Ioana (E : 2354, 6—62, 4—6). *S. g. 11 cl. VIII* Necula A. G. (E : 2354—61, 4—72; 7059). *S. g. 26 cl. VIII.* Ştefănescu Florin (E :2357, 60—2, 8, 71, 3, 5—7). *S. g. 33 cl. VIII.* Albu Sorin (E : 2354, 6—60, 3—6; 7077). *S. g. 122 cl. VII.* Gheorghiu Mihaela (E : 2356, 7, 9, 65, 71, 3—5). *S. g. 128 cl. V.* Rigolete Nicoleta (E : 2354, 6, 7, 9, 65—7, 76). *Cl. VI.* Popa Mihaela (E : 2354, 6, 7, 9, 64, 8—70). Cl. VIII. Ciontea Mariana (E : 2354, 6, 7, 9, 60, 3, 5, 6), Ciora Mihaela (E : 2354, 6, 7, 9, 60, 3, 5, 6). *S. g. 145 cl. VII.* Comana Marian (E : 2368, 9, 71, 3—7, 80). *S. g. 146 cl. VIII.* Bădescu Smaranda (E : 2355, 7, 61—4, 7—75, 8—80; 7119, 25, 6, 30, 51). *S.g.156 cl. VIII.* Ştefănescu D. Cătălin (E : 2361—7, 9—72). *S. g. 166 cl. VI.* Vasilescu Paula (E : 2356, 9, 65, 6, 9, 70, 3, 6, 7). *Cl. VII.* Cernescu Gabriela Marina (E : 2354—9, 61, 5, 6, 9, 73—6, 9). *Cl VIII.* Vasilescu Adriana (E : 2357, 9, 65, 6, 9, 70, 3—5, 7, 9). *S. g. 169* cl. VII. Hoisescu Nicolae (E : 2354—61, 3—6). *Cl. VIII.* Vijelie Luminiţa (E : 2356—8, 60, 2—6; 7060—3, 6, 9, 73, 6, 7, 80, 1, 91). *S. g. 173 cl. VI* Andriebici Bogdan (E : 2354, 6, 7, 9, 64—6, 70). *Liceul 1 „N. Bălcescu" cl.IX* Barbu Steluţa, Bănescu Lăcrămioara, Drăgan Monica, Florescu Arleziana (E :2367—76, 8—80), Dragostin Cătălin, Ivan Tudora, Silvan Petre (E : 2367—80), Litvin Gabriel (E : 2367, 9, 71—3, 5—80), Tănase Adriana (E : 2367, 8, 70, 2—6, 8—80), Vasiliu Doina (E : 2367—72, 4—6, 8—80). Cl. X. Culinski Maria (7076, 7, 80, 3, 91, 107, 8, 10, 9, 29—31, Hahn Radu (7059-64, 6, 9, 70, 7, 8, 80, 1, 7) Teişanu Cornel (7059, 61, 3, 4, 6, 9, 76—8, 80, 130, 1, 5). Cl.XI. Mihai Valeriu (7055, 63, 6, 9, 70, 7, 80, 119, 20, 4, 30, 1, 5). *L.4 cl. XI* Cosmanciuc Ion (7078, 80, 1, 105, 7, 19—21, 3—5, 38, 43, 5, 53), Iconaru Cornel (7107, 19—21, 3, 4, 30, 1, 5, 6, 44, 51). *L.5 cl. VII.* Doran Andrei (E : 2360—6, 71, 7, 9). Cl. VIII. Bucur Ion (E : 2354, 6, 8, 9, 61, 2, 4—6), Filimon Cristian (E : 2354, 6, 9, 65, 7, 9, 70, 7), Stănculescu Alexandru (E : 2354—9 62—5). *Cl. X. Manolache Nicolae* (6862, 78, 920, 1, 8, 32, 3, 5, 6, 42, 62, 4, 5, 83, 7—90, 3, 5—7000, 2—4, 7, 8, 17, 18, 22—4, 44, 5, 7, 9—52, 6, 9, 74, 6, 8, 80, 1, 3, 9, 117, P). *L. 6cl. VIII.* Weiner Irina (E : 2356—9, 62, 4—6). *L.7 cl.VIII.* Redlinger Daria (E : 2354—66). *L. 10 cl. VII.* Corîciu I. Cezar (7059; E : 2354, 6—61, 3—6), Gafiţa Gabriel (E : 2367, 70, 4, 6, 9; 7075, 91, 119, 27). *Cl. VIII* Ioan Sanda (E : 2354, 7, 8, 62, 5—7, 75). *L.11 cl. IX* Gorodcov Dan (E : 2356—9, 71, 2, 5, 6; 7076, Popescu Eugen (7059—64, 6, 7, 9, 76, 7, 119, 20). *Cl. XI.* Lutaşu Marius (7049, 51—2, 60, 1, 70, 80, 91, 5, 105, 17, 24, 9, 31, 6, 45, 6). *Cl. IX.* Aghinii Vasile (E : 2354,.6—8, 61, 2, 5, 6, 8, 71, 4, 5, 7, 8). *Cl. XI.* Dima Corneliu (7075, 7, 80, 1, 91, 107, 31—3, 46, 99), Mioc Vasile (7075—7, 81, 92, 107, 31—3, 46, 99), Turturică Ştefania (7051, 66, 70, 2, 5, 7, 8, 80, 91, 105, 10, 32). *L. 12 Spiru Haret cl. X.* Bărcănescu Serban (6920, 1, 4, 7, 8, 31, 5, 8, 35, 6, 9, 62, 7, 9, 61, 2, 83, 6), Ralescu Dan (6808, 40—3, 7—53, 5, 7, 9—70, 2, 3, 6—81, 3, 4, 6, 8, 9, 13, 56, 902, 12, 4, P). *L. 15 cl. V.* Cernica Ruxandra (E : 2354, 9, 63, 5, 6, 8—70, 7). *L. 16 cl. X.* Mendelsohn Nadia (7048, 9, 70, 6, 80, 1, 119, 30, 1, 5, 6, 85). F. f. cl. VIII. Drăguşin Alex. (E : 2354, 6—9, 62, 3, 5, 6; 7059, 61, 4, 5, 71, 81), *L.20cl. IX.* Hermann Ştefan (E : 2356—9, 64, 5, 7—71, 6, 81, 3, 7075, 7). *L.* 22 *cl. IX. Sergiescu Vlad* (6921, 49, 52, 95—7, 9, 7001—5, 24; 48, 9, 59, 60, 6, 9, 73, 6—8, 80, 1, 91, 5, 108, 11, 4, 9, 20, 2, 7, 9—32, 40, 59 (E : 221—8, 40, 2, 4—6, 50—4, 6—80). *Cl. X. Voiculescu Dan* (7129, 31, 7, 42, 3, 6, 8, 53, 88, 90, 2, 5, 211, 5, N, P) *L. 22 cl. IX* Atanasiu T, Dragu (E : 2363—6, 78—80, 91, 3; 7077, 81, 131). Cl. X. Strujan Vladimir (7049—52, 60, 1, 6, 9, 70, 6—8, 80, 1, 91, 107,14, 9, 22, 7, 9—33, 5, 6, 8, 51). *L. 23 cl. XI* Băluţă Tudor (7061, 4, 6, 9, 70, 2, 3, 6, 7, 10, 7, 9—24, 6, 30—2, 5, 44). *L. 24 cl. VIII* Frişor Puşa (E : 2356, 60, 2, 5, 6, 9—71, 4, 6, 7, 81, 92). *L. 26 cl. IX.* Talianu Andruşca (E : 2365—71, 4—6, 9, 80, 3) *L. 28 cl. VIII.* Arsene Vladimir (E : 2354, 6, 7, 9, 62, 4, 5, 70). *L. 30 cl. IX* Platz Alex. (E : 2363—70, 9, 80; 7129—31 *L. 32 cl. VII.* Celenti Dan (E : 2366, 8, 9, 71, 2, 4, 6, 8, 9), Papadima Ştefan (E : 2354, 6—9, 64—6). *L. 33 cl. VII.* Negoescu Gabriela (E : 2356, 9, 69, 70, 4, 6, 7, 81). *L. 34 cl. XI.* Grabovski Adrian (7069, 73, 6, 7, 80, 110, 9—27, 31, 6, 44, 51). L. 36 cl. IX Georgescu Radu (E : 2378—80; 7059, 60, 2, 73, 7, 130—2, 40). Studenţi : *Cărbunaru C.* (6987, 9, 90, 3, 5, 9, 21, 4—33, 5, 44, 5, 62—73, 8, 80, 7, 91, 119, 20, 30, 1).

BUHUȘI (Bacău). *L. 1 cl. VIII.* Nicolaescu Felicia (E : 2356, 9, 65, 6, 9, 70, 4, 6, 80). Cl. XI. Iosub Constantin (7049—51, 8—70, 3, 7, 8, 80, 1, 81, 111).

BUZĂU. *L. 1 cl. VIII.* Constantinescu Ștefania (E*k* 2356, 9, 66, 9, 76, 9, 81, 2, 4) Grigorescu Adriana (E : 2368—76). Cl. IX. Manea Dumitru (E : 2354, 6—9, 65, 6; 7059, 66, 73) *Cl. X* Gavrilă Șerban (7076—81, 91, 119, 20, 2, 4, 7, 30). *Cl. XI* Manea Nicolae (7048, 50—2, 4, 9—64, 6, 72, 6, 7, 9—81, 3, 91, 108), Marinescu Marian (7051, 2, 64, 7, 9, 73, 6, 80, 1, 4, 9,91).

CAPUL PISCULUI (Muscel). *Absolvent* Vintilă Constantin (7051, 60, 1, 3, 4, 6, 9, 70, 3, 6, 7, 80, 1, 91, 114).

CARACAL. *L.2 cl. IX.* Andrei Octavian (E : 2363—6, 78—80, 91, 3; 7077, 130, 1). *Cl. X Virtosu Mihail* (7048—53, 9—64, 6, 8—70, 3, 6—81, 9, 91, 6, 108, 10, 2, 7, 9, 20, 2, 4, 5, 7, 30—2, 4—8, 40, 2, 5, 50, 1, 63).

CARANSEBEȘ *L. 2 cl. X.* Hahui Constantin (7049, 51, 2, 69, 76, 7, 80, 91, 114, 9, 30, 1, 5). *Cl. XI* Brebu Ion (7063, 9, 70, 6, 8, 80, 3, 91, 122, 4, 31, 5, 6).

CĂLAN (Hunedoara). *L. 1 cl. VII.* Bal Corneliu (E : 2356—61, 3, 5, 6). Cl. VIII. Petruș Dorina (E : 2356, 7, 9, 65, 8—71, 6), Schikerle Gerlinde (E : 2354, 6, 7, 9, 79—72). *C XI. Cubineț Ion* (7048—52, 5, 6—6, 9, 70, 3, 6—81, 4, 3, 7, 8, 91, 3, 5, 102, 7 9, 19—21, 4, 7, 31), Marinçaș Mircea (7048, 9, 59—64, 6, 9, 70, 3, 6—8, 80, 8, 91, 6).

CĂLĂRAȘI *L. 1 cl. X* Formache Constantin (7050—2, 66, 9, 77, 81, 4, 91, 107, 30, 55).

CFICA (Crișana). *Cl. VII. Troic Valeriu* (E : 2354—8, 60—80).

CHIZATAU (Banat). *Cl. VII.* Toma Valeria (E : 2354, 6, 7, 9, 69, 70, 3, 4, 6).

CÎMPENI (Cluj). *L. 1 cl. IX.* Mucea Ion (E : 2378—80; 7049, 60, 6, 9, 73, 119, 27, 30—2). Cl. X. Dura Traian (7054, 5, 63, 6, 9, 72, 3, 5, 7, 88, 91, 107, 8, 11, 2, 5).

CÎMPIA TURZII. *L. 3 cl. IX.* Klein Iuliana (E : 2363—6, 78—80, 2; 7059, 60, 4, 6), Tulai Lucia (E : 2363—6, 78—80; 7059, 60, 4, 6, 131). *Cl. X* Paleor Valer (7060, 6, 73, 6, 80, 95, 119, 26, 7, 9, 31—3), Toader Iosif, (7060, 1, 66, 73, 80, 95, 119, 26, 7, 9, 31—3). *Cl. XI* Barbu Nicolae (7051, 60, 3, 4, 8—70, 4, 80, 7, 91, 119, 20, 2, 4), Codrescu Radu (7048, 51, 2, 60, 2—4, 6, 8—70, 4, 6, 7, 80, 1, 94, 107, 10, 1), Cozma Emil (7048, 52, 60, 3, 4, 6, 8—70, 3, 4, 6, 7, 80, 91, 117), Drăgan Ioan (7051, 2, 60, 2—4, 6, 8—70, 4, 6, 7, 80, 91, 122, 4).

CÎMPINA *S. g. 1. cl. VIII* Ivașcu Ciprian (E : 2356, 7, 9, 65, 8, 9, 74, 5). *L. 1 cl. IX.* Ciucă Gh. (E : 2356, 8, 9, 63, 5, 6, 9, 72, 5, 8—80, 2, 3), *Cl. X.* Alexandrina Doru (7049—52, 9—62, 4, 6, 8—70, 3, 6, 7, 80—2, 112, 4, 7), Marin Ion (7049, 59, 73, 5, 7, 80, 1, 91, 119, 30—2), Văcăroiu Ioana (7062—4, 9, 91, 111, 4, 9, 32, 4, 51, 85, 8). Cl. XI. Florea Elena (7050, 1, 66, 70, 3, 6, 7, 80, 8, 110, 22, 31, 63). *L. cl. VI.* Petre Mihai (E : 2356, 7, 9, 71, 4, 6, 8, 85). Cl. IX. Filipescu Remus (7050, 1, 60, 2—4, 6, 9, 73, 6, 7, 81, 110, 9, 20, 4, 31, 4, 51).

CÎMPULUNG MOLDOVENESC. *L. 1 cl. IX* Isacovici Marcel (E : 2356—9, 65—7, 9——71, 6, 81). L. militar cl. XI. Ungureanu Dragoș (7051, 66, 9, 70, 2, 3, 7—81, 91, 110, 20—2, 4, 5, 7, 31, 4).

CÎMPULUNG MUSCEL. *L. 1 cl. X* Hurdubețiu Sorin (7051, 2, 70, 5—7, 80, 91, 119, 30—2).

CLUJ. S. g. 5. cl. V. Berceanu Dorin (E : 2354—6, 9, 65, 6, 70, 7), Pop Traian (E : 2354, 6, 7, 9—63, 5, 6). *S. g. 7 cl. VII.* Zglobiu Nicolae (E : 2359—62, 4—8, 70). *L. 5 cl. VIII* Axinte Cornelia (E : 2354, 6, 7, 9, 61, 2, 6, 77). *L. 7 cl. XI.* Kovacs Ladislau (7048, 68, 8,9, 120—2, 4, 31, 43, 8, 211). *L. 8 cl. VII* Kaitar Maria (E : 2354, 6, 7, 9—62, 4—6, 8—78, 80). Cl. VIII. Bercea Corina (E : 2354, 6—61, 5—71, 4, 5, 7, 80), Miclescu Lucia (E : 2356, 7, 9, 62 3, 5, 6, 9, 70, 4), Nadolski Sergiu (E : 2356, 7, 9, 65, 6, 9, 70, 6). *Cl. IX.* Tudoran Tudor (E 2354, 6—9, 62, 4—6, 77—80; 7060, 73). *Cl. X.* Damian Dadu (7060, 3, 6, 9, 70, 6, 80, 120, 2, 30, 1, 5). *Cl. XI.* Trif Damian (7065, 73, 91, 6, 105, 119—25). *L. 7 cl. VIII.* Iliescu Adrian (E : 2354, 65—7, 70, 3, 8, 80). *L. 10 cl. VI.* Oprișoiu Ovidiu (E : 2354, 6—9, 67—71). *L. 11 cl. IX.* Csetri Klara (E : 2363—6, 78—80; 7076, 7, 129—31), Sandor Eva (E : 2363—6, 78——80; 7076, 7, 129—31). *Cl. X* Szasz Winge (7076—8i 80, 1, 129—31, 4—6). *L. 12 G. Coșbuc cl. VII.* Rosenberg J. Jacques (E : 2354, 6, 9, 67—9, 71, 2, 4, 6). Cl. VIII Orban Gh. (E : 2354, 6, 7, 9, 60, 2, 4—6). Cl. XI Szabo Karoly (E : 2354, 6, 7, 9, 62, 4—6). *Cl. XI. Zăgreanu Marius* (6927, 31—3, 8, 44, 6, 9—52, 7, 60, 3, 7, 72, 5, 80, 6, 8, 97, 7002, 3, 7, 16, 7, 21, 2, 33, 5, 9, 44, 5, 7, 50—2, 5, 64, 6, 8, 9, 73, 6—8, 80, 1, 3, 4, 9, 91, 105).

COMARNIC *L. 1 cl. X.* Aldasora Augustin (7049, 51, 60, 1, 3, 6, 9, 70, 3, 6, 7, 91, 110).

CONSTANȚA *D. g. 1 cl. VIII.* Ivaneș Mircea (E : 2366, 8—71, 3, 4, 6, 8—80). *S. g. 24 cl. VIII.* Theodoridis Irina (E : 2354, 7, 9, 67, 9—71, 6). L. 1 cl. VI. Arvinti Mihaela (E : 2354, 6, 7, 67, 9—71, 6). Cl. X. Sadachiev Gh. (7049, 60—2, 4, 81, 91, 119, 30, 1, 4, 6, 63), Muzioiu Florin (7068—70, 7, 8, 81, 91, 3, 111, 9, 30—2, 5, 6). *L. 2 cl. IX.* Pruiu Anastase (E : 2354, 6—9, 62, 4—7, 9—71, 4, 7, 80). *L.3 cl. VIII.* Lepădatu Maria (E : 2356, 7, 60, 2, 4, 6, 9, 70, 7).

COTATCU (Ploieşti). *Cl. VII.* Iorga Gheorghe (E : 2354, 6, 7, 9, 64—7). *Cl. VIII.* Rotaru Costel (E : 2354, 6, 7, 9, 61, 3, 5, 6).

CRAIOVA. *S. g. 24 cl. VII* Ciulin Niculiţă (E : 2356—9, 68—74). *L. 1 cl. IX.* Morandini Nicolae (E : 2362, 4—6, 8, 79, 80; 7077, 130). *Cl. X.* Banţă C. Valeriu (7048, 51—3, 9, 60, 6—9, 73, 6—8, 81, 91, 109, 12, 65) Bâjea Gh. (7059, 61, 9, 70, 3, 6—8, 91, 110, 7, 30, 1, 4, 5 5), Bălan Virgil (7060, 6, 9, 75, 7, 110, 30, 1, 4—6, 85 8), Cumpănaşu M. Cristine (7048—52, 73, 6, 7, 80, 1, 110, 1, 4, 31, 5), Damian Viorel (7050—2, 9—61, 4, 6, 9, 70, 3, 6, 8, 80, 91, 110), Dragotă Gh. (7049—51, 9, 61, 6, 9, 70, 3, 6—8, 80, 1, 91, 110), Florian Horia (7050—2, 60, 1, 3, 4, 6, 9, 70, 3, 6—8, 91, 3, 110), Iliescu Radu (7048, 50—2, 9, 60, 6, 7, 73, 6, 8, 81, 91), Neagu Gabriel (7048, 50—2, 9—61, 4, 6—9, 73, 6—8, 80, 1, 91) Ozun Rodica (7048, 50—2, 9, 60, 7, 70, 3, 6, 7, 81), *Pătra Cristian* (7048—52, 9—62, 4, 8—70, 3, 6—8, 80, 1, 91, 108, 11, 2, 7, 9, 20, 2, 4, 7, 30—2, 4, 5, 8), Popescu Adrian (7050, 1, 60—2, 4, 6, 9, 73, 6—8, 80 91, 110), Popescu Leonard (7050—2, 9—61, 4, 6, 9, 70, 3, 6—8, 80, 1, 91, 110, 7), Radu Viorel (7048, 50—2, 9, 60, 6, 7, 72, 6—8, 81, 91), Răduică Tudor (7050—2, 9, 64, 6, 9, 73, 6, 7, 91, 108, 11), Sandu Viorel (7050—2, 64, 6, 7, 9, 73, 80, 91, 131, 4, 5), Slabu Dan Viorel (7048, 50—2, 60, 1, 6—70, 3, 6, 80, 91), *Turcu Ilie* (7048, 9, 51—3, 5, 9, 60, 5—71, 3, 6—8, 81, 1, 4, 9, 91, 3, 105, 7, 8, 10—2, 4, 7), Tepuş Nicolae (7048, 50—2, 9, 60, 1, 4, 6, 7, 9, 73, 6—8, 80, 1, 91). *L. 2 cl. X* Cristovici Mihai (7051, 61, 6—70, 3, 6, 7, 130—2, 4, 6), Geblescu Alexandru (7051, 61, 6, 7, 70, 3, 6, 7, 119, 30—2, 4, 5), Guran Tiberiu (7048, 51, 2, 9, 60, 1, 6, 8, 9, 76, 8, 80, 108, 31), Popescu Rodica (7049, 51, 66, 8, 70, 3, 6, 7, 122, 31, 4, 5), Preda Marcel (7051, 66, 9, 70, 3, 6, 7, 119, 30—2, 4, 5). *Cl. XI.* Sîrbu Vasile (7048, 9, 51, 9—61, 3, 4, 6, 8—70, 3, 6, 7, 80, 91). *L. 4 cl. IX.* Dima Grigore (E : 2356, 7, 9, 65, 7—71), Dinu Ştefan (E : 2350, 6, 7, 9, 65, 8—71), Dobrescu Ecaterina (E : 2358, 9, 65—7, 9—71, 4, 5, 9, 80), Durău Marcela (E : 2356, 7, 9, 65—71, 80), Gheorghe Cornelia (E : 2356, 9, 65—7, 9—71, 80), Ghinea Ioana (E : 2356, 7, 9, 65—7, 9—71, 4, 9, 80), Muşat Petre (E : 2356, 8, 9, 66 9—71, 80), Paşă Ioana (E : 2356, 7, 9, 66, 7, 9—71, 4, 5, 8, 80), Ristoiu Veronica (E : 2356, 7, 9, 66—7, 71) Stănică Elena (E : 2356, 7, 9, 66, 7, 9, 70, 2, 7, 9, 80), Trifu Ioana (E : 2357, 9, 65—7, 4—71, 5, 9, 80). *L. 5 cl. X* Mareş Tatiana (7073, 7, 80, 96, 115, 7, 20, 2, 4, 30, 1, 4, 5), Ungureanu Hariclea (7072, 7, 80, 96, 112, 7, 20, 2, 4, 30, 1, 4). *Sc. pedagogică an I* Idjilof Mioara (E : 2356, 8, 9, 65, 6, 73—7, 9, 80).

CUGIR. *L. 1 cl. X* Munteanu Traian (7059—64, 6, 70, 8, 81, 91, 105). Cl. XI. Dologa Ion (7059—64, 6, 70, 2, 6, 81, 91, 105, 10, 5).

DEJ *L. 2 cl. VIII* Snărăşanu Ovidiu (E : 2356, 9, 66, 7, 9—71, 6), *Cl. XI* Barth Ferenc (7048, 9, 51, 60—3, 6, 7, 9, 77, 119).

DRĂGĂŞANI (Argeş) Cl. VIII. Diaconescu Natalia (E : 2356, 7, 9, 61, 3, 5, 6, 9—74, 6, 7, 9, 80). *S. g. 2* cl. VI. Bălan Dumitru (E : 2356, 9, 67—71, 3, 6, 7, 9), Căzănescu Luminiţa (E : 2354, 6, 7, 66, 7, 9, 71—3, 7, 9, 80.

DRĂGĂNEŞTI-OLT. *L. 1* Durigu Mircea (7050-2, 9, 61, 6, 8—70, 2, 6, 7, 80, 1). Cl. X. Enache Victor (7050-2, 66, 9, 70, 3, 6, 7, 80, 1, 130, 1).

DRĂGĂNEŞTI VLAŞCA. *Cl. VIII.* Giurgiuveanu Mariana (E : 2354, 6, 7, 9, 62—6, Stancu Marian (E : 2354, 5, 7, 9, 62—6).

DUMBRĂVENI (Oltenia). Cl. VI. Gheorghe Marieta (E : 2356, 65, 6, 9, 71, 3, 4, 6, 9). Cl. VII. Ciucă Ion (E : 2356, 9, 66, 9, 73, 6—80).

DUMBRĂVENI (Braşov). *L. 1 cl. IX.* Teodorescu Marilena (E : 2365, 6, 78—80; 7066, 70, 80, 3, 120, 4, 30, 1).

FĂLTICENI. *absolvenţi* Gorovei A. Sorin (7060, 3, 73, 7, 105, 7, 9, 10, 11, 4; E : 2354, 6—60, 2—6).

FARCAŞUL DE JOS (Oltenia). Cl. VIII. Simion Valeria (E : 2363—6, 77—80).

FIENI (Ploieşti). *L. 1* cl. VI. Holban Cristina (E : 2354 6—9, 69, 71, 3). Cl. IX. Drăgoescu Romeo (E : 2354, 6, 8, 65—72, 4, 6; 7119) Mircescu Gh. (E : 2363—80; 7075, 119, 31), Popescu Florin (E : 2355, 61, 7—72, 4—80; 7069, 119), Savu Dumitru (E : 2354, 8, 9, 62, 4—6, 8, 71, 2, 4—6, 9, 80; 7119), Savu Ion (E : 2354, 6—9, 62, 5—9), Sencovici Gabriela (E : 2356—9, 62—8, 74, 6, 7; 7119, 31). Cl. X. Zarivoiu Gh. (7048, 52, 9—61, 6, 70, 3, 7, 8, 80, 131).

FILIAŞI (Oltenia) *L. 1* cl. X. Băluţă Constantin (7040—52, 9—61, 6, 73, 6, 7, 81, 105, 7, 8, 10).

FILIPEŞTII DE PĂDURE (Ploieşti). Cl. VII. Caragioiu Dragoş (E : 2354, 6, 9, 60, 7, 76, 81, 3, 9).

FÎNTÎNELE (Ploieşti). Cl. VI. Andrei Gh. (E : 2354—9, 67, 8, 70), Băbăleanu Elena, Bîrcă Cecilia, Bîrcă Constantin, Bozianu Constantin, Răduţă Mariana, Radu Doru, Radu Sofica, Vişinoiu Aurel (idem). *Cl. VII.* Bozianu Mirela (idem), Dogaru Neculai (E : 2354, 6—60, 7, 8), Dorobanţu Ecaterina, (Iordache Silvia (idem). Cl. VIII. Baniţă Maria (E : 2354, 6, 8—60, 2, 7, 9, 70), Biclinescu Alexandrina (E : 2354, 6, 7, 9, 60, 2, 7, 8, 70), Speteanu Tudor (E : 2354—60, 2, 7, 9, 70).

7791. Într-un triunghi ascuțitunghi ABC se consideră punctele A_1, B_1, C_1 pe laturile respectiv BC, CA, AB, astfel că punctele de intersecție $D = (AA_1, BB_1)$, $E = (BB_1CC_1)$, $F = (CC_1 AA_1)$ să fie vîrfurile unui triunghi echilateral. Să se arate că

$$\frac{AB_1 \cdot CA_1 \cdot BC_1}{B_1C \cdot A_1B \cdot C_1A} = \frac{AD}{AF} \cdot \frac{BE}{BD} \cdot \frac{CF}{CE}.$$

I. M. Stancu, student București

7792. Fie A, B, C, D, E cinci puncte în spațiu astfel încît $AB = BC = CD = DE = EA$ și $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD = \sphericalangle CDE = \sphericalangle DEA = \sphericalangle EAB$

Dovediți că punctele A, B, C, D, E sînt coplanare.

Matematika, Sofia 1965

7793. Știind că $m + n + p = 0$, să se determine soluțiile raționale ale sistemului:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{m}} = \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$z(x + y) + xyz = 0$$

produsul abc fiind rațional, m, n, p reale.

C. Udrițte

7794. Să se demonstreze egalitatea

$$\left(\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{9} \cdot \sum_{i=2}^{4} \operatorname{ctg}^2 \frac{i\pi}{9} + \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{9} \cdot \sum_{i=3}^{4} \operatorname{ctg}^2 \frac{i\pi}{9} + \operatorname{ctg}^2 \frac{3\pi}{9} \operatorname{ctg}^2 \frac{4\pi}{9}\right) -$$

$$- \left(\sum_{i=2}^{3} \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{7} \operatorname{ctg}^2 \frac{i\pi}{7} + \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{7} \operatorname{ctg}^2 \frac{3\pi}{7}\right) = 11$$

Bogza Mihai, profesor, București

7795. În triunghiul ABC, centrul I al cercului înscris împarte bisectoarele AA', BB', CC' în rapoartele $\frac{AI}{IA'} = \alpha, \frac{BI}{IB'} = \beta, \frac{CI}{IC'} = \gamma$.

Să se stabilească relațiile:

a) $\alpha^n + \beta^n + \gamma^n \geqslant 3 \cdot 2^n$; b) $\alpha^n \beta^n + \beta^n \gamma^n + \gamma^n \alpha^n \geqslant 2 \cdot 3^{2n}$, n fiind natural. (Generalizarea problemei 6689).

Daniel Pestroiu, elev, Tg. Jiu

7796. Se dă ecuația:

$$3\left(\frac{x^3}{y^3}-\frac{y^3}{x^3}\right)=4\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right).$$

Ce valori poate lua raportul $\frac{x}{y}$,

C. Herling, București

7797. Să se demonstreze că între laturile a, b, c, ale unui triunghi există inegalitățile:

$$1)\ \frac{8}{a+b+c}<\frac{a+b-c}{ab}+\frac{a-b+c}{ac}+\frac{-a+b+c}{bc}\leqslant\frac{9}{a+b+c}$$

$$2)\ 3\leqslant\frac{(-a+b+c)(a-b+c)}{ab}+\frac{(-a+b+c)(a+b-c)}{ac}+$$

$$+\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{bc}<4,$$

$$3)\ \frac{a}{-a+b+c}+\frac{b}{a-b+c}+\frac{c}{a+b-c}\geqslant 3.$$

V. Boghiu, profesor Bîrlad

7798. Dovediți că nu există triunghiul ABC pentru ale cărui unghiuri să existe relația:

$$\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C$$

B. N. Snipor (din Matematika V. Școle nr. 5/1965)

7799 Să se determine $x, y, z,$ v și t întregi pozitivi dacă

$$2^x\cdot 3^y\cdot 5^{2+z}\cdot 7^v=t!$$

I. Stănescu, Sibiu

7800. Se consideră un cerc cu centrul în origine, de rază $2a$ și o tangentă variabilă la acest cerc care taie axele în M și N. Se cere:

a) Locul geometric al mijlocului P al segmentului MN.

b) Să se reprezinte grafic locul obținut.

Martin Mettler, profesor Vișeul de Sus

7801. Se consideră un șir (a_n) dat de relația de recurență:

$$a_n=\frac{1}{1+a_{n-1}}.\ \text{cu}\ a_1=1.$$

Să se stabilească relația:

$$\left|a_{n+4}-a_{n+3}\right|<\frac{1}{5}\cdot\frac{2^{2n}}{3^{2n+2}}\ \text{pentru}\ n>2.$$

Să se deducă convergența șirului (a_n), calculîndu-se și limita lui.

Corneliu N. Popescu, București

7802. Se consideră cercul (C) de rază r și diametrul fix AB. Se cere locul punctului M din plin din care ducînd tangenta MT să aibă loc relația $MT = kMD$, unde MD este distanța punctului M la diametrul fix AB. $(k > 0)$.

Gh. Călugăriță, București

7803. Să se determine un șir (a_n) astfel ca:

$$(a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$
$$\ldots + a_n x^n + \ldots$$

Matematics Magazine, Buffalo, 1964

7804. Se dă elipsa: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ și fie OM, ON, doi semidiametri conjugați și P punctul de intersecție al tangentelor în M și N

a) Să se arate că diametrul OP este conjugat diametrului paralel cu MN.

b) Fie Q punctul de intersecție al normalelor în M și N, și m_1, m_2 respectiv coeficienții unghiulari ai dreptelor OP, OQ. Să se arate că:

$$m_1 m_2 = 1.$$

c) Să se găsească locul geometric al punctului P cînd M și N variază pe elipsă. Să se arate că acest loc este o elipsă omotetică cu elipsa dată în raport cu O (centrul elipsei). Care este raportul de omotetie?

St. Musta

7805. Să se arate că avem: $[d(n)]^2 \varphi(n) < \sigma(n)$, unde $d(n)$ reprezintă numărul divizorilor pozitivi ai lui n, $\varphi(n)$ numărul de numere mai mici ca n și prime cu n și $\sigma(n)$ suma divizorilor lui n, n fiind număr natural, $n > 1$.

Matematics Magazine Buffalo, 1963

7806. Fie cercul de centru $(0, b)$ cu $b < 0$, care taie axa absciselor în punctele $A(a, 0)$ și $A'(-a, 0)$, precum și familia de hiperbole ce au ca axă transversală coarda AA'.

a) Să se determine acea hiperbolă din familie, pentru care tangenta dusă în punctul unde prima bisectoare taie hiperbola este paralelă cu tangenta la cerc în punctul A.

b) Să se găsească locul geometric al mijloacelor coardelor determinate de o dreaptă mobilă prin centrul cercului pe hiperbola găsită la punctul a). c) Să se reprezinte locul geometric obținut.

Grigore Bănescu, profesor București

7807. Să se arate că laturile a, b, c ale unui triunghi satisfac inegalitatea

$$(a + b - c)^n + (a - b + c)^n + (-a + b + c)^n \geqslant a^n + b^n + c^n,$$

unde n este un număr natural.

C. Băluță, elev Filiași

7808. Fie un triunghi ABC. Perpendiculara în A pe AB întîlneşte BC în B_c. Perpendiculara în C pe BC întîlneşte BA în punctul B_a.

Perpendiculara în B_a pe BA şi perpendiculara în B_c pe BC se întîlnesc în B_{ac}.

Să se demonstreze că dreapta BB_{ac} este perpendiculară pe AC.

C.V.Costăchescu, Constanţa

7809. a) Să se scrie ecuaţia familiei de cercuri care trec prin punctul fix $A\ (a,\ 0)$ şi sînt tangente la axa ordonatelor.

b) Să se afle locul geometric al centrelor acestor cercuri.

c) Să se afle locul geometric al punctelor diametral opuse lui A.

Mircea Dabija, profesor, Cîmpina

7810. Se consideră o parabolă cu vîrful O şi un cerc cu centrul în focarul F al parabolei şi cu raza egală cu OF. Fie A punctul de pe cerc diametral opus lui O. O secantă variabilă ce trece prin O, taie cercul în M şi parabola în N. Paralela din M la axa parabolei şi dreapta AN se taie în P. Se cere locul geometric al punctului P.

C.Săndulache, prof. Podul Turcului

7811. Trăgătorul A nimereşte ţinta de 8 ori din 11 trageri, iar B de 9 ori din 10. Dacă trag simultan în aceiaşi ţintă, care este probabilitate ca ţinta să fie atinsă?

***

7812. Să se arate că dacă au loc relaţiile:

$$a+b+c=\alpha+\beta+\gamma$$
$$a^2+b^2+c^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$$
$$a^3+b^3+c^3=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$$

atunci există identitatea:

$$(ax+y)^n+(bx+y)^n+(cx+y)^n=(\alpha x+y)^n+(\beta x+y)^n+(\gamma x+y)^n$$

Liviu Pîrşan, Bucureşti

7813. Dacă se aranjează în ordinea mărimii lor toate fracţiile subunitare ireductibile care au numitorii mai mici decît un număr întreg dat, şi dacă în şirul astfel format se consideră doi termeni echidistanţi de extremi, aceşti termeni au acelaşi numitor şi suma lor este egală cu unu.

***

7814. Fie A, B, C, D puncte ale unui cerc O, iar O_1 şi O_2 două cercuri variabile ale fasciculelor ce au ca puncte fixe pe $(A,\ B)$, respectiv $(C,\ D)$, care se intersectează după o coardă constantă l.

a) Să se demonstreze (sintetic) că locul intersecţiilor cercurilor O_1 şi O_2 este o pereche de cercuri concentrice de centru X.

b) Caz particular: $l=0$.

c) Y şi Z fiind centrele analoage lui X, pentru cercurile fasciculelor de puncte fixe $(A,\ C)$ şi $(B,\ D)$, respectiv $(A,\ D)$ şi $(B,\ C)$, să se arate că ortocentrul triunghiului XYZ este centrul cercului O.

M.I.Focşeneanu

7815. Sînt date n feluri de monede: din primul fel a_1 monede, din al doilea fel a_2 monede, etc. Însemnăm o monedă pe care trebuie s-o scoatem în procesul numărării. Care sînt şansele ca moneda însemnată să fie moneda cu care începem numărarea?

Petru Farkaş, Cluj

7816. Fie tetraedrul $SABC$. Notăm cu m, n, p muchiile SA, SB, SC. Feţele triedrului S sînt: α, β, γ şi fie a, b, c unghiurile diedre corespunzătoare (de muchii SA, SB, SC). Volumul tetraedrului este V.

1. Să se arate că (α, β, γ) şi (a, b, c) nu pot fi simultan unghiurile a două triunghiuri.

2. Să se demonstreze relaţia:

$$\frac{3V}{mnp} = \sin^2 \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{b}{2} \operatorname{tg} \frac{c}{2}$$

Chiţescu Ion, student Bucureşti

7817. Notăm

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} = A,$$

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} = B$$

fiind în total cîte şase radicali suprapuşi.

Să se arate că:

$$(A+Bi)^{16} = 2^{14}(1+i)(\sqrt{3}-i),$$

$$(A+Bi)^{192} + 2^{192} = 0.$$

C. Ionescu-Ţiu

7818. Să se reprezinte grafic

$\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}+xy=0$; $\quad$ $\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}+xy=1$;

$\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}-xy=0$; $\quad$ $\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}-xy=1$.

C. Ionescu-Ţiu

7819. Se dau numerele pozitive $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ care formează o progresie aritmetică. Să se arate că pentru m număr natural par, are loc relaţia

$$(2^m-1)(a_2^m + a_{n-1}^m) + 2(2^{m-1}-1)(a_3^m + a_4^m + \cdots + a_{n-2}^m) \geqslant a_1^m + a_n^m.$$

Valentin Avrămoiu, elev Bucureşti.

EXERCIŢII ŞI PROBLEME PROPUSE PENTRU CLASELE V–VIII*

E: 2573. Marele scriitor Ioan Slavici a trăit cu 44 ani mai mult decît marele patriot şi scriitor Nicolae Bălcescu. Să se afle vîrsta fie căruia ştiind că raportul dintre vîrsta lui Nicolae Bălcescu şi a lui I. Slavici este $\frac{3}{7}$.

V. Petrescu, elevă Boroaia

* V (2573–2575: (2576–2579); VII (2580–2589); VIII (2590–2595). Soluţiile se primesc pînă la 15 ianuarie 1967. Problemele propuse pentru clasa VIII sînt indicate şi pentru liceele de specialitate sau pedagogice. Fiecare elev poate trimite rezolvări şi la problemele clasei precedente celei pe care o urmează.

E : 2574 După ce a citit $\frac{2}{5}$ din o carte și încă 6 file, un elev a observat că e timpul să meargă la școală, unde, împreună cu colegii săi, hotărîse să înfrumusețeze parcul. Cîte file avea cartea dacă i-au mai rămas de citit cu 21 file mai puțin decît $\frac{3}{4}$ din carte?

I. Davidică

E : 2575. O sumă de bani a fost împărțită la trei persoane astfel : a doua persoană a primit cu atîția lei mai mult ca prima cu cît a primit a treia persoană mai mult ca a doua. Să se afle suma și cît a primit fiecare persoană știind că prima a primit o cincime din întreaga sumă care este cu 15 lei mai mare ca diferența dintre sumele primite de a treia și a doua persoană.

C. Tăușanu, Roman

E : 2576. Un biciclist parcurge drumul de la A la B în 2 ore și 72 minute, mergînd în prima oră $\frac{2}{5}$ din tot drumul, în ora a doua $\frac{5}{6}$ din drumul rămas, iar în ultimele 12 minute restul drumului.

Să se afle lungimea întregului drum știind că în cele 12 minute a mers cu $19\frac{1}{5}$ km mai puțin decît în primele 2 ore.

A. C. Corlan, Gilort

E : 2577. Să se calculeze expresia :

$$E = \frac{\left[1,(5) + 1\,\frac{20}{45}\right] \cdot \left(2,17 - \frac{11}{50} + 2\,\frac{3}{5}\right)}{[0,4(13)+0,5(86)] \cdot (\sqrt{2,89} + \sqrt{0,0025})} \times \sqrt{\frac{1225}{19881}}$$

T. Militaru, Giurgiu

E : 2578. Să se efectueze :

$$\left[0,78 : 2,6 + \frac{77}{90} : \left(6 - \frac{2,3+5:6,25}{8.0,0125+6,1}\right)\right] : \sqrt{1\,\frac{781}{900}}$$

Concursul de matematică 1966, clasa VI, București

E : 2579. Barajul și lacul de acumulare ale unei hidrocentrale electrice permit irigarea unei suprafețe de 320 000 ha.

a) Să se calculeze cantitatea de cereale pe care o produce această suprafață irigată, știind că pe o suprafață irigată de 250 000 ha se obțin 48 000 vagoane cereale.

b) Să se afle sporul de producție obținut în urma irigării celor 320 000 ha, dacă înainte de irigare de pe 1200 ha din acest teren se obțineau 150 vagoane cereale.

Concursul de matematică 1966, clasa VI

E : 2580. În triunghiurile ABC și $A'B'C'$ se duc înălțimile AD, $A'D'$ și medianele BE și $B'E'$. Să se demonstreze că aceste triunghiuri sînt egale dacă :

a) $AB = A'B'$; $AC = A'C'$ și $AD = A'D'$

b) $AB = A'B'$; $AC = A'C'$ și $BE = B'E'$

Concursul de matematică 1966, clasa VI, București

E : 2581. La un aprozar s-au vîndut 1500 kg de pere și o cantitate de struguri care reprezintă 0,63 față de cantitatea de pere, încasîndu-se în total suma de 7507,5 lei.

Știind că un kg de pere s-a vîndut cu 80% din cît s-a încasat pe un kg de struguri :

Să se afle costul unui kg de pere și al unui kg de struguri.

B. Baeră, Păunești.

E : 2582. Organizînd o excursie de 3 zile pionierii unei școli au parcurs intinerariul prevăzut astfel : cu trenul 22% din distanță și încă 15 km cu mașina $\frac{5}{6}$ din distanța rămasă, iar restul distanței, care reprezintă 12% din tot itinerariul au parcurs-o pe jos.

Cîți km au parcurs cu trenul, cu mașina și pe jos?

Nelu Dobre, Merei, Buzău

E : 2583. La o cooperativă raională lucrează două echipe de muncitori. Contabilul cooperativei a observat că raportul numerelor ce reprezintă numărul de muncitori din cele două echipe este 2/3 iar dacă numărul muncitorilor din fiecare echipă ar fi cu 9 mai mare raportul muncitorilor din cele două echipe ar fi 5/6. Se cere :

a) Să se afle numărul de muncitori din ambele echipe.

b) Cîți membri avea fiecare echipă,

c) Cîți membri ar trebui angajați, în mod egal la ambele echipe, pentru ca raportul membrilor să fie 7.

Concursul de matematică 1966 la cl. VI, reg. Crișana

E : 2584. Pe latura OX a unui unghi XOY se iau două segmente OA și OA' ; iar pe OY segmentele OB și OB' egale respectiv cu OA și OA'. Dreptele AB' și $A'B$ se taie în I. Să se arate că :

a) Triunghiurile OAB' și OBA' sînt egale .

b) Triunghiurile $A'AI$ și BBI' sînt egale.

c) OI este bisectoarea unghiului XOY.

Concursul de matematică 1966, clasa VI, reg. Crișana

E : 2585. O cooperativă agricolă de producție specializată în legume timpurii a vîndut în primăvară o cantitate de castraveți, roșii și marule în valoare de 36278 lei cu prețul de 12 lei kg. de castraveți, 8 lei kg de roșii și cu 2 lei kg de marule. Știind că raportul dintre cantitatea de castraveți vîndută și cantitatea de roșii este de 3 :5, iar cantitatea de marule se raportă la cantitatea de roșii ca $\frac{7}{10} : \frac{2}{5}$, se întreabă ce cantitate de castraveți, roșii și marule a vîndut cooperativa agricolă de producție.

V. Ionescu, Botoșani

E : 2586. Să se afle două numere A și B știind că A este $\frac{3}{5}$ din B, iar dacă A ar avea cu 20 mai mult, atunci B ar fi de 1,25 ori mai mare decît A.

Gh. Nistor, Buzău

E : 2587. Dorind să ajungă într-un oraș, un motociclist întrerupe la $\frac{1}{4}$ din distanță și stă 15 minute, timp în care ar mai fi parcurs 10 km. Știind că restul distanței motociclistul ar fi parcurs-o, dacă nu ar fi întrerupt, în 3 ore și 30 minute și că viteza este tot timpul constantă, să se afle lungimea drumului.

I. Copaie, Sibiu

E : 2588. Suprafețele cultivate cu căpșuni în acest an în țara noastră însumează 2600 ha. Dacă suprafața cultivată separat cu căpșuni ar crește cu $\frac{25}{100}$, iar suprafețele cultivate intercalat în livezi s-ar dubla atunci cele două suprafețe s-ar egala. Să se calculeze :

a) Suprafața cultivată separat cu căpșuni.

b) Suprafața cultivată intercalat în livezi cu căpșuni.

I. Munteanu, Vaslui

E : 2589. a) O echipă de 42 muncitori lucrînd cîte 8 ore pe zi termină în 33 de zile, 11/33 dintr-o lucrare. Se întreabă cîți muncitori mai trebuie să fie angajați ca lucrînd împreună cu echipa inițială, să termine lucrul cerut în 18 zile, lucrînd cîte 7 ore pe zi, cu aceeași productivitate.

b) Raportul a două numere este de 3/2, iar diferența lor este 30. Găsiți cele două numere folosind și proporțiile derivate.

c) În triunghiul oarecare ABC se dă înălțimea AD pe latura BC și apoi segmentele $BE = DC$ și $CF = BD$ perpendiculare respectiv pe AB și AC. Să se arate că triunghiul AEF este isoscel.

d) Fie B' și C' proiecțiile lui B și C pe AE respectiv AF. Să se arate că există relația $\frac{AB'}{AC'} = \frac{AB^2}{AC^2}$.

Concursul de matematică 1966, cl. VII, reg. Crișana

E : 2590. Să se construiască un triunghi cunoscînd unul din unghiuri şi distanţele ortocentrului la laturile acestuia.

Gh. Ortocol, Făgăraş

E : 2591. Unghiurile A şi B ale unui triunghi sînt de 60° şi respectiv de 45°. Din piciorul D al bisectoarei unghiului A ducem pe latura AB perpendiculara DN care intersectează latura AC în M. Să se demonstreze că :

a) Triunghiurile ADC şi ADM sînt isoscele.

b) $AC = \frac{2}{3} MN$. c) $AC^2 = AB \cdot CM$

Tache Ştefan, Cîmpina

E : 2592. Dacă :

$$\frac{a_1}{a_2 + a_3 + \cdots + a_n} + \frac{a_2}{a_1 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n} + \cdots + \frac{a_n}{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots a_{n-1}} = 0$$

atunci

$$\frac{1}{a_2 + a_3 + \cdots + a_n} + \frac{1}{a_1 + a_3 + \cdots + a_n} + \cdots + \frac{1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}} =$$

$$= \frac{n}{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}$$

(Generalizarea problemei E : 1923)

Ovidiu Popescu, C. lung Suceava

E : 2593. Dacă A şi B sînt numere întregi care satisfac relaţia :

$$1936\ A + 30\ B = \mathfrak{M}\ 983,$$

atunci ele satisfac şi relaţia

$$2\ (A - B) = \mathfrak{M}\ 1966.$$

D. M. Bătineţu, Iaşi

E : 2594. Ca urmare a progreselor realizate în înzestrarea tehnică a agriculturii ţării noastre, numărul tractoarelor de la o staţiune de maşini şi tractoare a crescut în 1965 cu 150% faţă de 54 tractoare avute în anul 1959.

a) Ce suprafaţă arabilă a deservit această staţiune în anul 1959 dacă la 6 tractoare reveneau 1620 ha teren arabil?

b) Ce suprafaţă arabilă a deservit staţiunea în anul 1965 dacă în acest an suprafaţa repartizată pentru 9 tractoare a fost egală cu cea repartizată în anul 1959 pentru un număr de 4 tractoare?

c) Care este numărul tractoarelor (fizice) cu care a fost înzestrată agricultura țării noastre la sfîrșitul anului 1965 dacă 15% din acest număr este de 90 de ori mai mare decît numărul tractoarelor pe care le-a avut *S.M.T.*-ul în același an?

Concursul de matematică 1966, clasa VII, Ploiești

E : 2595. Se dă un trapez isoscel $ABCD$ cu AB baza mică, CD baza mare și înălțimea de 6 cm. Raportul bazelor este 0,(6), iar semisuma bazelor (linia mijlocie) este de 12,5 cm. Prin punctul O de intersecție a diagonalelor se duce o dreaptă paralelă cu bazele, care taie laturile neparalele în M și N (M pe AD și N pe BC).

a) Să se afle perimetrul trapezului.

b) Să se arate că $CD.BN = AB.NC$.

c) Prelungind laturile neparalele, acestea se întîlnesc în punctul P. Să se afle perimetrul triunghiului PAB.

Concursul de matematică 1966, clasa VII, București

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

Soluții bune primite pînă la 1 iunie 1966 de la:

SINAIA *L.* cl. X Bucur Vasilica (7364, 77, 9, 98, 400, 5, 16. 23, 5, 16, 23, 6, 4,1 9, 50), Hulpe Hermonia (2445—7, 62, 74, 68, 7325, 68, 437, 42), Stroică Petre (2445, 6, 7. 62, 3, 74, 7325—8, 97, 437, 42).

SÎNNICOLAUL MARE (Banat) *L.* cl. V Cecan Lidia (2433, 3—44, 53—5), cl. VIII Denyer Elena (2460—2, 74—8, 92, 4), Tunariu Eugenia (2431, 7, 40, 7, 50, 2, 60—2), Sîrbescu Eubgenia (2431, 45—7, 50, 2, 60—2), Vințan Liana (2431, 2, 9, 40, 2, 5—7).

SÎNTANA (Crișana) *L.* cl. VIII (2450, 2—5, 60, 2, 4—8, 77, 8).

SIRET (Suceava) *L.* cl. V (Jarcău Cristina (2429—32, 4, 8, 50, 3), Munteanu Viorel (2429—32, 4, 8, 50—3, 67), Sandru Otilia 2429—33, 4, 8, 50—3), Vitvițchi Antonina (2429—32, 4, 50, 2, 3), cl. VIII Breabăn Vasile (2431, 4—8, 40, 5, 6, 9), Tumac Gheorghe (2429, 31, 2, 8, 45, 6, 50, 62), Rudișteanu N. (2430, 2, 41, 2, 5—7, 62), cl. IX Patras Niculina (2429, 60, 2, 3, 7325, 98, 9, 4, 37, 8, 41, 4), cl. X Tiniuc Vasile (7314, 7, 8, 20—7, 98, 9, 425, 52).

SLĂNIC. *L.* cl. XI Beicu Adrian (7311, 37, 45, 73, 6, 90, 411, 2, 8, 24, 30, 7, 41, 85, 94—7, 9, 50).

SLATINA *L. 2* cl. VI Dragomirescu Ștefania (2429, 31, 2, 32, 50—3), Naicu Șerban (2429, 31, 2, 4, 50, 3, 64—7), Săraru Lucreția (2440, 50, 2—6, 84), Spoitu Constantin (2429, 30, 1, 4, 5, 54, 65, 8), cl. IX Mateescu Aurel (2444—9, 61, 2, 94, 7325, 494—6, 502) Voinea Vasile (7314, 8, 48, 9, 64, 72, 7, 9, 82—62), cl. XI Gheorghe Ion (7312, 5, 9, 24, 48,, 56, 9, 62, 4, 8, 72—81, 3).

STOICĂNEȘTI (Argeș) cl. VI Ilie Marieta (2429—42, 2454).

STOENEȘTI (București) cl. VIII Năchilă Petre (2443, 6, 52, 6, 64, 7, 71, 2, 83, 90).

SUCEAVA. *L.* cl. X Cazan Sergiu (7317, 4, 7, 8, 21—3, 25, 6, 8, 35, 60, 4, 72, 15), Filipescu Gh. (7313, 4, 7, 8, 20, 1—3, 25—7, 28, 35, 8, 60, 4, 72—8, 400—3), *Tabarcea Petre* (7313, 7, 8, 20, 22—30, 35, 7, 9, 42, 7, 64, 72, 3, 5—8, 91, 7—9, 400—5, 10, 13, 8, 23, 6, 30—2, 7, 8), *Zavera Ion* (7288—9, 309, 17, 8, 20, 3, 5—8, 35, 42, 64, 72, 3, 5, 95, 7, 8, 402, 4, 18, 24—5, 30, 50, 2, 4, 6, 67, 77, 9, 80, 2, 90, 4—6, 99, 505).

STRAVANE DE JOS (Galați) *Ș. g.* cl. VI Bucă Veronica (2429—34, 8, 9, 41, 2), Popa Adriana (2429—33, 7, 8, 9, 40—2), Popa Eleonora (2426—34, 8, 9, 41, 2), Zgăbei Elena (2429—33, 78, 9, 40—2).

TEACA. *Ș. g.* cl. V Pop Zenovia Doina (2429—32, 4, 8, 44, 5), cl. VI Preda Valeriu (2430—2, 4, 8, 9, 41, 4).

TECUCI. *Ş. g. 1* cl. VIII Gherasim Aurel (2439, 41, 53, 60, 2, 3, 74, 5, 7, 8), *Ş. g. 5* cl. VI Fulger Magdalena (2429—39, 41, 2, 50, 3—5), cl. VIII Bujor Violeta (2431, 2, 8, 9, 41, 50, 3, 5, 6, 2, 8), *Ş. g. 6* cl. VI Constantin Lili (2429—32, 4, 8, 9, 50, 4), *L. 1* cl. V Nicoară Marilena (2432, 4, 50, 64—7, 79, 80), cl. VI Cimpoeşu Viorica (2431—3, 8, 9, 41, 54, 64, 7), Ciucă Maria (2432, 8, 9, 41, 2, 53, 65, 79, 84, 9), cl. VII Hagui Mariana (2429—31, 4, 8—42, 7), Lupaşcu Aurora (2429—32, 7—42, 50—7, 61), Soare Adriana (2429—31, 4, 8—42), Teodorescu Anca (2429—31, 4, 8—42, 7), cl. X Cojan Dumitru (7313, 4, 7, 8, 22, 5, 6, 8, 85, 7, 424, 30, 95, 6), cl. XI Baniţă Mihai (7372, 3, 8, 413, 24, 5, 8—30, 2, 83, 91, 3—500, 20), Chiriacescu Mircea (7313, 4, 7, 8, 20, 4—6, 8, 35, 9, 77, 9, 84), Oproiu Janeta (7377, 9, 82—5, 413, 23, 5, 9, 30. 83, 14—6), Sevastre Ion (7311—4, 7, 8, 20, 3, 39, 72, 3, 6—8), Trifan Victor (7314, 7, 8, 20, 5, 6, 39, 77, 83, 4, 91, 430, 7), *L.* 2 cl. VIII Babaru Rodica (2430, 1, 4, 9, 41, 65—8, 70), Velicu Dumitru (2430, 1, 4, 9, 41, 50, 3, 64, 6), Negru Viorel (2431, 2, 4, 8, 9. 41, 53, 60, 2), cl. IX Donciu Dinel (2444—7, 9, 60, 2, 74, 8, 7325, 5, 8, Păunescu Liviu Doru (2444—7, 60—3, 78, 7317, 8, 22, 5, 85).

TELEGA. *Ş. g.* cl. VII Gurbet Ecaterina (2429—32, 4, 8, 9, 41, 2, 4, 50, 2—6, 62, 7 70, 1). cl. VIII Bucătaru Mihai (2429—32, 4, 8, 9—42, 4, 6, 7, 7325).

TIMIŞOARA. *Ş. g. 5* cl. V Dumitru Carmen (2410—3, 30—2, 50—3), Neagu Liviu (242, 32, 4, 53, 64, 5, 7, 79), cl. VI Bonfert Erhard (2429, 30, 3, 8, 9, 41—3, 54, 5), *Şc. muzică şi arte plastice* cl. VIII Mitrofan Lucia (2430, 1, 4, 9, 40, 1, 5—7), L. Eftimie Murgu cl. V Butoianu Eugen (2410—4, 30—2, 50, 1, 3), *L. 1* cl. VII Stoian Catina (2429—31, 8—42, 4), cl. VIII Popa Octavian (2429—31, 45, 6, 50, 3, 60, 2), *L. 2* cl. VIII Băcean Aurel (2429—32, 4, 5, 8—41, 3—9), cl. IX Boleanţi Alina (2460, 2; 7325, 82, 5, 98, 437, 49, 74, 8, 94, 6), Czeigler Veronica (2444—8, 60—2, 7325—8, 97, 9, 401), Gross Gabriel (2460—2, 76—8, 7317, 8, 39, 82, 5, 97, 401), Divo Michel (2444—7, 60—3, 75—8, 7325, 6, 8, 437), Haslinger Perlinde (2444—6, 60—2, 74, 7, 8; 7325, 6, 8, 37), Hermine Hames (2444—7, 60—2, 74, 7325, 6, 8, 37), Hilde Boschi (2444—6, 60—2, 74, 5, 7, 8, 7325, 6, 8), *Raţiu Tudor* (2444—9, 60—3, 74—8, 7317, 8, 23—6, 8, 39, 72, 3, 82, 5, 97, 9, 401, 23, 5, 30, 7, 8, 40, 2), Sinca Adela (2444—6, 61, 2, 74, 5, 7, 8, 7325, 6, 8), Wagner Cornel (2445—9, 60—3, 7317, 8, 5, 6, 8, 39), *L. 7* cl. VIII Catrina Diana (2480, 1, 3—5, 8—91), Popovici Minola (2429, 38, 9, 41, 2, 7, 50, 60, 2, 76, 7), *L. 10* cl. XI Rothenstein Ana (7315, 20, 5, 6, 8, 72, 7, 8, 83—5, 9).

TITEŞTI. *Ş. g.* cl. VIII Reţeanu Mihai (2464, 6—8, 72—8, 9, 83, 4, 8—90, 94; 7494, 5).

TÎRGOVIŞTE. *Ş. g. 2* cl. VI Mihai Eugen (2429, 35, 7, 41, 2, 54, 65, 7), cl. VII Borcea Dan (2431, 2, 5, 8, 42, 50, 2—5, 61, 83, 8). Duduleanu Mihaela (2430, 2, 4, 5, 8, 9, 41, 53, 5, 61, 83, 4), Dumitrescu Marilena (2430, 2, 4, 5, 8, 9, 41, 54, 5, 61, 79, 84), Gheorghiu Paula (2429, 32, 5, 8, 9, 41, 2, 54, 5, 9, 61, 84), Mîrsescu Anda (2429, 5, 8, 41, 2, 55, 61, 84, 9) , Istrătescu Cristian (2432, 5, 8, 9, 41, 2, 50, 3, 51, 61, 5, 7, 8), Manafu Ileana (2432, 5, 8, 9, 41, 53—5, 61, 84, 8), Marin Maria (2430, 4, 5, 8, 7, 41, 2, 54, 5, 61, 79, 84, 9), Petre Emilia (2430, 2, 4, 5, 8, 9, 41, 50. 4, 5, 61), cl. VII *Chivăran Laura* (7314, 18, 22, 5, 6, 8, 2429—32, 4, 6—50, 3—6, 60, 3), Predescu Marlena (2431, 2, 8, 9, 41, 2, 52, 60, 2), *Gr. şc. petrol* I. Mihăilescu Dumitru (2410—2, 9, 21, 31, 4, 9, 40, 2, 6, 50, 2, 5, 7), Popescu Ioachim (2430, 1, 2, 4, 8, 40, 1, 2, 6, 50, 2, 3, 5, 6, 60, 2, 5, 7325), *L. 1* cl. V Grigoriu Sanda (2429, 31, 2, 50, 3, 64, 5—7) cl. VIII Popa Cornel (2429, 52, 64—7, 9, 72, 4, 7, 7326), *L. 2* cl. VII Ladunovici Daniela (2431, 2, 5, 8, 9, 41, 2, 50, 3—5), cl. X Florea Ion (7314, 20, 1, 43, 60, 72, 3, 5, 6, 9, 91, 9, 423—5, 30), cl. X *Soare Nicolae* (7312—4, 8, 20, 1, 4, 7, 33, 5—7, 60, 4, 6, 73, 4, 6—8, 85, 91, 5, 7—400, 2, 5, 6, 18, 23—6, 30, 7, 8, 41, 50, 2, 4, 77, 9, 80, 90, 4—7, 9, 514, 28), cl. XI Bănică Aurel (7312—4, 89, 403, 23—5, 30, 2, 7, 47, 50, 2, 64, 7, 77, 83, 90, 4, 6, 505, 27), *Enache Gheorghe* (7356, 9, 60—2, 4—7, 72—89, 91, 5—7, 402, 4—6, 9—13, 8, 22—30, 2, 3, 7, 8, 11, 47), Pîrvu Constantin (7364, 76, 9, 91, 9, 400, 6, 23—5, 7, 8, 30, 3, 7, 8, 42, 750), *L. 3* cl. X Ghinea Nicolae (7214, 7, 8, 32, 3, 37, 72, 3, 5, 7, 9, 423—5, 30, 52), cl. IX Rusu Virgiliu (2444—7, 60—4, 78, 7325, 6, 8, 318, 85, 94, 6), cl. XI Ştefănescu Călin (7314, 7. 8, 20—5, 5, 6, 35, 9, 40).

TÎRGUL BUJOR. *L.* cl. V Tibirnă Vasile (2429, 31, 2, 50, 1, 3, 64, 68), cl. IX Mitu Serea (3429—32, 4, 41, 516, 54, 5, 60, 2, 74, 5, 78, 7397).

TÎRGU CĂRBUNEŞTI. *L.* cl. X Iorga Gheorghe (7317, 8, 23, 7, 33, 5, 87, 406, 635, 5, 30, 7, 52, 4), *L.* cl. X Jianu Rosnel (7318, 21, 2—8, 33, 5, 9, 602, 7980, Preda Petre (7318., 21, 7, 8, 33, 5, 202, 23, 4, 5, 37, 50, 79, 30).

TG. JIU. *Ş. g. 4* cl. VIII Butiuc Liliana (2430, 1, 2, 8, 9, 34, 40, 1, 50, 3, 4, 5, 67, 70), Comănescu Rodica (2431, 2, 4, 40, 1, 50, 3, 64, 5, 7, 8), Croitoru Florentin (2471, 2, 4, 9, 101, 50, 3, 4, 5, 8), Drăgăescu Lidia (2429—4, 8, 9, 91, 52, 3), Drulă Marilena (2434, 53—5, 65), Pintă Ion (2430, 1, 4, 41, 5, 50, 2, 7325), Eugen Mariana (2432, 4, 8, 9, 41, 2, 3, 53, 4, 5, 8), Marinescu Rodica (2430, 1, 2, 4, 8, 9, 40, 1, 50, 3, 4, 5, 67, 70, 81), Peptan Marinela (2430, 1, 2, 4, 8, 9, 41, 53, 4, 5), Popescu Miron (2429, 34, 38—45), Vlădoiu Dorel

(2430, 1, 4, 41, 5, 50, 2, 3, 7, 7325), *Ş. g.* cl. VIII Creţan Doina (2431, 2, 8, 9, 40, 2, 5, 6, 7), *L. T. V.* cl. IX Cîrstea Maria (2471, 2, 8, 93, 7385, 97, 477, 94, 5, 6, 7, 505), Lumuzeanu Constantin (2444—6, 9, 60, 2, 3, 74, 78, 92, 94, 7386), cl. X Olaru Oxifor (7314, 8, 20, 3, 5, 6, 72, 4, 5, 7, 9, 85, 7, 91), cl. XI Duncea Florin (7511, 7, 813, 7, 8, 421, 35, 6, 97, 99, 520), *L. 2* cl. X *Cornea Dumitru* (7314, 7, 8, 20, 2, 3, 5—8, 32, 5, 9, 42, 7, 51, 60, 6, 73, 5, 7, 8, 9, 98, 9, 400, 2, 23, 26, 30, 7—9, 50, 3), Drugă Florea (7323, 3, 35, 42, 6o, 6, 72, 4, 7. 91, 8, 400, 4, 7, 430, 37), *Diaconu Ilie* (7314, 7, 8, 20—3, 5—8, 32, 5, 7—9, 42, 9, 60, 64; 72—5, 7—9, 91, 97—400, 2—4, 6, 18, 25, 30, 7, 9, 53).

TG. MUREŞ. *Ş. g. 8* cl. VIII Socaciu Alexandru (2440, 1—4, 71, 2, 88—91), *L. 1* cl. VI Mera Alexandra (2443, 54, 64, 5, 6, 7, 71, 2), cl. VII. Borda Caius (2429, 30, 1, 2, 4, 8, 9, 41, 5), Dragotă Adrian (2434, 50, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9), Löbi Alexandru (2431—4, 9, 41, 2, 6, 50, 64, 7), Mincovici Crina (2450, 52—55, 64, 5, 7, 76), Moldovan Rodica (2431, 4, 7, 8, 41, 54, 64, 5), Poliac Marius (2450, 3—5, 64—8), Sonnenfeld Gabriel (2432, 40, 1, 2, 51, 3, 4, 61), cl. IX Turcu Claudiu (2425, 8, 45—7, 9, 7284—8, 7325—8), cl. X Pasat Gheorghe (7317, 8, 21—3, 5, 6, 34, 48, 73, 5, 97—400, 2, 5, 18), cl. XI Doboş Alexandru (7311, 7, 20, 6, 8, 39, 40, 3, 72, 3, 5, 7, 90, 6, 9, 413).

TG. NEAMŢ. *L.* cl. VIII Conulă Cireşica (2431, 2, 4, 7, 8, 9, 41, 2—4), Vasiliu Doina (2429—32, 29, 6, 8—42, 4, 5).

TÎRNĂVENI. *L. 1* cl. X Popa Tiberiu (2445—7, 9, 60, 2, 3, 74, 6, 321, 5, 6, 8, 85, 97—9, 437), cl. X Gruia Călin (6320, 34, 5, 3, 42, 60, 75, 85, 97, 400, 23—5, 30, 50, 2, 4), cl. XI Dahinovici Gheorghe (7318, 20, 5, 6, 8, 30, 9, 72, 3, 5, 8, 9, 82, 3—5, 423, 4, 8, 5), *L. 2* cl. IX Halter Judith (2429—32, 4, 8, 9, 41, 2), cl. VIII Fabian Maria (2431, 2, 4, 7, 40, 3, 4, 6), Patakzalvi Laszlo (2420—32, 4, 9, 40—2, 4—6).

TOHANUL VECHI *Ş. g. 2* cl. VII Zamfir Nicolae (2429—32, 7. 8—42).

TOPLIŢA. *L. 1* cl. VII Braie Viorel (2430, 1, 4, 9, 50, 3, 5, 65, 8).

TONNEC *Ş. g.* cl. VIII Nagy Iuliana (2431, 40, 6, 50, 2, 3, 60, 2).

TRUSEŞTI. *L.* cl. VIII Michim Doina (2429, 30, 3, 6, 7, 8, 41, 3, 6, 52, 4, 5, 6, 63, 5—72, 4, 5, 8). cl. X Berbece Mihai (2444—6, 9, 7325—6, 8, 7397, 437, 8, 4), Ciobanu Maria (2444—6, 9, 60, 2, 3, 74, 5, 8, 7325, 6, 8, 98, 437, 38), Vieru Sergiu (2445—7, 9, 60, 2, 3, 74, 8, 7325, 6, 8, 97, 8, 437, 8, 41), cl. X Livadaru Emil (7313, 4, 8, 23, 6, 30, 1, 5, 9, 47, 70, 87, 95, 400, 1, 2, 23, 4, 5, 32, 7, 54, 30), Roşu Mircea (7284—8, 91, 2, 300, 13, 7, 8, 20, 2, 5, 6, 8, 47, 73, 5, 7, 9, 85, 97).

TUDOR VLADIMIRESCU (Galaţi) *Ş. g.* cl. VIII Cana Ştefan (2444—6, 9, 60, 1, 2, 74, 7326, 8).

TUFEŞTI. (Brăila) *Ş. g.* cl. VII Văsii Aneta (2429, 30—2, 4, 5, 8, 40).

TULCEA. *L. 1* cl. VII Contescu Vlad (2429—34, 44, 53), Enache Gheorghe (2431, 3, 4, 6—42), cl. VIII Sevastianov Paulina (2419, 34, 8, 41, 50, 3—5, 60, 2), cl. IX Manidic Maria (2444—9, 61, 2, 74—6, 8, 8, 7326, 8), Vasiliu Mariana (2444, 5, 60—3, 75, 6, 8, 7325—7), cl. X Petrov Laurenţiu (7317, 20, 2, 35, 66, 72, 3, 5, 9, 82, 402).

TURCEŞTI. *Ş. g.* cl. VII Tudorică Aurel (2429—32, 4, 8, 9, 41, 2, 8).

TURDA *Ş. g. 1* cl. VIII Toma Adela (2438—41, 5—7, 50—2, 5, 60), *Ş. g. 6* cl. VII Chintoveanu Zoiţa (2429, 32, 4, 6—9, 41, 2), *L. 2* cl. VI Leoca Şerban (2429—32, 4, 5, 8, 9, 50, 2, 3), *L. M. Vîlcazu* cl. IX Chişu Ioan (2431, 3, 8, 41, 8, 61, 2, 76—8; 7326), cl. XI *Bogdan Mircea* (7104, 272, 6, 82, 300, 1, 9, 17, 8, 20, 3, 5—8, 35, 9, 40, 2, 372—5, 7—9, 82, 4, 5, 91, 8, 403, 23—5, 20, 2, 5, 6, 9, 46, 50, 2, 3, 7, 65, 83, 7, 94, 6), Chişiu Ion (7314, 7, 8, 20, 5, 6, 8, 323—5, 30, 2, 7, 8, 41, 60), Pătrunjan Nicolae (7320, 6, 8, 39, 59, 72—4, 7, 83, 4; 411, 25, 30).

TURNU MĂGURELE. *L. Unirea* cl. X Blejan Florea (7372, 423, 5, 41, 76, 7, 9, 80, 90, 4—7, 502).

TURNU SEVERIN *Ş. g. 1* cl. V Berbece Marioara (2429, 31, 2, 64, 5, 8, 81, 1), Căplescu Elena (2429, 31, 2, 50, 64, 5, 8, 79, 80), Liţcanu Liliana (2429, 31, 2, 50, 64, 5, 8, 81), Marina Doina (2429, 31, 2, 64, 5, 8, 80, 1), Roman Viorica (2429, 31, 2, 50, 64, 5, 8, 80), cl. VII Căplescu Julieta (2429, 31, 2, 8—42, 50, 4, 5, 61, 4—8, 70—2,7), Pănescu Florica (2464, 5, 7, 70, 80, 1, 3—5, 9), Stocher Marina (2450, 2—5, 7, 61, 4, 5, 7, 73, 7, 9, 81, 3—6, 8, 92), *Ş. g. 10* cl. VI Ilinca Ion ((2430, 1, 4, 8, 50, 2, 3, 67), Ionescu Valeria (2430, 1, 4, 8, 50, 2, 3, 68), Tescaru Elena (2430, 1, 4, 8, 50, 2, 3, 69), *L. 1* cl. VI Anghelescu Anca (2431, 2, 8, 9, 41, 2, 53—5), cl. VII Ciucă Valentin (2429—32, 4, 8, 9, 41, 2, 3, 5, 8, 50, 2—4, 5, 59), Sarvasi Andrei (2429—32, 4, 8, 41, 4, 53), cl. IX Sevici Constantin (7385, 24, 5, 30, 7, 42, 52, 4, 75—8, 82, 7, 502, 14, 23, 7), cl. XI Ionescu Mihai (7311, 4, 5, 7, 8, 20, 3, 5—8, 33, 5, 9, 43, 59, 73—5, 7, 89, 90, 7, 8, 403, 13, 23, 30, 7), *L. 2* cl. VI Biban Nicolae (2429—31, 50, 2, 3, 65, 7).

TUTOVA *Ş. g.* cl VII Grigoraş Ana (2450, 2, 3, 5, 6, 64—8, 70).

SCHFEUMER *Ş. g.* cl. VI Gurean Doirnel (2430—2, 38—42, 53), cl. VII Antone Haralambie (2431—3, 8, 9, 41, 53—5), Iliuţ Maria (2429, 31—3, 38, 9, 41, 2, 53, 4).

ŞERCAIA (Braşov) *L. 1* cl. X Gereb Olga (7317, 8, 20, 4, 6, 34, 72, 402—4, 32, 52).

SIEU (Odorhei) *Ş. g.* cl. VIII Agrişan Lucia (2411—3, 17—9, 28—32, 37—41, 44—5, 53, 62).

SIRIA (Arad) *Ş. g.* cl. VI Pusztov Ilonka (2429, 34, 38, 40, 45, 50, 4—6, 69, 70).

SISEŞTI (Oltenia) *L.* cl. IX Tiru Doru (2445—7, 9, 61—3, 74, 7317, 18, 21, 25, 6, 8, 98, 9, 437, 843).

SOMCUŢA MARE (Maramureş) *L.* cl. IX Varga Liviu (2244—7, 9, 60, 2, 7317, 8, 21, 25, 6, 8, 97), cl. X Mureşan Emil (7317, 20—8, 35, 7, 42—5, 77, 87, 97, 99), cl. XI Hotea Gheorghe (7320, 3, 5, 6, 8, 35, 7, 9, 42, 73—5, 7—9, 97, 84, 9, 410).

SOPOTUL VECHI (Banat). *Ş. g.* cl. VI Cocora Ionică (2430—4, 37—9, 41—6, 53—6).

SOTRILE (Ploieşti) *Ş. g.* cl. VIII Florea Florin (2411, 9, 31, 2, 8, 9, 41—3, 9).

ŞTEFĂNEŞTI (Argeş) *Ş. g.* cl. V Cojocaru Laurenţiu (2429—32, 4, 8, 9. 41, 2), Ionescu Violeta (2429—31, 4, 5, 8, 9, 41, 2), Patriche Cornel (2430—2, 34, 7—9, 41, 2, 50, 53—5, 64, 6), Pavony Violeta (2429—32, 4, 5, 8, 41, 44), cl. VI Popescu Marcel (2432, 4, 9, 41, 53, 5, 64, 6, 70, 89), Savu Nicolae (2432, 4, 42, 50, 3, 64, 67, 70, 89), Vanderdi Ileana (2429, 2, 4, 8, 9, 2, 6, 53), cl. VII Cojocaru Constantina (2429, 32, 4, 5, 7, 8, 9, 41—6), Despin Florica (2429, 30—2, 4, 5, 7—9, 41, 2, 4), Patriche Corinel (2430—2, 4, 5, 7—42, 50, 3—5, 64, 5, 73), Popescu Cristian (2440, 8, 51, 61, 4—73, 7325), Tutuianu Rodica (2421—32, 4, 5, 7—9, 41, 2, 4), cl. VIII Gheorghe Picol (2421—36, 38—49, 7325, 6, 8).

ŞTEFĂNEŞTI (Botoşani) *L.* cl. VIII Simionică Valerian (2432, 4, 8, 9, 41, 2, 50, 3, 5, 62, 74), cl. X Budur Constantin (7317, 8, 21, 2, 5, 6, 8, 30, 73—6, 8, 9, 83, 7, 97, 424, 30, 42).

URECHEŞTI (Galaţi) *Ş. g.* cl. VII Edu Gabriela (2453, 9, 64, 7, 8, 71, 9, 82, 3, 8), cl. VIII Diamandescu Zoica (2431, 2, 4, 8, 9, 40, 5, 52—4, 60, 2).

URLAŢI (Ploieşti) *L.* cl. X *Zotta Dan* (7276, 80, 83, 91—3, 95—301, 320—8, 30, 32—7, 8, 43, 8, 9, 51, 64, 71—5, 7—9, 85, 7, 91, 5, 7, 8, 9, 400, 2, 3, 5, 8, 18).

URLETA (Ploieşti) *Ş. g.* cl. VII I Marin V. Ion (2411, 3, 4, 7, 9, 21, 3, 4, 5, 8).

UŞUREI (Argeş) *Ş. g.* cl. VIII Dincă Ana (2429, 31, 2, 4, 8, 9, 40—2, 5).

URZICENI (Bucureşti). *Ş. g.* cl. VII Dumitrescu Silvia (2429, 32, 8, 9, 41, 2, 4, 54), Pelea Silvia (2429, 30, 1, 4, 9, 41, 2, 4, 53).

VADU CRIŞULUI. *L.* cl. VIII Gavriluţ Ovidiu (2444, 5, 61—3, 74, 7, 83, 7325, 8).

VALEA LUI MIHAI (Crişana) *L.* cl. X Bodea Gheorghe (7317, 8, 21—3, 5, 6, 8, 9, 64, 6, 72—5, 7, 9, 99), Pop Ioan (7317, 4, 7, 8, 20—3, 5—9, 35, 7, 64, 6, 72—5, 7, 9, 91) 7—403).

VALEA STANCIULUI (Oltenia). Absolventă Cismaru Cornelia (7378, 80, 423—5, 7, 8, 30, 3, 49, 50, 2, 6, 82, 90, 4—6, 99, 520).

VASLUI. *L. M. Kogălniceanu* cl. V Horoi Mihai (2430—2, 50, 3, 64—6, 80, 1, 3), cl. VI Cohn Isac (2450, 2—6, 64—8, 79), cl. VII Pralea Maria (2429, 31, 2, 4, 8, 9, 41, 2), Popa Jan (2431, 2, 8, 9, 41, 2, 55, 44).

VADSTRIŢA. *Ş. g.* cl. VI Cismaru Gheorghe (2450, 2, 3, 4, 5, 64, 5, 7, 79, 81, 3, 4, 9).

VĂLENI. *L.* cl. VIII Iliescu Mihai (2429, 30, 1, 2, 4, 9, 41, 2, 50, 2, 3, 5), Glasu Valentin (2429, 31, 2, 4, 41, 52, 4, 5), absolvent Zaharia Ion (7318, 20, 7, 35, 7, 42, 64, 74, 7, 434, 5, 37).

VIŞEU DE SUS. *L.* cl. X Grad Maria (7317, 8, 20, 5, 6, 75, 424, 30, 79, 80, 1, 94, 6, 9), *Trifoi Vasile* (7317, 20—2, 325—8, 330—32, 34, 5, 9, 48, 9, 641, 71, 3—6, 78, 9, 85, 87, 91—3, 95, 7, 8, 402—7, 17, 21, 2), cl. XI *Stoica Ioan* (7312, 5, 25, 8, 33, 4, 5, 7, 8, 40, 3, 56, 9, 60, 4, 6, 7, 72, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 80, 81, 3, 4, 5, 7, 90, 1, 9, 402, 3, 18, 22, 3, 4, 5, 20, 2), *Fiţigău Ion* (7312, 5, 8, 30, 5, 8, 34, 7, 9, 40, 3, 56, 9, 64, 6, 7, 72, 3, 4, 5, 7—85, 7, 90, 9, 402, 3, 18, 22, 3, 4, 5, 30, 32).

VRATA. *Ş-g.* cl. VIII Vlaston Ion (2430, 1, 2, 4, 7, 8, 48, 5, 6, 7).

ZALĂU. *L.* cl. VIII Ilieş Lucia (2429, 30, 1, 4, 6, 50, 2, 3), cl. IX Pop Viorica (2429, 38, 4, 8, 9, 45, 6, 8, 32, 41, 50, 62, 7326, 8), Tatar Vasile (2431, 2, 3, 4, 5, 41, 6, 9, 61, 74, 5, 7326, 8) Vlaicu Iuliu (2444, 5, 6, 7, 9, 60, 2, 74—7, 7318, 38, 8, 444), cl. X Lungu Ion (7332, 5, 6, 75, 5, 7, 87, 96, 402, 5, 10, 18).

ZLATNA .*Ş. g.* cl. VIII Doanca Nicolae (2431, 2, 4, 6, 8, 9, 40, 2, 5, 7).

Pînă la 15 iunie 1965 s-au mai primit soluţii bune de la:

ADAMCLISI (Dobrogea). *L. 1* cl. VIII Ion Ion (E : 2479, 83, 4, 9, 90, 4, 8, 503, 4).

ADJUD (Bacău). *S.g. 1* cl. VIII Negoiţă Doina (E : 2471, 2, 80, 3, 4, 8—90, 8, 503), *S.g. 2* cl. VII Dragomir Geta (E : 2450, 3—5, 9, 64, 79—81, 9), Maftei Gh. (E : 2450, 2, 3, 5,

6,60, 4—7, 71, 4, 81, 4), *L.1* cl. IX Apostol Constantin (E : 2475, 6, 8, 92, 4 ; 7374, 401, 37, 90, 4, 7, 500), Donciu Gh. (E : 2460, 2, 74, 5, 8, 94, 509 ; 7397, 437, 77, 90, 4—6, 505, 27), Mazilu Ion (E : 2460—3, 93 ; 7475, 7, 93—6, 507), Morărescu Mariana (2474, 5, 8, 92, 509 ; 7437, 77, 90, 4—6, 505, 14), Neagu Elena (E : 2475—8, 90, 2, 4 ; 7437, 94—6, 501), Oţelea Constantin (2474, 8, 92, 4, 509, 10 ; 7398, 9, 41, 37, 8, 94, 505, 48, 54*v*), Popa Ionel (2474—8, 94, 509 ; 7437, 78, 94—6, 501), Sacu Manolina (2475—8, 92, 4, 509, 7397, 441, 77, 94—7), cl. X. Canteş Gh. (7366, 72, 4, 82, 403, 5, 23, 5, 6, 32, 8, 41, 2, 6, 50, 2, 3, 64. 8, 75—80, 2, 90, 1, 4, 5, 7, 9, 500, 2, 4, 5, 7, 14, 27, 9, 34—8, 504), Corgoş Constantin (7377, 8, 87 97, 4, 424, 5, 30, 7, 41, 77, 8, 94—7, 500, 29, 36, 54), Gurămultă Dan (7372, 3, 85, 91, 477, 9, 90, 4—7, 9, 505, 11, 4).

AIUD. *S.g.* cl. VII Mafte Doina (2450, 2, 3, 5, 6, 65, 7, 8, 77), L. 1 cl. X Bedö Edmond (7372, 3, 7, 9, 87, 97, 9, 402, 49, 50, 52, 5).

ALEŞD (Crişana). S. Aleşd cl. X Fonai Florian (7437, 52, 71, 9, 80, 3, 90, 4—8), Secară Florian (7424, 5, 30, 7, 77, 9, 80, 2, 90, 4, 5, 9).

ARAD. *L.* cl. VIII Mărgărint Maria (2471, 4, 80, 3, 5, 90, 5 ; 7496) cl. IX Bora Cornelia (2474, 6, 92, 4, 509 ; 7385i 99, 477, 94—7), Bulzan Emilia (2461, 74, 92, 4, 508, 9 ; 7382, 5 94—6, 503), Butaru Ambrozie (2474—8, 92, 4, 509 ; 7494—7), Chevereşan Nicolae (2460, 74, 7, 8, 92, 4, 508, 9 ; 7494—7, 554), Cociş Mariana (E : 2460—2, 76—8, 92, 4, 509 ; 7382, 5, 495), Novac Marioara (2460), 74, 92, 4, 508, 9 ; 7382, 5, 94—6), Pătru Ionel (2460, 3, 74, 6, 8, 7382, 5, 98, 9, 418, 26, 30, 77, 94—7), Socora Ioan (2474, 6, 7, 92 4, 509, 10 ; 7477, 95, 7, 500, 54), Sucigan Ion (2460—2, 76, 92, 4, 508, 9 ; 7382, 5, 94—6), Valea Emilian (2492, 4, 509 ; 7477, 8, 94—7, 500, 2, 27, 54), Zamfirescu Afrodita (2460, 74, 7, 8, 92, 4, 508, 9 ; 7385, 94, 5), cl. X Balla Ion (7379, 92, 3, 7—401, 3, 5, 8, 13, 22, 3, 5, 6, 8, 30, 2, 7—9, 41, 2, 4, 5, 7, 8, 52, 4, 62, 4, 7). *L.4* cl. IX Hirsch Ladislau (2475, 7, 8, 92, 4, 509 ; 7437, 94—7, 500, 2, 54, 6).

ASTILEU (Crişana). *S.g.* cl. VII Albuţ Doina (2452, 3, 5, 65—7, 71, 2, 9, 81—4, 9, 91).

BACĂU,. *S.g.8* cl. VII Andarache Gabriela (2451, 5, 6, 61, 5—6, 70, 1), Cîrlan Carmen (2451, 2, 6, 65—8, 70, 1), L.1. cl. IX Sasu Doru (2460, 2, 3, 74, 6, 92, 4 ; 7437, 75, 7, 95, 6, 502, 3), Sofronie Gh. (2474, 7, 92, 4, 509 ; 7475, 7, 94—6, 502, 54), cl. X Paraschiv Alexandru (7385, 7, 423—6, 79, 80, 90, 4—7, 9, 500, 29, 34, 6, 7), Pacorescu Georgeta (7366, 74, 5, 7, 8, 82, 5, 7, 99, 406, 25, 94, 6, 9), Sava Ion (7372, 7—9, 85, 91, 424, 5, 8, 94, 5, 7, 9), L. 2 cl. IX Constantin Nicolae (2460—3, 74—8, ; 7401, 30, 7, 42, 527), cl. X Jurca Vasile (7346, 6, 72—7, 85, 7, 423—6).

BACCEA—ILIA—HUNEDOARA. absolvent Gherman Emil (2450, 2—6, 61, 2).

BAIA MARE. *S.g. 2* cl. VI Bond Ioan (2450—3, 5—8,) S.g. 3 cl. VI Puja Rozalia (2450, 2—6, 64, 5, 7, 8), cl. VII Martin Alexandru (2453, 64, 5, 7, 79, 81—4, 8), cl. VIII Prigya Ioan (2450, 2—4, 6, 7, 60—3), L.1. cl. IX Pop Gheorghe (2460, 1, 74—8, 92, 4, 509 ; 7502, 54). L. 3 cl. VIII Marinescu Dorin (2460, 5, 7, 8, 71, 2, 83—5, 8, 9).

BALABANCEA (Dobrogea). S.g. cl. VII Bătrînac Simion (2450, 3—5, 64, 5, 7, 70).

BALŞ (Oltenia) *S.g. 1* cl. VI Popescu Geta (2450—7, 61, 2), L. 1 cl. IX Lăcraru Ion (2475, 94, 508—10 ; 7399, 437, 41, 2, 4, 502, 4).

BĂBENI. *L. 1* cl. IX Vasile Constantin (2462, 3, 74—8 ; 7397, 41, 2, 4, 7, 94, 45, 505).

BĂLCEŞTI (Oltenia). *L. 1* cl. X Iliescu Ştefan (7372, 5, 7, 402, 23 6, 50, 2, 79—81, 90, 4—7), Olaru Aurel (7364, 72, 7, 9, 97, 8, 423, 5, 6, 50, 2, 77, 9).

BECHET (Oltenia) *L. 1* cl. X Curcă Marin (7364, 6, 73—7, 9, 87, 7—9), Draga Gheorghe (7405, 24—6, 8, 32, 7, 42, 52, 4, 73, 4).

BECLEAN. *L. 1* cl. X Rusu Florin (7396, 402, 23, 5, 37, 42, 50, 2, 77, 9, 80, 3, 502, 7, 14).

BEIUŞ. *L. 1* cl. VI Toma Aurel (2450, 2—6, 61, 2).

BELINT (Banat). *L. 1.* cl. VI Laichici Cornelia (2468, 70, 1, 7, 80—4, 9), cl. VII Bot Lucreţia (2467, 8, 70, 1, 7, 80—4, 9), Cimponieru Mărioara, Cocavi Viorel, Jivan Elena, Mioc Ecaterina, Mioc Elena, Neghină Dan, Nicoli Florica (2467, 8, 70, 5, 7, 80—4, 9)., cl. IX Borchescu Ioan (2460—3, 76—8 ; 7339, 400, 1, 37, 41, 2, 4), Mioc Maria (2460, 2, 74, 6, 7 ; 7327, 8, 41, 75—7, 99, 502).

BISTRIŢA (Cluj) *S.g. 2* cl. VIII Fucă Tomescu Mihai (2450—6, 61—7, 71, 2, 4—6, 8, 83—6, 8, 9, 91, 4), L. 1 cl. IX Bauman Octavian (2460—3, 76—8 ; 7397, 9, 437, 42, 4), Timofte Corneliu (2477, 83, 508, 9 ; 7370, 4g30, 7, 44, 90, 9, 501, 3, 5, 34, 5, 54).

BIRCA (Oltenia). *L. 1* cl. IX Popa Stefan (2474, 6, 92, 4 ; 7397, 42, 77, 94,—6, 502, 27).

BOLDEŞTI (Ploieşti) *S.g.* cl. VI Enescu Daniela (2450, 3, 64, 5, 7, 8, 80—2), cl. VII Bilciurescu Olga (2450, 2, 3, 61, 4, 5, 7, 70—2, 80—4, 8).

BOLINTINUL DIN VALE (Bucureşti) *S.g.* cl. VIII Chiva Mioara (2450, 62, 5, 72, 4, 5, 80, 4, 90), L. 1 cl. X Chiva Voicu (7364, 6, 72—9, 91, 45, 402—4, 6).

BORDEIU (Ploieşti). *S.g.* cl. VII Vlaicu Maria (2451, 5, 64, 5, 80—3).

BOTOŞANI. *S.g. 2* cl. VIII Urzică Georgeta 2465, 8, 71, 2, 80—5, 8—91), *L.1* cl. IX Brote Ovidiu (2460—2, 74, 6, 8, g2, 4, 508—10; 7554), Dale Ovidiu (2474, 7, 8, g2,4 508—10; 7430, 75, 7, 94—6, 507), Tcaciuc Elena (2460, 2, 72, 4—8, 92, 4, 509; 7550), L. 2 cl. VIII. G. Tama (2471, 2, 82, 3, 5, 8, 90, 2), *S. g. muzică* cl. VI Băjenaru Constantin (2453—5, 6, 7, 81, 3, 4, 89).

BOZOVICI (Banat). *L. 1* cl. VIII Crașovan Mariţa (2450, 2—5, 50, 5, 60—2), Orbulescu Petre (2464, 5, 71, 2, 7, 9, 83—5, 90, 5), cl. XI Burac Iacob (7364, 72—5, 7, 403, 23—5, 37, 52, 77, 90, 4, 9, 505, 27).

BRAD (Hunedoara). *S.g. 1* cl. VIII Beuşam Grigore (2464—7, 70, 1, 8, 83, 8, 91, 2), Dolga Valer (2471, 2, 88, 90—2, 4, 503, 9), Strîmbu Costică (2464—6, 71, 83, 5, 8, 90—2, 4).

BRANIŞTEA (Bucureşti) *S.g.* cl. V Drăgănescu Elena (2464—8, 79—82), cl. VI Drăgănescu Florica, Ghiulea Florica, Giugiucă Mariana, Vişan Ion (2479—86, 8—90), cl. VII Giugiucă Liliana (2464—72, 9—86, 8—90).

BRAŞOV. Danilescu Florin (2450, 3, 61, 8, 71, 2, 80, 2, 3, 5, 8, 90—2, 9), cl. VI Zido Eva (2450—6, 64—70), cl. VIII Buneanu Elena (2450, 2—4, 72, 7, 83, 8, 90—2), S.g. Calber cl. VIII Cocovadă Sorin (2450, 2—6, 60, 2), *L. 1* cl. X Bătătorescu Anton (7371, 2, 4—9, 85, 7, 91, 5, 7, 401—5), *L.4* cl. V Bleahu Cornelia (2450, 2, 3, 5—7, 79—81, 5, 96, 7), Donase Emil (2451—3, 64—7, 98), Ivan Elena (2450, 2, 64—7, 80, 97), Ivanovici Dan (2450, 1, 4, 5, 65, 7, 9, 80), Lukacsy Ecaterina (2450, 2, 3, 64—6, 97, 80, 1, 95, 7), Lupaşcu Cornelia (2438, 51, 3, 64, 79—81, 501), Socol Cormel (2451—3, 64—7, 79), Toia Nicolae (2450—3, 64—7), cl. VII Pavel Florin (2450, 1, 4, 5, 64, 5, 8, 9, 80, 3), cl. VIII Grigoraş Viorica (2450, 4, 61, 5, 71, 83, 8, 91), cl. IX Bulgărea Radu (2461, 2, 76, 7, 93; 7397, 9, 437, 8, 42, 4, 502), *S. muzică.* cl. VIII Tăran M. Petre (2483—5, 8—90, 2, 5, 9), cl. IX Varga Andrea (2474, 5, 8, 92, 4; 7399, 437, 75, 7, 80, 94—6).

BRĂILA. S.g. 7 cl. VI. Serbănescu M. Octavian (2450—6, 64, 5), S.g. 10 cl. VI Florescu Liliana (2450, 2—6, 67, 8), S.g. 12 cl. VIII Canciu Marian (2453, 4, 62, 7, 8, 71, 2, 8), S.g. 18 cl. VIII Vintilă Tiberiu (2450—3, 61, 5, 6, 70), S.g. 22 cl. VIII Dragomir Gh. (2450, 2, 3, 6, 61, 4—6, 8, 71, 2, 4—6), L. N. Bălcescu cl. X Popescu Silviu (7375, 7, 9, 99, 403, 23, 37, 77, 94—7, 9, 514), L. 2 cl. IX Vrabie Viorel (2461, 2, 75—7, 92, 508, 9; 7437, 8, 502)., L. 3 cl. IX Cărbunaru Mihai (2476, 92, 4; 7438, 42, 4, 76, 7, 80, 94, 5, 501), Dumitru Rodica (2460—3, 74, 65, 7, 8, 92, 4; 7397, 9), Mihăilescu Stefan (2460—3, 74—8, 92, 4; 7379, 9, 444), Stanciu Viorel (2460—3, 74—7, 92, 4; 7397, 9), Stirbu Gabriel (2460—3, 74—7, 92, 4; 7397, 9), cl. X Borîndel Elena (7423, 5, 51, 2, 77, 94—7, 9, 9, 503, 9), Bucur Camelia (7372, 5, 7, 423, 5, 25, 4, 77, 80, 94—6), Climescu Alexandrina (7373, 5, 7, 403, 23, 6, 52, 4, 77, 9, 90, 4—7, 9), Enache Marin (2450, 2—5, 60, 2, 4, 7, 8, 71, 5, 8, 80—3, 5, 8, 9—91).

BROSTENI (Oltenia) S.g. cl. VII Bejan Violeta (2453—6, 64, 7, 70, 2).

BREAZA (Ploieşti). L. 1. cl. X *Cîrtoaje Vasile* (7364, 6, 71—8, 85, 7, 97—9, 401, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 3, 68—, 22—6, 3—, 2, 7—9, 42—5, 8—54, 62—4, 7, 8, 70), L. militar cl. X Alexe Marian (7375, 99, 405, 18, 25, 37, 73, 9—82, 94, 5), Andrei Vasile (7364, 72—5, 87, g1, 402, 3, 10, 23—5, 37, 47, 64, 77, 82, 90, 5, 9, 529, 36, 7), Barangă Petre (7372, 7, 402, 3, 23, 5, 32, 7, 50, 64, 74, 9, 80, 2, 4, 94, 9, 529, 35—7, 52, 4, 62), *Bălăşescu Ion* (7385, 7, 98, 400, 2—5, 16, 22, 8, 32, 7, 41, 9—51, 4, 64, 76—8, 84, 90, 500, 5, 9, 10, 4, 6, 29, 34—8, 52, 4, 5, 6o4), Blăjan Petru (7375, 7, 9, 87, 9, 99, 405, 7, 8, 26, 30, 9, 47, 50, 64, 77, 9,82, 90, 4, 5, 7, 8, 9, 501, 11, 4, 25), Bojîncă Dumitru (2424, 5, 32, 50, 83, 99, 513, 29, 34—8), Branea Dorina (7364, 5, 74, 87, 99, 402, 3, 54, 77, 9, 80, 2—4, 95, 7, 9, 534, 5, 7), Orătoiu Cristian (7423, 6, 41, 54, 77, 82, 90, 1, 4—6, 54)., Brobonea Irimia (7373, 5, 7, 9, 98—400, 45, 7, 50, 2, 77, 94, 6, 507, 14, 27), Ceraru Alexandru (7323—5, 32, 52, 96, 9, 505, 7, 29, 34—7) Ciupercă Silvian (7375, 87, 403, 5, 18, 22, 47, 64, 77, 80—2), Cojocaru Gh. (7373, 4, 7, 9, 400, 2, 25, 32, 7, 42, 82, 97, 9, 503, 34, 55, 61, 7, 8), Constantin Stefan (7373—5, 7, 413, 25—7, 9, 50, 2, 9, 96, 7, 505, 20), Dumitru Ilie (7372, 7, 400, 2, 3, 37, 47, 50, 4, 91, 4, 500), Gavri, loară Gh. (7391, 9, 402, 3, 5, 6, 9, 10, 3, 23, 5, 6, 32, 52, 4, 64, 8, 77—82, 4, 7, 90, 1, 3-6, 9, 511, 4), Gheorghe G. (7364, 6, 72—5, 85, 7, 91, 9, 402, 20, 3, 8, 8, 22, 3, 61, 32, 7, 54 77, 81, 2, 91, 3—7, 9), Gheorghe Alexandru (7377, 98—400, 2, 23, 32, 80, 2, 96, 9, 534), Iermuţan Eugen (7373, 4, 403, 5, 37, 45, 50, 2, 77, 80, 2, 94, 6, 5, 14, 16, 37, Iliescu Gh) (7373, 7, 9, 98—400, 2, 32, 77, 94, 6, 403), Ioniţa Dan (7375, 7, 9, 98—400, 2, 23, 50, 2,77, 80, 2, 890, 4—7), 514, 2o7, 9, 34), Insurăţelu St. (7377, 98, 9, 2, 23, 32, 47, 77, 96, 9, 52, 62 Luca a Ioan (7372, 3, 85, 7, 9, 402, 3, 23, 6, 54, 74, 9, 80, 3, 4, 90, 1, 4—7, 9, 554), *Marinache Ion* (7332—5, 7, 8, 98, 400, 2, 5, 23—6, 32, 7, 41, 2, 9, 50, 2, 4, 77, 82, 90, 4—7, 505, 14, 29, 34—8, 54, 5), Mateiu Stefan (7375, 87, 91, 9, 402, 3, 13, 22—4, 6, 32, 40, 64, 80—3, 90, 7, 525, 7, 9, 30, 61), Mihai Valeriu (7364, 72—5, 7, 99, 402, 3, 5, 24, 5, 45, 50, 74, 7, 82, 90, 4—7, 9, 500, 36), *Moise Ion* (7364, 6, 72—5, 8, 87, 91, 9, 402, 3, 10, 3, 8, 33—6, 32, 7, 47, 54, 78—82, 4, 90, 1, 3—7, 9, 500, 29, 34—8, 55), Nedelcu Nicolae (7364, 73, 4, 8, 99

402, 3, 5, 23—5, 32, 7, 47, 64, 79, 80, 2, 3, 90, 4—7, 9, 535—7, 54), Nicoară Nicolae (7423—5, 52, 80, 90, 1, 4, 5, 502, 5, 13, 4, 34—8, 52, 4—6), Nistor Gh. (7425, 52, 4, 6, 77, 80, 94, 5, 534, 54, 96, 9), Obratin Pompilian (7375, 87, 91, 9, 402, 5, 37, 45, 7, 54, 77, 9, 80, 2, 91, 4, 5, 7), Petalea Pavel (7366, 72, 3, 5, 7, 23, 6, 5, 47, 52, 76, 80, 3, 90, 4,5, 7, 500, 5, 7, 29, 35—8, 54, 5, 64), Pîrvulescu Ilie (7375, 91, 9, 402, 24, 5, 37, 9—82, 4, 94—7, 9), Rădulescu Constantin (7375, 99, 402,-23, 77, 80, 4, 94, 6, 527, 9, 35—7, 52, 8), *Scarlat Emil* (7373, 7—9, 87, 98—400, 2, 23, 4, 6, 32, 7, 9, 42, 5, 7, 52, 77, 8, 80, 2, 4, 90, 1, 4, 6, 7, 9, 501—3, 14, 27, 8, 34—8, 52, 4, 5, 61, 4, 7), Sandru Nicolae (7364, 72, 4, 5, 87, 99, 402, 3, 5, 10, 8, 32, 7, 47, 54, 64, 74, 7, 9, 80, 2—4, 94), *Tăleanu Constantin* (3475—82, 4, 5, 90—502, 5, 7, 4—11, 3, 4, 6, 9—21, 3, 5,7, 8), Turcu Andrei (73737, 8, 405, 23, 5, 52, 4, 90, 5, 502, 5, 20, 34, 5, 54), cl. XI Bolovan Gh. (7372—5, 7, 86, 423, 5, 9, 32, 52, 9, 505, 11, 20), Ceuta Virgil (7372—4, 7, 90, 423, 5, 32, 50, 2, 77, 82, 7, 97), Ciogringeanu Nicolae (7372, 7, 8, 86, 90, 423, 5, 50, 2, 82, 90, 4, 5), Ghiță Gh. (7372—4, 416, 23—7, 9, 32, 3, 50, 6, 77, 87), Gonfițescu Constantin (7374, 7, 86, 90, 4, 413, 23—5, 30, 2, 3, 52, 9, 77, 82, 7, 90, 4, 6, 505), Iliesc Traian (7372—8, 83, 4, 6, 90, 6, 410, 23, 37, 52, 9, 65, 83, 8—90, 4, 7, 511), Oancea Constantin (7373, 5, 7, 86, 423—5, 32, 50, 2, 9, 84, 96), Popa Mircea (7359, 72, 4, 7, 90, 4, 425, 32 50, 2, 87, 520), Popescu Ghl. (7362, 7, 73, 4, 86, 90, 423—6, 32, 5, 50, 2, 6, 9, 87, 500) Rădulescu Stefan (7423—6, 32, 3, 50, 2, 9, 87, 62, 72, 3), Toma Constantin (7375, 7, 86, 90, 413, 23, 5, 32, 3, 50, 2, 77, 87, 9, 4, 5, 7), Tufan Teodor (2362, 6, 72—5, 86, 413, 23, 6, 7, 32, 3, 52, 6, 9, 77), Vintilă Lician (7375, 7, 86, 423, 5, 6, 32, 3, 50, 9, 87, 90, 6).

BUCUREȘTI. S.g. 3 Schwefleberg Alexandru (2466—8, 70, 1, 3—5, 8, 82, 3, 5, 8, 502, 65, 10, 7554), S.g. 4 cl. VI Brădeţeanu Mihaela (2452, 3, 5—7, 9, 61, 78), Udrea NBogdan (2450, 3, 4, 64, 7, 9, 70, 9, 80, 3, 4, 8), S.g. 5 cl. VI Streja Dan (2450—6, 71), Lazăr Anca (2450, 2—6, 64, 5, 7—72), Mag Tania (2450, 2, 3, 64—8), cl. VII Rotaru Cristina (2450—6, 64, 7), S.g. 10 cl. VIII Weintraub Andrei (2450—, 2—7, 60—3), S.g. 25 co. VII Cristea Daniela (2472, 3, 6, 7, 89, 98—500), S.g. 26 Bercea Florin (2450, 2—5, 7, 60, 2, 3), S.g. 46 cl. VIII Ionescu Anca (2460—2, 74, 8, 83, 4, 8—92), S.g. 56 cl. VIII Manciu Adrian (2450, 2—7, 60—2, 4—76, 8, 9, 81, 3—5, 8—92), S.g. 73 cl. VI Iliescu Octavian (2452, 4—6, 65, 8, 9, 82—4), S.g. 103 cl. VIII Marinescu Viorel (2450, 3, 5, 6, 60—2), S.g. 118 cl. VI Croitoru Olga (2464—6, 8—70, 80—4), S.g. 122 cl. VIII Stefănescu Doru (2450, 2, 3, 61, 477, 81, 3), S.g. 128 cl. VI Mateo Cornel (2450—6, 64, 70), Popa Mihaela (245—, 2, 5, 64, 5, 7, 8, 70)), S.g. 145 cl. VII Comana Marian (2476, 80—4, 6, 9, 95, 7, 9—502, 4, 8, 7495), Dinculiță Victor (2464, 5, 70, 3, 6, 7, 80, 2—4), Dumitru Marin (2464, 57, 8, 76, 9, 80, 4, 9), Ganu Rodica (2453—5, 61, 4) 5, 70, 3, 4, 84, 9), S.g. 150 cl. VII Tigănuș Serban (2450, 3—7, 73, 4, 6), S.g. 156 cl. VIII, Stefănescu Cătălin (2450, 2, 4, 6, 9, 61—6, 8, 70, 2, 4, 6, 8, 80, 2, 4, 6, 8, 90, 2, 7, 402, S.g. 169 cl. VII Hoisescu Niculae (2450—2, 4—6, 61, 4—6), cl. VIII Vijelie Luminița (2450, 2—7, 61—3 ; 7397—400, 2), S.g. V. Alexcsandri cl. VII Ionescu Daniel (2456, 64, 5, 7—70, 4), L. 1 cl. IX Roman Adrian (2474, 7,82, 4, 509 ; 7364, 78, 82, 4, 423, 5, 8, 30, 7, 8, 42, 3, 50, 75, 7, 94, 6, 502, 3, 5, 29, 34, 5, 54, 6), Tasdu Diana (2460—3, 74—6, 8 ; 7397, 8, 437, 8, 41, 4), cl. X Andrei Aurel (7373, 5, 7, 91, 402, 27, 37, 94—6, 502, 14), Croitoru Stefania (7423—6, 32, 7, 8, 41, 4, 9—53, 4, 70), Georgescu D. Michael (7372, 6, 97, 402, 6, 30, 2, 45, 8, 50, 529, 36, 7, 54), Hahu Radu (7313, 4, 7, 8, 20, 2, 3, 5—8, 3—, 3, 5), Mladin Gabriela (7424—6, 37, 77, 94, 6, 9, 54, 27, 9, 34, 6—8), Munteanu Cornelia (7364, 73, 7—9, 423—5, 37, 8, 50, 77, 9, 82, 90, 4, 5, 505), Sbîrnea Mihai (7364, 6, 7, 72—82, 5, 7, 91, 5, 7—400, 2—8, 10, 3, 8), *Udrea Mircea* (7366, 72, 97, 8, 404, 53, 22, 3, 5, 6, 40, 1, 50, 2, 4, 67, 74, 5, 7—84, 90, 3—5, 9, 500, 5, 7, 10, 1, 4, 20, 7, 8), L.5 cl. VI Petre Gh. (2450, 2, 4—6, 64, 5, 7, 79—83), cl. VII Doran Andrei (2454—6, 62, 8, 70, 1, 3, 6), L. 6 cl. VIII Weiner Irina (2450, 2—6, 9—63), L. 7 cl. VI Lustig Adrian (2468—70, 82—6), cl. VIII Niculescu Irina (2450—7, 60—3), Redlinger Daria (2450—7, 9—63), cl. IX Blagoev Branislava (2476, 92, 4, 509 ; 7385, 99, 475—8, 94—7, 554), Nichita Anca (2460—3. 74—8, 92, 4 ; 7385, 418, 22 75—7, 94—6, 527), Taler Adriana (2461, 76, 7 ; 7395, 9, 437, 41, 75—7, 94—7, 554), cl. X Cornescu Mihgail (7423—5, 8, 30, 4, 8, 50, 2 4, 79, 81, 2, 502 , 11, 4), L. 8 cl. IX Cinteza Mircea (2474—8, 92, 4 ; 7398, 9, 401, 37, 8, 41—4, 501, 2), L.10 cl. VII Brateș Nanu (2450, 2, 4, 6, 62, 5, 7, 70, 84), cl. IX Mihăileanu Nicoleta (2444, 5, 6, 74, 8, 94, 509 ; 7328, 494, 5, 554, 608), L.11 cl. IX Alexandru Ion (2461—3, 74, 6—8 ; 7364, 92, 5, 97—9, 430, 7), Claiman Mișu (2474, 6—8, 92, 4 ; 7439, 77, 91, 4—7, 502), Constantinescu Dan (2492, 4 ; 7397, 9, 442, 74—8, 91, 4—6, 582, 4), Frangulea Stefan (2460, 1, 3, 74, 7, 94 ; 7397, 9, 437, 75, 7, 8, 8, 94—6, 502), Georgescu M, Eugen (2461, 2, 74, 6, 7 ; 7382, 5, 7, 97, 9, 437, 42, 3), Stana Emilian (2460—3, 76—8, 92, 4 ; 7397, 9, 437, 77, 502), Saraga Dan (2460, 1, 3, 74, 7, 92, 4 ; 7385, 99, 477, 94—6, 520, 4), Tigău Victor (2460, 2, 3, 74—6, 8 ; 7385, 97, 437, 41, 2), L.12 cl. X Lupașcu Al. (7372, 3, 5—9, 85, 95, 7, 8, 400, 2—5, 8, 10), Petrescu Cătălin (7373, 5, 7, 425, 94, 5, 9, 525, 56, 537, 8, 56), Rogalschi Mircea (7338, 5, 8, 60, 6, 72—82, 5, 7, 91, 4, 5, 7—9, 401, 3, 4, 8, 10, 3, 7, 8), L.13 cl. X *Lăză-*

rescu Răducu (7364, 6, 71—9, 87, 91, 8—400, 2, 3, 5, 8, 23—6, 32, 7, 43, 4, 6, 8, 9, 52,5, 6, 70, 6—84, 90, 1, 3—500, 10), cl. XI Menciu Teodor (7364, 5, 8, 424, 5, 30, 97—9, 503—5), Stoenescu Vladinir (7338, 58, 60, 7, 72—9), Serban Cristian (7494—6, 9—504, 10, 2, 4), Turtu-, rică Stefania (7391, 8—400, 2—5, 8, 10, 4, 5), L.16. f. frecvenţă cl. VIII Drăguşin Alex. (245 3—6, 60—2; 7377, 87, 92, 5, 7, 402), L.17 cl. IX Roman Cornel (2461, 3, 509, 10; 7373, 401, 80, 93—6, 504, 6), cl. X Avrămoiu Constantin (7475—84, 90, 4, 6, 9, 500, 2, 4, 5, 9—11, 4, 27), cl. XI Suciu Paul (7364, 5, 71, 2, 4, 5, 7—9, 85, 7, 9—92, 7—9, 402, 5, 6, 13, 6, 22, 42, 8, 50, 70), L.18 cl. X Gheorghiu Radu (7378, 88, 91, 2, 5, 423, 6, 32, 42, 64, 77, 80, 2, 3, 95, 511, 22, 34—7), Musceleanu Ion (7364, 6, 7, 91, 7—9, 404—6, 10, 3, 8, 23, 6, 8, 52, 64, 74, 9, 80, 2, 90, 4—7, 9), Schein D. Al. (7373—5, 7, 87, 92, 3, 5, 7, 402, 5, 8, 9, 18 41, 5, 54), L.21 cl. X Bercaru Rpxana (7377, 87, 95, 403, 23—6, 30, 2, 50, 4), L. 22 cl. IX Alinescu Andrei (7382, 5, 9, 7, 9, 402, 6, 18, 37, 61—3, 73—7), cl. X Secoşanu Mihaela (7450, 2, 4, 79—82, 511, 29, 35—8), cl. XI Georgescu Mihai (7364, 6, 75, 6, 9, 83, 4, 7, 9—91, 4, 7, 9, 402, 3, 10, 1, 3, 22, 3, 5), L.24 cl. VI Alexandrescu Silvia (2450, 2—6, 94—7), Herescu Rodica (2450, 2—6, 64, 5, 7, 71), cl. VIII Frisov Puşa (2456, 61, 7, 9, 72, 4, 7, 85, 8, 91), L.32 cl. VII Popoviciu Liviu (2450—6, 64, 5, 7—70, 3, 6, 7), L.33 cl. VI Petre Cristian (2453—5, 79, 80, 3, 4, 9), L.35 cl. VIII Delengelo Florin (2450—5, 7, 60—3), L. 36, cl. VI Carabineanu Adrian (2450, 1, 3, 5, 64—7), L.37 cl. X Cercel Vasile (7423, 3, 5, 37, 52, 77, 9, 82, 94—6, 9, 529, 36, 54), L.39 cl. Pelinon Mircea (2461—3, 74—8, 92, 4; 7385, 430, 7, 94, 5), Vrejoiu Vlas (2462, 3, 74, 5; 7399, 437, 75, 7, 94—6), L.40 cl.VII Crăciun Gabriela (2453—5, 7, 60, 73, 4, 6).

BUCHEA DE JOS (Argeş). S.g. cl. VIII Sima Tiberiu (2471, 2, 4, 83, 4, 8—92).

BUSAG (Baia Mare) S.g. 20 cl. VIII Gita Cornel (2464—72, 81, 3—5, 8—92).

BUŞTENI (Ploieşti). L.1 cl. X Sicoe Traian (7366, 71—3, 5, 8, 87, 424, 30, 2, 83, 95, 9).

BUZĂU. S.g. 6 cl. V Miroiu A. Florin (2453—5, 64, 5, 7, 80, 1, 3, 4), L.1 cl. VIII Burloiu Maria (2481, 3—5, 8—90, 4), cl. IX Daneţ Nicolae (2461, 3, 94; 7364, 78, 98—400, 13, 8, 44, 77, 502, 5, 27, 53, 4), Ionescu Dan (2460, 2, 3, 74, 6—8, 94; 7397, 9, 401, 42), cl. X Bobocea Marin (7372—4, 8, 405, 23—6, 32, 50, 2), cl. X *Gavrilă Serban* (7779, 97—400, 2, 3, 5, 13, 8, 24—6, 37—9, 41, 2, 5, 6, 8—50, 24, 74—7, 9—83, 90—7), Mihăiescu Tiberiu (7364, 6, 71—9, 97—9, 401—3), L.2 cl. IX Boldişteanu Tatiana (2474—8, 92, 4, 506, 9; 7430, 7, 41, 2, 552, 4), L.5 cl. VIII Constantinescu Florin (2464, 5, 7, 70—2, 4, 5, 8—85) 8—92).

BUZIAŞ (Banat). L.1 cl. V Barth Wilfried (2452—5, 65, 7—9), cl. VI Antonescu Mirela (2453, 5, 67, 8, 79, 81, 3, 5), Drăgan Viorel (2451, 5, 8, 64, 7, 70), Guica Rodica (2450, 2—5, 7, 68, 85), Grecu Tiberiu (2450, 2—5, 67, 8, 70), Groza Ioan (2452, 4, 5, 8, 64, 7, 8, 70), cl. VII Meglei Ionel 2450, 2, 3, 5, 6, 79, 80, 2).

BRĂILA. S.g. 7 cl. VI Serbănescu M. Octavia (2450—6, 64, 5), S.g. 10 cl. VI Florescu Liliana (2450, 2—6, 67, 8), L.12 cl. VIII Canciu Marian (2453, 4, 62, 7, 8, 71, 2, 8), L.18 cl. VII Vintilă Tiberiu 2450—3, 61, 5, 6, 70), Slgl 22 cl. VIII Dragomir Gh. (2450, 2, 3, 6, 61, 4—6 8, 71, 4—6), L. N. Bălcescu cl. X Popescu Silviu) 7375, 7, 9, 99, 403, 25, 37, 77, 94—9, 514), L.2 cl. IX Vrabie Viorel (2461, 2, 75—7, 92, 508, 9; 7g437, 8, 502), L.3 cl. IX Cărbunar Mihai (2476, 92' 4; 7438, 42, 4, 76, 7, 80, 94, 5, 501), Dumitru Rodica (2460—3, 74, 5, 7, 8, 92, 4, 7397, 9), Mihăilescu Stefan (2460—3, 74—8, 92, 4; 7397, 9, 444), Stanciu Viorel (2460—3, 74—7, 92, 4; 7397, 9), cl. X Borîndel Elena (7423, 5, 51, 2, 77, 94—7, 503, 9), Bucur Camelia (7372, 5, 7, 423, 5, 52, 4, 77) 80, 94—6), Climescu Alexandrina (7373, 5, 7, 403, 23, 6, 52, 4, 77, 9, 90, 4—7, 9), Enache Marin (2450, 2—5, 60, 2, 4, 7, 8, 71, 5, 8, 80—3, 5, 8, 89—91, 5, 509)

CALAFAT. (Oltenia) S.g. 2 Dobrin Mileu (2450, 5, 60—2, 71, 2, 82, 8—90, 2).

CARACAL (Oltenia) L.2. cl. IX Enache Gheorghiţa (2461, 3, 74, 6, 7, 94; 7382, 477, 91, 4—6).

CARANSEBEŞ (Banat) L.1 Dragu Elenora (2464, 5, 7, 70—2, 81, 3), cl. VI Kellner Stefan (2464, 5, 7—9, 72, 81, 3, 4, 9, 95), Liebmann Eva (2450, 2, 3, 5, 61, 95, 9, 500), Poiană Dinu (2456, 64—7, 9—72, 81—4, 9, 90), Vomica Alexandru (2450, 2—6, 64—72), cl. X Geană Nistor (7373, 7, 9, 97, 422, 3, 77, 80, 2, 94—6), Halmi Constantin (7423, 4, 50, 4, 76, 7, 9——81, 94—6, 9, 505, 10, 3), *Stefăneanu Ioniţa* (7358, 71, 4, 6, 82, 97, 403, 23—6, 8, 30, 2, 7, 8, 41, 50, 2, 4, 75, 7, 9, 80, 2, 3, 90, 4—7, 9, 505, 11, 3, 4, 6, 27. 8), L. 2 cl. VII Liuba Elena (2450, 2—5, 9—63).

CASTRANOVA (Oltenia) S.g. cl. VIII Măceşeanu Elena (2450, 2—5, 60—3, 8, 9, 71, 2, 4, 8, 80, 2—5, 8—92).

CALAN (Hunedoara). L.1 cl. X Găspărescu Gheorghe (7366, 72—9, 87, 95, 7—400, 3, 5), cl. XI Cubineţ Ion (7355, 9, 60, 7, 8, 71, 6, 8, 82, 6, 9, 403, 8—10, 3, 6, 8, 22—5, 32, 5—9, 41, 5, 6, 51, 2, 4, 60, 2, 5, 70).

CĂLĂRAŞI (Bucureşti). S.g. 3 cl. VIII Rădulescu Grigore (2468, 71, 83, 4, 8—90, 2), L.1 cl. X Sorici Ion (7364, 72, 4, 5—9, 82, 5, 99, 406, 23—5, 8, 36, 52, 4), L.2 cl. IX Stefănescu

Radu (2474, 6, 8, 94, 50, 8-10; 7437, 42, 75, 6, 94—6, 502, 5, 53, 4), cl. X Manole Ion (7360, 4, 6, 725, 7, 8, 85, 94, 7, 9, 402, 18), Mihăescu Tudor (7364, 6, 72, 3, 97, 9, 402, 25, 90, 54, 96, 529), Tugulea Maria (7360, 6, 73, 5, 7, 8, 97, 423, 6, 30, 42, 4, 54).

CELARU (Oltenia), Absolvent Andrei Carmen (2450, 60, 4, 71, 2, 5, 9, 90, 2, 503), absolvent Tudor Alexandru (2450, 6, 71, 2, 5, 83, 92, 503), Tudor Eugenia (2450, 4, 5, 64, 71, 2, 84, 90, 2), S.g. cl. VI Bugică Ion (2450, 4, 54, 64, 79, 81, 3, 4), Ilie Ilie (2450, 5, 65, 79, 81, 5, 401, 2), Ion Marioara (2450, 4, 5, 64, 79, 81, 3, 4, 9), Petcu Mariana (2464, 5, 7, 8, 81, 3, 4, 9, 502), Răduică Ecaterina (2450, 4, 5, 64, 81, 3, 4, 9), cl. VII Celăreanu Viorica (2450 , 4, 5, 64, 7, 83, 4, 9), Dinu Florea (2450, 4, 5, 64, 79, 83, 4, 9), Iliescu Elena (2450, 4, 5, 64, 7, 81, 3, 4, 9), Marcu Elena (2450, 4, 5, 64, 79, 83, 4, 9, 502), Stan Maria (2450, 5, 64, 79, 83, 4, 9), Tița Oprica (2450, 5, 64, 79, 83, 4, 9), Truța Angela, Tudor Marin (2750, 4, 5, 64, 79, 81, 4, 9).

CERNA (Dobrogea). L.1 cl. X Grigore Dumitru (7360, 3, 7—9, 96, 403, 24, 5, 32, 529, 35, 6, 7, 52).

CHIZATAU (Banat) S.g. cl. VIII Toma Valeria (2467, 8, 70, 1, 7, 80, 2—4, 9).

CIOCIRLIA (București) S.g. cl. VII Caloianu Angela (2450, 2—6, 61, 4, 6, 8).

CIMPENI (Cluj) L.1 cl. XI Mateș Ilie (7356, 9, 72—9, 85, 91, 5, 9, 402, 77).

CÎMPIA TURZII. L. 3 cl. VIII Romașcanu Emil (2455, 64, 6, 72—6, 8—84, 8, 9, 91, 2, 4), cl. IX Cuța Ana (2460—3, 74, 6, 92, 4; 7418, 30, 94—6), Dolha Ana (2460, 2, 3, 74, 6, 92, 4; 7418, 30, 7, 41, 77, 94, 6), Tulai Lucia (2460—3, 74, 6, 8, 92; 4; 7418, 30, 94—6), cl. X Selegean Horia (7372, 99, 425, 37, 42, 52, 77, 90, 4, 6, 7, 9, 511).

CÎMPINA (Ploiești) S.g. 1 cl. VII Butnaru Sorin (2480, 1, 3, 4, 9, 95, 9, 500), cl. VIII Eftimie Laurențiu (2483, 8—92, 8, 9, 504, 4), Ivașcu Ciprian) (2471, 83, 9, 95, 503, 4, 55), cl. IX Androne Teodor (2474—8, 92, 4, 508, 9; 7437, 42, 77), Moraru Ion (2474—6, 8, 92, 4; 7430, 7, 42, 77, 94, 502), cl. X Alexandru Doru (7360, 4, 7, 72—8, 82, 5, 7, 91, 2, 4, 5, 7, 94—0 9, 10, 3, 7, 8, 22), Iosif Ion (7477, 8, 90, 1, 4—7, 9, 502, 51, 2, 4), Ivașcu Florin (7364, 6, 72—5, 7—9, 35, 7, 97, 9, 400, 2, 5, 23—6, 37), 41, 4, 7—50, 2, 4, 70, 7, 9, 80, 2, 94—6, 9, 502, 11, 4), cl. X Marin Ion (7374, 5, 7, 85, 97, 423, 6, 37. 90, 4—7, 9), Văcăroiu Ioana (7449, 51, 4, 76, 7, 84, 90, 4—7, 9, 509, 10), L. 2 cl. IX Spulber Cătălin (2462, 76, 8k 92, 4; 7385, 97, 4, 477, 94—6, 502), cl. X Cosmineanu Vasile (7480, 2, 3, 90, 4—9, 529, 35—8), Tocitu Alexandru (7423, 5, 77, 80, 3, 90, 4, 6, 9, 529, 34—8, 55).

CÎMPULUNG MOLDOVENESC. L.1 cl. VII Cojoc Mihai (2450 m 64, 8, 70, 9—81, 3, 4, 9), cl. X Dragotă Stelian (7364, 6, 71—8, 91, 2, 7—9, 402—5), Popescu Ovidiu (7364, 6, 71—8, 81, 91, 2, 7—9, 402—6, 8, 13, 7, 8, 22—5, 47, 53), L. militar cl. X Buța Viorel (7360, 4, 72, 79, 87, 423, 5, 6, 8, 37 8, 50, 2, 80, 95—7, 9, 507, 14), Costache Victor (7372, 3, 7, 87, 423, 5, 77, 9, 90, 90, 4, 9, 514), Mureșan Mircea (7423, 4, 7477, 9, 80, 94—7, 9, 505, 27), Sabău Ioan (7333, 4, 8, 47, 51, 401, 6, 8, 10—4, 6, 50, 4,77, 9, 80, 2, 90, 54, 4, 6, 27).

CÎMPULUNG MUSCEL. S.g. 1 cl. VIII Mitroiu Gh. (2464, 5, 7, 70, 4, 9, 9, 80, 3, 4, 8, 9), S.g. 2 cl. VII Tudose Florin (2450, 4—6, 64, 5, 7, 70).

CLUJ. S.g. 2 cl. VIII Comănescu Sorin (2450, 2—6, 60—3), Oancă Ioan (2464, 6, 7, 70—2, 4, 6, 7), S.g. 3 cl. VII Stoian Dorin (2452, 3, 64, 7, 79—81, 4, 7, 500), S.g. 7 cl. VII Sglobiu Nicolae (2450—9, 64, 5), S.g. 14 cl. VII Gădălean Alexandru (2454—7. 64—7), S.g. Coșbuc cl. X Cărpineanu Claudiu (7373, 402—5, 23—5, 37, 9, 41, 5, 8, 50, 2, 4), S.g. Em. Racoviță cl. V Fulviu Dragoș (2479—83, 5, 95, 7, 9, 500), cl. VI Tecșa Ileana (2480, 3, 4, 5, 8, 9, 99, 500), S.g. Gh. Barițiu cl. VI Roșcău Manuela (2450, 2—6, 64, 5(, cl. VII Ioncic Baba (2461, 79—81, 3, 5, 8, 90, 5, 508), cl. VIII Comșa Doru (2471, 2, 4, 7, 8, 83, 91, 9, 2), cl. Grigore Corneliu (7423—6, 8, 37, 44, 50, 2, 4, 75—7, 80, 90) L.8 cl. V Popescu Mircea (2453—5, 64—8, 71), cl. VII Rusu Roxana (2450, 2—5, 64, 5), cl. VIII Miclescu Lucia (2465, 7, 8, 71—3, 80, 1, 3—5, 8) Runcu Lucia (2470, 1, 80, 1, 2, 8, 9, 90), cl. X Damian Dorin (7360, 4, 6, 62—5, 7, 85, 7, 97, 9, 400, 2, 23—5, 37, 41, 50, 2, 4), Fărcășan Mircea (7373, 7, 9, 87, 97, 423——5, 41, 2, 4), Oros Lucian (7364, 6, 72—5, 7, 87, 91, 5, 7—9, 402—5, 8, 9, 17, 8), Stoian Daniela (7372, 3, 5, 7, 85, 7, 432, 7, 8, 87, 94, 5, 7, 9, 500), S.g. 10 cl. VI Belescu Liviu (2450, 3, 4, 69, 79, 83, 4, 6), Coman Ileana (2450, 2, 3, 5, 64, 5, 7, 8), Feldriban Virginia (2450, 2, 3, 64, 5, 7, 83, 5), Lazăr Eva (2450, 64, 7, 9, 83, 95, 500, 1), Marinescu Alexandru (2450, 2—5, 65, 7, 83), Mișan Ioan (2450, 2—5, 64, 5, 7), Moldovan Petru (2453—5, 69, 79, 80k 3, 6), Nicolau Margareta (2450, 64, 7, 79, 83, 95, 500, 1), Olaru Marilena (2455 84, 9, 95, 7, 8, 500—2), Serban Emilia (2450, 2, 3, 5, 64, 5, 80, 4), Timandi Adrian (2450, 2, 3, 5, 64—8), Toma Valeria (2450, 2, 3, 5, 64, 5, 80, 3, 4), Vancea Mariana (2452, 3, 5, 64, 5, 79, 95, 500, 1), cl. VII Galoș Tiberiu (2468, 71—3, 82, 3, 6, 8, 501), Licker Ladislau (2455, 67, 71—3, 95—500, 4), Mureșan Eleonora (2453, 67, 70, 3, 83, 95, 9, 500, 1), Pușcaș Victor (2473, 84, 9, 96, 7, 500, 1, 8), L.11 cl. VII Kanizsay László (2450—5, 7, 71), cl. IX Cstri Klara (2460—3; 7364, 82, 5, 95, 7—9, 418, 22), cl. X Méder Akos (7371—3, 5—8, 85, 7, 95, 7, 9, 400, 2, 3). L. 15. cl. V Calina Dăncuș (2451—5, 64—7), Jura Daniela (2464, 5, 7—83), cl. VIII Astaloș Ahris-

tiane (2450, 3, 6, 7, 64—6, 76), Fechete Sorin (2464, 5, 7, 70, 9—83, 5(, Horvat Viorica (2450, 65, 7, 8, 1, 3, 4, 9, 98, 508), Schiopu Ninela (2450, 3—5, 61, 5, 7, 9, 74, 7), cl. VIII Tudor Mariana Mariana (2450, 3—5, 60, 1, 8, 74, 84, 90).

COMANESTI (Bacău) L.1 cl. IX Creţu Vasile (2460—2, 74, 6, 7, 94; 7399, 437, 76,90, 1, 3—6 502).

CONSTANTA. S.g. 5 cl. VII Pascu Eugen (2450, 2—6, 9, 61, 2), L. 1 cl. VII Dovgan Mihaela (2450, 2—5, 64—7, 70), cl. VIII Gheorghiu Dan (2450, 2—6, 9, 61, 2), cl. IX Trandafir Tita (2460—3, 74—8; 7397, 400, 40, 7, 8), Perşani Radu (2474, 6, 8, 92, 4; 7398, 400, 3, 41, 2, 525, 5, 8), cl. X Bîrzan Aurelia (7366, 73, 7, 9, 423—6, 41, 50, 2, 77,90, 4—6), Leţcă Daniela (7387, 402, 5, 46, 52, 77, 9, 94—7, 9, 511, 4), Mitu Traian (7376—8, 91, 402, 3, 5, 24—6, 50, 2, 4) Ţmer Adrian (7377, 477, 80, 3, 95—7, 9, 536—8, 65), Sadachiev Gh. (7373, 5, 7, 9, 82, 5, 402, 24, 5, 80, 7, 95, 6), L. 3 cl. VII Vidican Alexandru (2464, 5, 7, 8, 71, 3, 9—85, 9, 95, 7, 8, 501), cl. IX Arhip Lucsel (7364, 73, 98, 400, 4, 38, 43, 4, 77, 80, 91, 4, 5, 502, 26, 8), cl. X Drăguţ Valentin (7364, 75, 9, 402, 5, 23—5, 79, 80, 2, 505, 28), L. 4 cl. IX Bordea Gh. 2460—3, 76, 94; 7398, 9, 405, 18, 37, 42, 75, 7, 94, 502), cl. X Nitu Nicolae (7364, 6, 72, 3, 5—7, 9, 85, 7, 99, 400, 2, 4).

CORABIA (Oltenia) Absolvent Filio Nicolae (T7377, 423, 5, 6, 9, 37, 41, 4, 50, 75—8, 95, 529, 34, 6—8), L. 1 cl. X Dinulescu Sandu (7423—6, 49, 52, 4, 77—80, 2(, Marinaş Sergiu (7423, 30, 77, 90, 4—8, 9, 534, 6, 48).

CORBU (Argeş) S.g. cl. VI Diaconescu Eugen (2450, 2—6, 65—7).

COSTESTI (Ploieşti). S.g. cl. VII Oprea Elena (2461, 80—4, 8—90, 8), Oprea Ion (2464, 5, 7, 8, 80, 4, 9).

CRAIOVA. Absolvent Teodorescu Ligiana (7374, 5, 7, 80, 423, 5—7, 50, 79, 80, 2, 7, 9), S.g. 9 cl. VI Dinuţ Eugenia (2464, 5, 7, 70, 9, 80, 2, 981), Focşa Anca (2464, 5, 7, 70, 9, 80, 2, 98), Găvan Florentina (2464, 5, 7, 70, 9-80, 3, 4, 9, 95), cl. VII Docjiţ Gabriel (2464, 5, 7, 70, 80, 3, 95, 508), Lugaşi Renate (2464, 5, 79, 80, 34, 9, 98), Petcu Doina (2464, 5, 7, 8, 70, 9, 80, 3, 9), Stoenescu Smaranda (2464—7, 70, 9—81, 3, 4, 508), cl. VIII Danielescu Elena (2468, 71, 2480, 1, . 8, 90, 504), Goga Octavian (2464, 7, 8, 71, 2, 81, 5, 8, 90, 1, 504), Oprescu Gabriela (2465, 7, 8, 71, 2, 4, 81—3, 5, 8, 90), Popescu Sabina (2464—8, 70—2, 4, 8, 80, 1, 3—5, 8—91, 5, 504; 7494, 5), Popilian Doina (2464—6, 71, 2, 80, 2—4, 90, 5, 508—10), Tănase Gorilă (2464, 5, 7, 71, 2, 81—3, 90, 1), S.g. 10 cl. V Petrescu Alexandru (2450,, 3, 64—6, 88, 1, 95,), S. g. 24 cl. VII Ciulin Luminiţa (2450, 2—6, 65, 7), L.1 cl. VII Pogonaru Florin (2450—8, 61, 4—6), cl. X Banţă Valeriu (7357, 8, 60, 2, 4, 71, 5, 9, 87, 91, 2, 5, 7—9, 401, 2, 4, 5, 7, 9, 10), Damian Viorel (7359, 60, 4, 6, 72—5, 7—9, 85, 7, 98, 9, 402, 53), Diamandescu Aurel (7363, 6, 72—9, 82, 7, 91, 2, 5, 7, 8, 400, 2, 3, 5, 8, 10, 3, 22), Neagu Gabriel (7360, 4, 6, 73—9, 82, 5, 7, 97—9 , 401, 2, 5, 8, 13), Turcu Ilie (7356, 8, 60, 4, 6, 71—9, 91, 5, 7—405, 7—10, 3, 6—8, 22, 30), Tepuş Nicolae (7359—60, 4, 6, 72—9, 85, 7, 91, 5, 7—9, 402, 3 5, 8, 10, 3, 8, 22)

L. 2 cl. IX Dobreanu Iulian (2460—3, 74, 94; 7395, 97—9, 442, 94, 6), Predescu Virgil (2460, 1, 3, 74, 7, 94; 7385, 97—9, 422, 94, 6), cl. X Vălab Stefan (7364, 72, 4, 5, 7, 87, 95, 7—9, 400, 2, 5, 18, 22), Ciobîrcă Constantin (7360, 4, 6, 72—5, 7, 8, 82, 5, 7, 95, 7—401, 4, 5, 13, 23), Sarivan Ion (7364, 72—5, 7, 8, 95, 7—402, 4, 5, 18), Stoica Lucreţia (7357, 8, 60, 4, 6, 7, 71—8, 91, 2, 5, 7, 92, 3, 3, 5, 7—405, 13, 17, 22), L.3 cl. VI Călinescu Liliana (2450—7), Lucaci Doina (2450—7), Marinescu Florentina (2450—6, 69), L. 4 cl. V Gîlcescu Eracoida (2464—6, 74, 9, 80, 2, 3), L. pedagogic an I Idjilof Mioara (2456, 60—2, 71, 2, 88, 9, 91, 2, 4).

CREVEDIA (Bucureşti) S.g. cl. V Iliescu Gabriela (2464—8, 70—2).

CRISCIAN (Hunedoara) S.g. cl. VII Iovan Dorin (2454, 5, 7, 65, 7, 70, 80, 3)

CUDALBI (Galaţi) S.g. 1 cl. VII Barbu Gheorghina (2450, 5, 6, 65, 7, 8, 70, 80, 3), Carp Niculia (2450, 2—6, 65, 7, 83), Caşu Dorina (2450, 2—6, 65, 7, 8, 81, 3), Dumitraşcu Toader (2452—6, 65, 7, 8, 80, 1, 3, 4), Palade Maria (2450, 2—6, 61, 5, 7, 79—81, 3, 4, 95), Pajoga Constanţa (2450, 2, 3, 65, 7, 80, 1, 3, 95), Pojoga Elena (2450, 2—6, 61, 5, 7, 8, 71, 80, 1, 3, 4), cl. VIII Barbu Natalia (2456, 62, 3, 5, 7, 8, 72, 9, 80, 1), Răocare Gh. (2450, 2—5, 62, 72, 4).

CUGIR (Hunedoara), L. 1 cl. V Vodă Maria (2464—8, 79—81, 3), cl. VIII Cocian Dan (2450, 2—5, 61—3), cl. IX Bîrta Mircea (2474, 6, 7; 7395, 8—400, 18, 37, 8, 41, 4), cl. X Munteanu Traian (7364, 6, 72—5, 7—9, 85, 98, 402).

DARMANESTI (Argeş) S.g. cl. VI Dumitrache Aneta (2450—6, 60—3), L. 1 cl. VIII Kolbász Lásilá (2450, 3—6, 60—3, 509), Incze Iános, Varga Lajoş, Wary István (2450, 2—6, 60—2, 75), cl. IX Biza Marinela (2460—3, 74—8, 91, 2, 4, 509; 7437, 75).

DEVA. S.g. cl. V Arimescu Viorel (2453, 64—6, 80, 3, 4, 9),

DOLHASCA (Suceava) L. 4 cl. X Alexandrescu Clement (7318, 51, 73—5, 7, 9, 85, 98, 402, 6, 18, 23—5, 8, 32, 7, 72, 7, 8, 87, 91, 405, 26, 42, 8, 54, 74, 535, 6), Iosubescu Dan (7364, 79, 91, 423—5, 32, 7, 8, 46, 7, 52, 4, 64).

ORSZÁGOS MUSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1863

DOROHOI (Suceava) S.g. 1 cl. V Beniuga Alexandrina (2464—7, 80, 1, 3, 95), cl. VI Creţu Valerica (2464—7, 80, 1, 3, 95), cl.. V Foloşmea Lucia, Lovric Elena, (2464—7, 80, 1, 3, 95), cl. VII Pesteuca Ioie (2464—7, 80, 1, 3, 95), Bălan Adi (2465, 7, 71, 3, 6, 81, 3, 4, 9), cl. VIII Grigor Dorina (2450, 2, 3, 72, 7, 9, 81, 3), cl. VIII Corniciuc Dumitru (2460, 5, 74 5, 7, 87, 91, 5, 500, 1, 3, 9).

DRAGANESTI OLT. L. 1 cl. VIII Tlcă Aurelia (2465, 71, 4, 8, 89, 90, 4, 503), cl. X Bleam Gh. (7366, 73, 4, 7, 8, 423—5, 47, 42, 50, 2, 77, 96), Durigu Mircea (7360, 4, 6, 73, 4, 6—9, 82, 5, 7, 91, 8, 400, 2, 3, 5), Enache Victor (7360, 4, 6, 72—5, 7, 8, 97, 403, 5, 37, 48), Păduraru Paul (7372, 3, 5, 7, 9, 85, 477, 1, 80, 4, 5), Tircă Constantin (7477, 9, 80, 2, 90, 1, 3—7, 535—8, 502).

DRĂGĂNEŞTI DE VEDE (Bucureşti) S.g. cl. VIII Stanciu Marian (2450, 2—6, 61, 2).

DRĂGĂŞANI (Argeş) S.g. 2 cl. VI Căzănescu Luminiţa (2450, 2—6, 64—70, 2), L. 1 cl. X Ciupag Mihai (7423—6, 52, 90, 4—7, 9, 54—8), Ionescu Dan (7423—6, 30, 2, 80, 90, 4—7, 529, 34—6, 8, 64).

DUMBRĂVENI. L.1 Teodorescu Marilena (7374, 7, 425, 38, 41, 77, 9, 90, 4—6, 507, 34—6).

FALTICENI (Suceava). Absolvent Ungureanu Dragoş (7356, 62, 72—4, 8, 9, 83, 4, 412, 23—6, 9, 49, 50, 2, 65), L.2 cl. VIII Tănăsulea Lenuş (2453, 4, 62, 4, 74, 9, 85, 8—91), cl. X Chirilă Necula (7437, 41, 77, 9, 80, 2, 90, 4—7, 9, 505, 11, 28, 9, 34—8), Crăciun Mihai (7425, 35, 8, 77, 9, 82, 94, 6, 7, 9, 534, 6), Pohoaţă Dumitru (7482, 90, 4—7, 9, 505, 29, 34—8, 51, 5), cl. XI Jitaru Mihai (7367, 99, 400, 2, 9, 16, 21—5, 7, 9, 47, 9, 50).

FAURESTI (Oltenia). S.g. cl. VIII Vişoiu Cornel (2450, 2, 3, 71—4, 6, 7).

FETEŞTI (Bucure)ti) S.g. 1 cl. VIII David Maria (2483—5, 7—92), cl X Guriţă Mariana (7364, 72, 3, 5, 7—9, 87, 97—4, 402—4, 23, 25, 37, 50, 2, 4), Manole Gh. (7366, 72, 3, 5, 7, 423, 5, 6, 8, 9, e7, 50, 2), Negreanu Tache (7423—6, 8, 30, 2, 7—41, 4, 9, 50, 2, 4).

FOCSANI. S.g. 7 cl. VI Iacob Dan (2468—70, 83, 4, 9, 501, 7).

FORASTI (Suceava), S.g. cl. VIII Vacaru Viorel (2450—6, 60, 2, 3).

FRUNTISENI (Iaşi) S.g. 16 cl. VII Chirică Gh. (2450, 2—5, 61, 4, 7).

GĂIEŞTI. *L.* cl. VIII. Sava Teofil (2450, 2—6, 60—8), 79—90), c.. IX Stănescu Lucian (2478, 503, 9, 40—2, 4. 7437, 8, 534, 5), cl. XI Ion Prodan (7479, 80, 2, 3, 7, 9, 511, 4, 27, 36—9).

GALAŢI. *S. g. 7* cl. VII Mîrzescu Doina (2450, 3—5, 67, 8, 70, 3, 81, 3, 4), *S. g. 21* cl. VIII Vezeteu Anişcara (2467—9, 72, 80, 3—5, 90, 5), *S. g. 21* cl. VIII Costiniuc Florin (2461, 5, 7, 8, 75, 7—86, 90, 1). *S. g. 26* cl. VIII Tomozei Dan (2450, 5, 60—2, 83, 9, 91, 4), *L. 1* cl. X Herşcovici Irina (7475—83, 94—7, 501—3, 5, 9, 14, 29, 34—8, 42, 3, 54—6, 508, 10, 2, 7—23), Katz Carmen (7372—8, 82, 5, 91, 5, 7, 402, 3), Niculiţă Petru (7473), 75, 7, 8, 82, 90, 1, 4—500, 11, 29, 36—8), Oprea Vasile (7423—6, 30, 2, 75, 8, 82, 90, 1, 4, 5—9, 34—8, 51), *L. 2* cl. X Caloianu Lucia (7377, 423, 4, 30, 2, 77, 94, 6, 7, 9, 529, 36), cl. XI Sorin Alexandru (7429, 5, 52, 4, 90, 4—6, 7, 9, 529, 35). *L. v* cl. VIII Suşnea Svetlana (2464, 5, 7—9, 71, 2, 4, 5, 7), cl. IX Vasiliu Rodica (2483, 4, 7—90, 2, 527, 3, 9, 17—9), cl. X *Eisenberg Ludwig* (7475—84, 90, 1, 4—7, 501—3, 5, 9, 29, 34—2, 42, 3, 54—6, 608, 10, 2, 7—23), *L. 4* cl. X Tiribegea Marcel (7372, 3, 7—9, 27, 97—3, 5, 10, 3), cl. XI Buruiană Rodica (7424, 6, 32, 7, 8, 49, 50, 4, 75—7, 80, 2, 3), *L. 5* cl. X Anghel Dorin (7372, 3, 8, 87, 92, 7, 9, 400—5), cl. XI Anghelescu Gabriela (7423—5, 50, 94—6, 9, 534, 5, 608, 23), *L. 6* cl. VIII Grimberg Marcel (2464—85, 8—92), *L. 7* cl. XI Ignătescu Radu (7423—8, 30, 2, 3, 529, 34—8), *Sc. muzică* cl. VIII Calapod Fănica (2454

GATAIA (Banat) *L. 1* cl. X Simu Nicolae (7423, 5 50, 2, 77, 90, 6, 534, 6, 7, 52).

GHERLA (Cluj), *L.* cl. X Denis Ştefan (7320, 3, 6, 8, 35, 64, 72, 3, 5,7, 424, 5,0 30), *Molnar Iosif* (7360, 4, 6, 72—5, 7—9, 87, 95, 9, 402—6, 23—6, 30, 7, 41, 6, 7, 9, 50, 2, 62, 8, 80, 2), *Sipos Ioan* (7446, 9—5,5 62, 4, 7, 8, 70, 5—84, 90, 1, 3—502, 4, 11, 2, 4, 6, 25, 79, 9, 54—6, 8—62).

GHIMBOCA (Banat) *S. g.* cl. VIII Simeria Ruxalin (2479, 80, 1, 3, 1, 5, 8, 90—2, 4).

GHIRDOVENI (Ploieşti) *S.g.* cl. V Vîlcereanu Cirtsian (2479—81, 3—5, 9, 95, 8).

GIURGIU *S. g. 1* cl. VII Neacşu Maria (2479, 80, 3—5, 502, 7, 14—7, 9, 23—6), *S. g. 4* cl. VI Măcăneaţă Cristian (2464, 5, 7, 8, 79—81, 4, 95, 515—7, 9), Ciucă Marilena (2438, 50, 2, 3, 64, 7, 8, 80, 81), State Viorel (2453, 3, 67, 8, 80, 1, 3, 4, 9), *S. g. 7* cl. VII Ghelmeş Mihaela (2453—5, 64, 6, 7, 77, 9, 81, 3, 4, 8, 97, 500, 12—4, 6, 7, 20, 3, 5) Sîrbu Mihaela (2467—70, 82—4, 500, 1), cl. VII *Popescu Gh. Dragoş* (2464—78, 80—6, 8—92 7—501, 3—5, 7—10, 5—29, e31—4, 742, 37, 76, 7, 94—97, 502, 54), *L. 1* cl IX Călinescu Mihail (2479, 6—8, 92, 4, 7441, 75—7, 94—7), Ivănescu Clement (2943, 2, 74, 6, 92, 4).

1966 NOV-6

CĂTRE REZOLVITORII DE PROBLEME

Rezolvînd probleme pregătiți și Olimpiada matematică 1967.

Corespondenții care ne trimit probleme rezolvate trebuie să redacteze fiecare problemă separat, însoțind-o de toate calculele necesare și de figuri desenate cu îngrijire.

Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceeași foaie.

Evidențiații trebuie să aibă cel puțin 30—40 soluții bune.

Problemele care se propun de către colaboratorii revistei să fie clar alcătuite și însoțite de soluții, să fie personale, iar nu luate din cărți sau reviste. Elevii sînt sfătuiți să înceapă a propune probleme numai după ce au rezolvat un număr destul de mare de exerciții și probleme. Problemele propuse, dar necorespunzătoare, nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse au fost publicate în cărți sau reviste, este rugat să arate precis volumul și pagina unde a mai apărut enunțul sau soluția problemei respective.

Solicităm probleme interesante legate de practică.

— Problemele propuse urmînd a fi publicate ținînd seama de predarea la clasă a materiei respective, autorii lor sînt rugați să trimită problemele din vreme însoțite de una sau mai multe soluții îngrijit scrise precum și observări, discuții sau uneori generalizări, arătînd și modul cum au fost stabilite.

— Problemele propuse (P), *note matematice* (N), *articole* (A), *materiale privind cercurile de elevi* (C), *se vor trimite redacției* G.M.-B. *de preferat într-un plic separat de problemele rezolvate.*

Corespondentul nostru care a citit și a înțeles deplin multe din soluțiile publicate, a rezolvat multe din problemele propuse, poate și este îndemnat să încerce să schițeze cîte o notă rezultată dintr-o observație făcută cu ocazia rezolvării unei chestiuni mai grele. Aceste note să fie *revăzute de mai multe ori înainte de a fi trimise*, pentru ca redactarea lor să fie *cît mai clară și concisă*. Figurile să fie făcute separat. În redactare se vor evita prescurtările.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

La publicarea problemelor rezolvate se vor menționa rezolvitorii care au dat o bună redactare și o soluție interesantă sau mai multe metode de rezolvare.

Elevii claselor a IX-a pot trimite soluții și la problemele propuse pentru clasa VIII-a. Problemele rezolvate trebuie să fie din ultimile trei numere apărute în G.M.B. *Problemele rezolvate*, vor fi expediate în cursul unei luni și vor fi însoțite de un borderou cu numărul problemelor, scrise în ordinea crescîndă. Pe plic se va scrie școala, clasa și localitatea rezolvitorului. Problemele propuse vor fi separate, corect rezolvate și citeț semnate. Desenele să fie făcute îngrijit pe foi separate.

Elevii claselor V—VIII vor fi anunțați în rubrica rezolvitorilor de probleme dacă trimit odată cel puțin 8 probleme bine rezolvate, iar elevii claselor IX—XI, pentru cel puțin 12 probleme bine rezolvate.

Orice elev poate trimite soluții și la probleme din clasa precedentă.

Autorii sînt rugați să semneze clar la sfîrșitul lucrării personale pe care o trimit pentru publicat și să dea adresa lor exactă.

ERATĂ. — La problema 7686 în loc de $5x^2$ se va scrie $25x^2$.

★

În vederea clasificării rezolvitorilor de probleme și premierea celor mai distinși, rugăm pe fiecare rezolvitor care în nr. 1-12 din G. M.-B, 1966 a fost anunțat cu peste 180 rezolvări, să trimită redacției imediat după apariția n-rului 12, o fișă cu totalizarea problemelor anunțate.

Liceele care doresc să participe la întrecerea pe anul 1966 privind activitatea școlară la matematică, sînt invitate să trimită pînă la 31. XII. 1966, fișa cu punctajul obținut după modelul publicat în acest scop în G. M.-B pag. 118, nr. 3 din martie 1966.

Școlile generale de 8 ani pot trimite pînă la 31 XII. 1966, fișa după modelul publicat în G. M.-B nr. 3 pag. 118, răspunzînd numai la punctele a, b, c, d, g. din regulament, indicînd și numărul de clase VI, VII, și VIII pe care le-a avut școala în anul 1965-1966.

★

Tirajul fiind limitat, gazetele se trimit mai întîi abonaților și de aceea rugăm colaboratorii noștri să se aboneze de îndată. Prețul este de 2 lei exemplarul.

Abonamentele se pot face prin oficiile poștale locale.

I. P. Informația" — c. 3721

INDEX 14601

Lei 2

E 1426

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE
DIN REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA

GAZETA MATEMATICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XVII — noiembrie 1966

11

GAZETA MATEMATICĂ
SERIA B

Anul XVII, nr. 11 — noiembrie 1966

SUMARUL

Pag.

1. Proprietăţi ale unor figuri geometrice deduse vectorial de O. Sacter 481
2. Note matematice de Liviu Pîrşan, G. Oprescu, N. Teodorescu. 485
3. A VIII-a Olimpiadă internaţională de matematică de T. Roman 494
4. Probleme rezolvate (7251, 7253, 7254, 7255, 7256, 7257, 7284, 7286, 7287) 497
5. Chestiuni de examen (7820 — 7826) 505
6. Probleme propuse (7827 — 7959) 507
7. Exerciţii şi probleme propuse pentru clasele V — VIII (E: 2596 — 2612) 514
8. Cărţi noi 517
9. Rubrica rezolvitorilor de probleme 517

ANUL XVII 11 noiembrie

COMITETUL DE REDACŢIE

Dincă N., profesor ; *Grosu A.*, profesoară ; *Ionescu-Bujor C.*, prof. univ. emerit ; *Ionescu-Ţiu C.*, profesor, redactor şef adjunct ; *Kiss E.*, conf. univ. (Cluj) ; *Kovacs K.*, conf. univ. (Cluj) ; *Muşat I.*, profesor ; *Ottescu C.*, profesor ; *Plăviţu M.*, profesor ; *Sacter O.*, conf. univ., redactor şef ; *Simionescu Gh.*, conf. univ. ; *Ţene L.*, profesoară şi *Voinea R.*, prof. univ.

REDACŢIA : Str. Academiei, 14 — Tel. 14.46.53 — Bucureşti

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică a şcolilor, precum şi orice material informativ se vor trimite pe adresa de mai sus.

GAZETA MATEMATICĂ

SERIA B

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XVII nr. 11 **noiembrie 1966**

PROPRIETĂȚI ALE UNOR FIGURI GEOMETRICE DEDUSE VECTORIAL

de OCTAV SACTER

Folosind exprimarea unui vector $\overline{AB}$ în funcție de vectorii de poziție ai capetelor vectorului, putem demonstra numeroase proprietăți ale figurilor geometrice.

Fie O originea tuturor vectorilor de poziție din spațiu. Să exprimăm vectorul $\overline{AB}$ în funcție de vectorii de poziție ai punctelor A, B; originea și extremitatea vectorului. În cele ce urmează vom nota vectorul $\overline{OM}$ de poziție al unui punct M prin $\overline{M}$. Astfel vectorii de poziție ai punctelor A, B sînt respectiv $\overline{A}$, $\overline{B}$.

Ținînd seama că $\overline{OB}$ este suma vectorilor $\overline{OA}$ și $\overline{AB}$ (fig. 1), avem

$$\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB} \text{ sau } \overline{B} = \overline{A} + \overline{AB}.$$

De unde rezultă

$$\overline{AB} = \overline{B} - \overline{A}.$$

Să exprimăm $\overline{M}$ în funcție de $\overline{A}$, $\overline{B}$, știind că $\frac{AM}{MB} = k$. Raportul $\frac{AM}{MB} = k$ exprimă că între vectorii $\overline{AM}$, $\overline{MB}$ avem relația $\overline{AM} = k\overline{MB}$ sau $\overline{M} - \overline{A} = k(\overline{B} - \overline{M})$. Trecînd vectorii $\overline{M}$, $k\overline{M}$ în membrul stîng și pe $\overline{A}$, $k\overline{B}$ în membrul drept, obținem

$$\overline{M} + k\overline{M} = \overline{A} + k\overline{B} \text{ sau } \overline{M}(1 + k) = \overline{A} + k\overline{B}$$

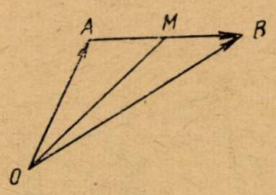


Fig. 1

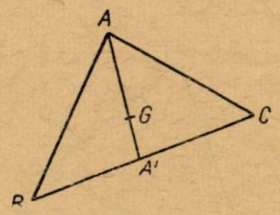


Fig 2

de unde rezultă

$$\overline{M} = \frac{\overline{A} + k\overline{B}}{1 + k} \tag{1}$$

Să aplicăm această formulă la *determinarea vectorului de poziție $\overline{G}$ al punctului de concurență a medianelor triunghiului ABC* (fig. 2).

Se știe că G se află așezat pe mediana AA' (A' mijlocul segmentului BC) astfel că avem $\frac{AG}{GA'} = 2$; rezultă deci că în conformitate cu formula (1), avem

$$\overline{G} = \frac{\overline{A} + 2\overline{A'}}{3}$$

unde substituim $\overline{A'} = \frac{\overline{B} + \overline{C}}{2}$ care se deduce din aceeași formulă (1), pentru că avem $\frac{BA'}{A'C} = 1$.

Operînd substituția indicată avem :

$$\overline{G} = \frac{\overline{A} + 2.\frac{\overline{B} + \overline{C}}{2}}{3} = \frac{\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}}{3} \qquad (2)$$

care exprimă vectorul de poziție la centrului de greutate la triunghiului ABC în funcție de vectorii de poziție $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$.

Folosind formulele stabilite mai sus să demonstrăm unele teoreme cunoscute și altele mai puțin cunoscute *.

1. **Teoremă.** *Luînd pe laturile BC, CA, AB respectiv punctele A', B', C' (fig. 3) astfel ca să avem*

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{CB'}{B'A} = \frac{AC}{C'B} = k \qquad (3)$$

unde k este un număr real oarecare, să demonstrăm că cele două triunghiuri ABC, $A'B'C'$ au același centru de greutate.

Dacă notăm cu $G_{A'B'C'}$ centrul de greutate la triunghiului $A'B'C'$, avem conform formulei (2)

$$\overline{G}_{A'B'C'} = \frac{\overline{A'} + \overline{B'} + \overline{C'}}{3} \qquad (4)$$

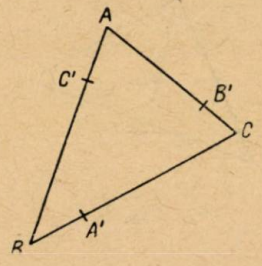


Fig. 3

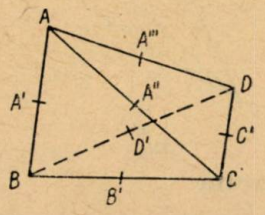


Fig. 4

* *N. Mihăleanu*, Complemente de geometrie, pag. 225.

și ținînd seama de rapoartele (3) avem $\overline{A}' = \frac{\overline{B} + k\overline{C}}{1+k}$, $\overline{B}' = \frac{\overline{C} + k\overline{A}}{1+k}$ $\overline{C} = \frac{\overline{A} + k\overline{B}}{1+k}$ pe care-i substituim în (4), după care obținem

$$\overline{G}_{A'B'C'} = \frac{\frac{\overline{B}+k\overline{C}}{1+k} + \frac{\overline{C}+k\overline{A}}{1+k} + \frac{\overline{A}+k\overline{B}}{1+k}}{3} = \frac{\overline{B}+\overline{C}+\overline{A}+k(\overline{C}+\overline{A}+\overline{B})}{1+k} = \frac{}{3} =$$

$$= \frac{\frac{(\overline{B}+\overline{C}+\overline{A})(1+k)}{1+k}}{3} = \frac{\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}}{3},$$ care este vectorul de poziție $\overline{G}_{ABC}$ al centrului de greutate a triunghiului ABC.

Deducem astfel că $\overline{G}_{ABC} = \overline{G}_{A'B'C'}$, ceea ce demonstrează teorema enunțată.

2. **Teoremă.** *Dreptele care unesc mijloacele muchiilor opuse (bimediane) ale unui tetraedru ABCD (fig. 4) sînt concurente.**

Această teoremă rezultă din considerarea vectorului $\overline{v} = \frac{\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D}}{4}$ care poate fi scris, ținînd seama de comutativitatea sumei de vectori, astfel :

$$v = \frac{\frac{\overline{A}+\overline{B}}{2} + \frac{\overline{C}+\overline{D}}{2}}{2} = \frac{\frac{\overline{A}+\overline{C}}{2} + \frac{\overline{B}+\overline{D}}{2}}{2} = \frac{\frac{\overline{A}+\overline{D}}{2} + \frac{\overline{B}+\overline{C}}{2}}{2}$$

Dacă notăm A', A'', A''', B', C', D' respectiv mijloacele muchiilor AB, AC, AD, BC, CD, DB, avem :

$$v = \frac{\overline{A}'+\overline{C}'}{2} = \frac{\overline{A}''+\overline{D}'}{2} = \frac{\overline{A}'''+\overline{B}'}{2},$$

egalități care exprimă că mijloacele bimedianelor $A'C'$, $A''D'$, $A'''B'$ reprezintă unul și același punct, ceea ce demonstrează teorema că bimedianele sînt concurente în punctul care are vectorul de poziție $\frac{\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D}}{4}$.

3. **Teoremă.** *Fiind date șase puncte distincte în spațiu A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, să demonstrăm că dreptele care unesc centrele de greutate a două triunghiuri $A_i A_j A_k$, $A_l A_m A_n$ (unde $i \neq j \neq k \neq l \neq m \neq n$ au valorile 1, 2, 3, 4, 5, 6) sînt drepte concurente.*

Pentru demonstrare considerăm vectorul

$$\frac{\overline{A}_i+\overline{A}_j+\overline{A}_k+\overline{A}_l+\overline{A}_m+\overline{A}_n}{6} = \frac{\overline{A}_1+\overline{A}_2+\overline{A}_3+\overline{A}_4+\overline{A}_5+\overline{A}_6}{6}$$

care se poate scrie

$$\frac{\frac{\overline{A}_i+\overline{A}_j+\overline{A}_k}{3} + \frac{\overline{A}_l+\overline{A}_m+\overline{A}_n}{3}}{2} = \frac{\overline{G}_{ijk}+\overline{G}_{lmn}}{2}$$

---

* *N. Mihăileanu*, Complemente de geometrie, pag. 223.

unde am notat cu $\overline{G}_{ijk}$, $\overline{G}_{lmn}$ centrele de greutate, respectiv, a triunghiurilor $A_iA_jA_k$, $A_lA_mA_n$.

Avînd în vedere că $\frac{\overline{G}_{ijk}+\overline{G}_{lmn}}{2}$ este vectorul de poziție a mijlocului segmentului care are capetele în G_{ijk} G_{lmu} (unde $\{i, j, k, l, m, n\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ rezultă că dreptele care unesc centrele de greutate a perechilor de triunghiuri $A_i\ A_j\ A_k$, $A_l\ A_m\ A_n$ sînt concurente în punctul care are vectorul de poziție

$$\frac{\overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \overline{A}_3 + \overline{A}_4 + \overline{A}_5 + \overline{A}_6}{6}.$$

4. **Teoremă.** *Fiind date n puncte fixe în spațiu A_1, A_2, ... A_n și un punct P oarecare se, ia simetricul S al lui P față de A_1, apoi simetricul S_2 al lui S_1 față de A_2 ș.a.m.d., iar la sfîrșit simetricul S_n al lui S_{n-1} față de A_n. Să se demonstreze că în cazul cînd n este impar mijlocul segmentului S_nP este un punct fix, iar dacă n este par, segmentul S_nP are o direcție fixă.*

Pentru orice n natural, avem relațiile $\overline{S}_1 = 2\overline{A}_1 - P$; $\overline{S}_2 = 2\overline{A}_2 - \overline{S}_1$; $\overline{S}_3 = 2\overline{A}_3 - \overline{S}_2$; ... $\overline{S}_n = 2\overline{A}_n - \overline{S}_{n-1}$.

Pentru n impar, prin înmulțire alternativă cu -1 a relațiilor de mai sus, obținem :

$$-\overline{S}_1 = -2\overline{A}_1 + \overline{P};\ \overline{S}_2 = 2\overline{A}_2 - \overline{S}_1;$$

$$-\overline{S}_3 = -2\overline{A}_3 + \overline{S}_2;\ \ldots\ -\overline{S}_n = -2\overline{A}_n + \overline{S}_{n-1},$$

care adunate, membru cu membru, ne dau

$$-\overline{S}_n = -2(\overline{A}_1 - \overline{A}_2 + \overline{A}_3 - \overline{A}_4 \ldots + \overline{A}_n) + \overline{P},$$

$$\text{sau } \frac{\overline{P} + \overline{S}_n}{2} = \overline{A}_1 - \overline{A}_2 + \overline{A}_3 - \overline{A}_4 + \ldots + \overline{A}_n,$$

ceea ce demonstrează prima parte a teoremei.

Dacă n este par și înmulțim alternativ cu -1 egalitățile de mai sus obținem :

$$-\overline{S}_1 = -2\overline{A}_1 + P;\ \overline{S}_2 = 2\overline{A}_2 - \overline{S}_1;\ -\overline{S}_3 = -2\overline{A}_3 + \overline{S}_2;$$

$$\ldots -\overline{S}_{n-1} = -2\overline{A}_{n-1} + \overline{S}_{n-2};$$

$$\overline{S}_n = 2\overline{A}_n - \overline{S}_{n-1}$$

pe care adunîndu-le, membru cu membru, obținem

$$\overline{S}_n = 2(-\overline{A}_1 + \overline{A}_2 - \overline{A}_3 \ldots + \overline{A}_n) + \overline{P}, \text{ sau}$$

$$\overline{S}_n - P = 2(-\overline{A}_1 + \overline{A}_2 - \overline{A}_3 \ldots + \overline{A}_n),$$

Ceea ce demonstrează a doua afirmație din teoremă.

29. Generalizarea problemei 5001

Se consideră funcția $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ (unde $A>0$). Să se arate că oricare ar fi numerele reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$, avem :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(a_i),$$

unde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sînt numere reale pozitive.

Ținînd seama de formula prin care este dată funcția, inegalitatea de demonstrat devine

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)\left[\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}\right)^2 \cdot A + \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} \cdot B + C\right] \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (Aa_i^2 + Ba_i + C)$$

sau efectuînd înmulțirile și simplificările :

$$\frac{A}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i\right)^2 + B \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i + C \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \leqslant A \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i^2 +$$

$$+ B \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i + C \sum_{i=1}^{n} \lambda_i .$$

Reducînd termenii asemenea, avem :

$$\frac{A}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}\left(\sum_{i+1}^{n} \lambda_i a_i\right)^2 \leqslant A \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i^2 ;$$

deoarece $A > 0$ și $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i > 0$, putem simplifica și putem aduce la același numitor fără ca semnul inegalității să se schimbe.

Avem deci

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i^2\right),$$

care se mai poate scrie :

$$\left[\sum_{i=1}^{n} (\sqrt{\lambda_i})(\sqrt{\lambda_i} \cdot a_i)\right]^2 \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n} (\sqrt{\lambda_i})^2\right]\left[\sum_{i=1}^{n} (\sqrt{\lambda_i} a_i)^2\right],$$

adică inegalitatea *Cauchy-Buniakowski* ($\sqrt{\lambda_i}$ este un număr real deoarece $\lambda_i > 0$).

Egalitate avem pentru $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$.

Într-adevăr,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) f(a) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot f(a).$$

În mod analog se poate arăta că dacă se consideră funcția

$$f(x) = Ax^2 + Bx + C \text{ (unde } A < 0),$$

în aceleași condiții ca la prima problemă, avem inegalitatea :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot f(a_i).$$

În particular, pentru $n = 3$ obținem problemele 5001 din *G.M.-B*, 11/1961 și 4881 din *G.M.-B*, 9/1961 propuse de prof. *C. Ionescu-Țiu*. De asemenea problema 6925 din *G.M.-B*, 6/1965 este un caz particular al generalizării problemei 5001.

Liviu Pîrșan, student matematici, București

30. Cîteva aplicații ale inegalității lui Jensen

În *G.M.-B*, 6/1965 este propus, ca subpunct al problemei 6948 (*d*), enunțul :

Fiind dat polinomul $P(x) = x^3 - 3x + 2$, pentru orice x_1, x_2 pozitivi avem :

$$P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant \frac{P(x_1) + P(x_2)}{2}.$$

Această inegalitate nu este decît o particularizare a unei teoreme referitoare la o clasă specială de funcții și anume funcțiile convexe.

Fie f o funcție reală, derivabilă pe un interval I și două puncte x_1, x_2 aparținînd lui I.

Prin definiție, spunem că f e convexă (concavă), dacă tangenta în orice punct al graficului se află sub (deasupra) graficului.

Analitic, într-un punct curent de pe grafic $A(x_0, f(x_0))$, tangenta are ecuația :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

astfel că enunțul definiției se poate scrie :

$$f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{1}$$

oricare ar fi x, $x_0 \in I$.

Amintim că, oricare ar fi $x \in I$ acesta se poate scrie ca o combinație liniară de x_1, x_2; mai mult, există două numere q_1, q_2 pozitive îndeplinind anumite condiții, astfel ca punctul :

$$x = q_1 x_1 + q_2 x_2 \tag{2}$$

să aparțină intervalului $[x_1, x_2]$.

Invers, fiecare $x \in [x_1, x_2]$ poate fi pus sub forma (2) pentru

$$q_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}; \quad q_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \tag{2a}$$

deci satisfăcînd condiția $q_1 + q_2 = 1$.

Cu această pregătire vom demonstra (numai necesitatea)

Teorema : *Condiția necesară și suficientă ca funcția* $f : I \to R$ *să fie convexă (concavă) este ca pentru oricare două puncte* $x_1, x_2 \in I$ $(x_1 \neq x_2)$ *să fie îndeplinită inegalitatea* :

$$f(q_1 x_1 + q_2 x_2) \underset{(\geqslant)}{\leqslant} q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2) \tag{3}$$

oricare ar fi numerele q_1, q_2 *pozitive, pentru care* $q_1 + q_2 = 1$.

Se poate demonstra că pentru o funcție convexă are loc inegalitatea mai generală :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} q_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} q_i f(x_i), \tag{4}$$

în care $q_i > 0$, $\sum_{i=1}^{n} q_i = 1$, cunoscută sub numele de inegalitatea lui *Jensen**).

Pentru ușurarea calculelor vom înlocui valorile $q_1, \ldots, q_n$ a căror alegere este condiționată de $\sum_{i=1}^{n} q_i = 1$ prin numere pozitive arbitrare :

$$p_i = \frac{q_i}{\sum_{i=1}^{n} q_i},$$

astfel că (4) devine :

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}\right) \underset{(\geqslant)}{\leqslant} \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} p_i}. \tag{5}$$

Aplicații. 1. Fie $f(x) = x^k$, $x > 0$, $k > 1$. Din (5) rezultă

$$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)^k \leqslant \left(\sum_{i=1}^{k} p_i\right)^{k-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^k.$$

---

*) *I. L. Jensen* — Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes. (Acta Mathematica, t. 30, 1906) și

G. M. Fichtenholț — Curs de calcul diferențial și integral, vol. I, pag. 268.

Notînd $p_i = b_i^{k/(k-1)}$, $x_i = a_i b_i^{-1/(k-1)}$, $a_i > 0$, $b_i > 0$, rezultă :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{1}^{n} a_i^k \right)^{1/k} \cdot \left(\sum_{1}^{n} b_i^{k/(k-1)} \right)^{(k-1)/k}, \tag{6}$$

adică inegalitatea *Cauchy-Hölder*.

a) Pentru $b_i = 1$, $k = m$, rezultă $\left(\sum_{1}^{n} a_i \right)^m \leqslant n^{m-1} \sum_{1}^{n} a_i^m$

În particular, pentru $n = 2$ regăsim problema 6321.

b) Cu ajutorul relației a) se pot stabili ușor inegalitățile lui *Mac Laurin* :

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n \leqslant \frac{C_n^2}{n^2} \left(\sum_{i}^{n} x_i \right); \ (x_i > 0),$$

$$x_1 x_2 x_3 + \ldots + x_{n-2} x_{n-1} x_n \leqslant \frac{C_n^3}{n^3} \left(\sum_{i}^{n} x_i \right)^3, \text{ etc.}$$

Într-adevăr, pentru $m = 2$ în inegalitatea a) avem :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 \leqslant n \sum_{i}^{n} x_i^2.$$

Scriind $\Sigma x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$, care e un polinom simetric, în funcție de polinoamele simetrice fundamentale :

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n ; \ \sigma_2 = x_1 x_2 + \ldots + x_{n-1} x_n$$

rezultă : $\Sigma x_i^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$, adică :

$$\sigma_1^2 \leqslant n (\sigma_1^2 - 2\sigma_2),$$

de unde :

$$\sigma_2 \leqslant \frac{n(n-1)}{2!n^2} \sigma_1^2,$$

deci tocmai prima inegalitate a lui *Mac Laurin*. La fel se demonstrează și a doua, ș.a.m.d.

c) Făcînd în a) $k = 2$, rezultă inegalitatea *Cauchy-Buniakowski* :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2}, \quad a_i > 0, \ b_i > 0 \tag{7}$$

care pentru $a_k = a_k^{(m+p)/2}$, $b_k = a_k^{(m-p)/2}$ devine problema 4482 din *GM-B*, 12/1960, propusă de prof. *C. Ionescu-Țiu*.

Scriind (7) sub forma :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right)^2 \leqslant \sum_{1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2, \tag{7'}$$

pentru $a_k = \sqrt{a_k x_k}$, $b_k = \sqrt{\frac{b_k}{x_k}}$ regăsim problema 6919 din *G.M.-B*, 5/1965, iar pentru $a_k = \sqrt{a_k}$, $b_k = 1/\sqrt{a_k}$ obținem problema 4538.

d) Din inegalitatea Cauchy-Hölder se poate obține inegalitatea lui *Minkowski* :

$$\left[\sum_1^n (a_i + b_i)^k\right]^{1/k} \leqslant \left(\sum_1^n a_i^k\right)^{1/k} + \left(\sum_1^n b_i^k\right)^{1/k}, \quad a_i > 0, \; b_i > 0. \tag{8}$$

Într-adevăr,

$$\sum_1^n (a_i + b_i)^k = \sum_1^n a_i (a_i + b_i)^{k-1} + \sum_1^n b_i (a_i + b_i)^{k-1}.$$

Aplicînd termenilor din partea dreaptă inegalitatea (6) și adunînd relațiile rezultă inegalitatea (8).

2. Fie $f(x) = x^k$, $x > 0$, $k \in (0, 1)$ · f este concavă, deci

$$\left(\sum_1^n p_i x_i\right)^k \geqslant \left(\sum_1^n p_i\right)^{k-1} \cdot \sum p_i x_i^k, \; p_i > 0, \; x_i > 0,$$

care pentru $p_i = 1$, $x_i = a_i^m$, $k = m^{-1}$, $m > 1$, devine :

$$\sqrt[m]{\frac{\sum_1^n a_i^m}{n}} \geqslant \frac{\sum_1^n a_i}{n}.$$

În particular, pentru $m = 2$, $n = 2$, și $m = 3$, $n = 3$ regăsim problema 6007 din *G.M.F.-B*, 10/1963.

3. Fie $f(x) = \sin^k x$, $k > 0$, $x \in [0, \pi]$; f este concavă, deci.

$$\sin^k \frac{\sum_1^n p_i x_i}{\sum_1^n p_i} \geqslant \frac{\sum_1^n p_i \sin^k x_i}{\sum_1^n p_i}.$$

Pentru $k = \frac{1}{2}$, $p_i = 1$, $x_i = A_i$ (A_i unghiurile unui poligon convex) și ținînd seama de suma unghiurilor unui poligon convex cu n laturi rezultă :

$$\sum_{i=1}^n \sin A_i \leqslant n \sqrt{\sin \frac{2\pi}{n}},$$

adică problema 6200 din *G.M.-B*, 2/1964.

În particular, pentru $n = 3$ rezultă problema 5696 din *G.M.F.-B*, 3/1963.

4. Fie $f(x) = \operatorname{tg}^k x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ — convexă pentru $k > 0$.

$$\operatorname{tg}^k \frac{\sum_1^m p_i x_i}{\sum_1^m p_i} \leqslant \frac{\sum_1^m p_i \operatorname{tg}^k x_i}{\sum_1^m p_i};$$

pentru $k = n$, $p_i = 1$, $x_i = \frac{A_i}{2}$ (A_i unghiurile unui poligon convex) rezultă :

$$\sum_{i=1}^{m} \operatorname{tg}^n \frac{A_i}{2} \geqslant m \operatorname{tg}^n \frac{m-2}{m} \pi.$$

În particular, pentru $m = 3$ și $A_i = 2B_i$ (B_i unghiurile unui triunghi) regăsim problema 6397 din *G.M.-B*, 6/1964.

Pentru $k = 1$, $p_i = 1$, $x_i = \alpha_i \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, relația de mai sus devine :

$$\frac{\sum \operatorname{tg} \alpha_i}{n} \geqslant \operatorname{tg} \frac{\sum \alpha_i}{n},$$

generalizarea problemei 4246 din *G.M.F.-B*, 6/1960, unde $n = 2$.

5. Fie $f(x) = \operatorname{cosec} x$, $x \in (0, \pi)$ — concavă.

Pentru $p_i = 1$, $x_i = \frac{A_i}{2}$, obținem :

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{cosec} \frac{A_i}{2} \geqslant n \operatorname{cosec} \frac{n-2}{2n} \pi,$$

care pentru $n = 3$ reproduce problema 6378 din *G.M.-B*, 6/1964.

6. Fie $f(x) = \ln x$, $x > 0$; $f(x)$ este concavă. Obținem

$$\ln \frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i} \geqslant \frac{\sum p_i \ln x_i}{\sum p_i}$$

și, utilizînd proprietățile logaritmilor, rezultă :

$$\frac{\sum_1^n p_i x_i}{\sum_1^n p_i} \geqslant \left(\sum_1^n x_i^{p_i} \right)^{1/\sum p_i}$$

a) Pentru $p_i = x_i = a_i$ această inegalitate devine :

$$\sqrt[\sum a_i]{\Pi a_i^{a_i}} \leqslant \frac{\sum a_i^2}{\sum a_i}$$

și notînd $\frac{a_i}{\sum a_i} = \alpha_i$ rezultă :

$$\prod_1^n a_i^{\alpha_i} \leqslant \sum_1^n a_i \alpha_i,$$

inegalitate cunoscută.

b) Pentru $p_i = a_i$, $i \neq k$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $x_k = a_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, obținem

$$\sqrt[\sum_1^n a_k]{\prod_1^n a_i^{a_i}} \leqslant \frac{\sum a_i a_k}{\sum a_i}.$$

În particular, pentru $n=2$ rezultă problema 5767 din *G.M.F.—B*, 5/1963.

c) Făcînd $p_i = 1$, rezultă :

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leqslant \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$$

relaţie cunoscută.

7. Fie $f(x) = x\ln x$, $x>0$ — convexă.

Scriind inegalitatea lui *Jensen* relativă la $f(x)$ şi utilizînd proprietăţile logaritmilor obţinem :

$$\sum_1^n p_i x_i \leqslant \sum_1^n p_i \left(\prod x_i^{p_i x_i}\right)^{\frac{1}{\Sigma p_i x_i}}$$

a) Din $p_i = 1$; $x_i = a_i$ rezultă : $\sqrt[\sum_1^n a_i]{\prod_1^n a_i^{a_i}} \geqslant \sum_1^n a_i$.

b) Din $p_i = \frac{1}{x_i}$ rezultă : $\sqrt[n]{x_i \ldots x_n} \leqslant \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$

relaţie cunoscută.

8. Putem arăta că dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt distanţele de la un punct interior unui poligon convex, de laturi $a_1, \ldots, a_n$ şi de arie S, la laturi, avem :

$$x_1 \cdot x_{2k} \cdot \ldots \cdot x_n \leqslant \frac{2^n S^n}{n^n . a \ldots . a_n}.$$

Într-adevăr, ţinînd seama de relaţia $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots a_nx_n = 2S$ şi de relaţia 6 c) pentru $x_i = a_i\, x_i$, rezultă relaţia cerută.

G. Oprescu, student matematici, Bucureşti

31. Inegalitatea lui Jensen şi generalizarea problemelor 2391, 4538, 3691, 5767, 6200

Fiind date un sistem de puncte materiale M_i, situate în plan, avînd masele m_i şi coordonatele (x_i, y_i) faţă de un sistem de referinţă ortogonal, coordonatele centrului de greutate al sistemului sînt date de formulele :

$$X = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}. \qquad Y = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}. \tag{1}$$

Dacă punctele M_i sînt situate pe o curbă de ecuaţie $y = f(x)$ şi dacă pe intervalul (x_1, x_n) curba nu are puncte de inflexiune, atunci avem :

$f(X) \geqslant Y$ sau $f(X) \leqslant Y$ după cum curba este *concavă* sau *convexă* pe intervalul considerat.

Ţinînd seama de formulele (1), rezultă că avem :

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}\right) \geqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \text{ dacă } f''(x)<0. \tag{2}$$

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}\right) \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \text{ dacă } f''(x)>0. \tag{2'}$$

Folosind formulele (1), (2) şi (2′) vom obţine diferite inegalităţi.*

a) Dacă în formula (2) punem : $f(x) = \log x$, $m_i = b_i$, $x_i = a_i > 0$, obţinem

$$\log \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i} \geqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i \log a_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i}$$

şi dacă ţinem seama că

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} b_i \log a_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \log a_i^{b_i}}{\sum_{i=1}^{n} b_i} = \log \sqrt[\sum_{i=1}^{n} b_i]{\prod_{i=1}^{n} a_i^{b_i}},$$

precum şi de faptul că logaritmul este o funcţie monoton crescătoare, avem inegalitatea

$$\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} \geqslant \sqrt[\sum_{i=1}^{n} b_i]{a_1^{b_1} \cdot a_2^{b_2} \ldots \ldots a_n^{b_n}} \tag{3}$$

b) Dacă în (3) punem $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 1$, obţinem inegalitatea lui Cauchy

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \ldots \ldots a_n}.$$

---

* G.M – B, 1959, pag. 521. 522, 529.

c) Punînd în (2′) $f(x) = \frac{1}{x}$ și $m_i = 1$, $x_i = a_i$, avem :

$$\frac{1}{\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}{n}$$

sau

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} \geqslant \frac{n^2}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}, \tag{4}$$

inegalitate propusă prin problema 2391 din *G.M.F.-B* nr. 11/1956, sau 4538, *G.M-B* nr. 1/1961.

d) Dacă $n = 2$, ținînd seama de (3) și punînd $a_2 = b_1 = a > 0$, $a_1 = b_2 = b > 0$, obținem

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \geqslant \sqrt[a+b]{a^b \cdot b^a}, \text{ de unde } \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt[a+b]{a^b b^a},$$

care face obiectul problemei 5767 din *G.M.F.-B* nr. 5/1963.

e) Notînd $t = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, relația (4) ne dă :

$$\frac{1}{t - a_1} + \frac{1}{t - a_2} + \ldots + \frac{1}{t - a_n} \geqslant \frac{n^2}{(n-1)t}, \text{ care se mai scrie}$$

$$\frac{t}{t - a_1} - 1 + \frac{t}{t - a_2} - 1 + \ldots + \frac{t}{t - a_n} - 1 \geqslant \frac{n^2}{n-1} - n$$

sau

$$\frac{a_1}{a_2 + a_3 + \ldots + a_n} + \frac{a_2}{a_1 + a_3 + \ldots + a_n} + \ldots + \frac{a_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}} \geqslant \frac{n}{n-1}$$

inegalitate dată la Olimpiada matematică din R.P.Polonă și publicată în *G.M.-B*, nr. 6, 1959, sub numărul 3691.

f) Dacă în (2) punem $f(x) = \sqrt{\sin x}$ și $x_i = A_i$, $m_i = 1$, avem :

$$\sqrt{\sin \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i}{n}} \geqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\sin A_i}}{n}.$$

Dacă A_i sînt unghiurile unui patrulater convex, atunci $\sum_{i=1}^{n} A_i = 180°n - 360°$ și inegalitatea se scrie astfel :

$$\sqrt{\sin A_1} + \sqrt{\sin A_2} + \ldots + \sqrt{\sin A_n} \leqslant n \sqrt{\sin \frac{360°}{n}},$$

obținîndu-se problmea 6200 din *G.M.B.* nr. 2/1964.

N. Teodorescu și *Gh. Rizescu*, profesori București

A VIII-a OLIMPIADĂ INTERNAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

de conf. univ. *Tiberiu Roman*

Anul acesta între 3 și 14 iulie a avut loc la Sofia Olimpiada internațională cu participarea elevilor și profesorilor din 9 țări: *R. P. Bulgaria*, *R. S. Cehoslovacia*, *R. D. Germană*, *R. S. F. Jugoslavia*, *R. P. Mongolă*, *R. P. Polonă*, *R. S. România*, *R. P. Ungară* și *U.R.S.S.*

Echipa țării noastre a fost formată din elevii: *Alexandru Bădescu*, Liceul 2 Ploiești; *Dan Cartianu*, Liceul Spiru Haret București; *Petru Farkaș*, Liceul Bălcescu Cluj; *Bogdan Lungulescu*, Liceul 1 Pitești; *Nicolae Manolache*, Liceul M. Sadoveanu București; *Eugen Popa*, Liceul 3 Iași și *Dan Voiculescu*, Liceul 21 București. Dintre aceștia, 2 absolviseră clasa a XI-a iar 6 clasa a X-a.

Lucrările olimpiadei s-au desfășurat sub conducerea unui juriu internațional format din cei 9 șefi ai delegațiilor, sub conducerea prof. univ. *Alipi Mateev* (R. P. Bulgaria). Lucrările scrise au avut loc într-un amfiteatru al Universității în zilele de 5 și 6 iulie, acordîndu-se cîte 4 ore de lucru pentru fiecare grup de cîte 3 probleme.

Corectarea lucrărilor scrise s-a făcut de profesorii fiecărei delegații, iar revizuirea lor pentru unificarea criteriilor de acordare a punctelor, definitivarea punctajelor pentru fiecare elev și în consecință acordarea premiilor s-au făcut în zilele de 5—8 iulie cu sprijinul unui grup de matematicieni bulgari, de către juriul internațional.

Împărțirea premiilor a avut loc în ziua de 13 iulie la Universitate. În afara delegațiilor la *O.I.M.*, au fost de față Ministrul învățămîntului popular, reprezentanți ai unor ambasade din Sofia, reprezentanți ai presei.

La masa de închidere a *O.I.M.*, elevii noștri au împărțit ca amintire elevilor din celelate țări diferite obiecte de artă populară, iar profesorii au distribuit cărți și obicte de artizanat celorlalți profesori.

Cu privire la probleme. Comisia de organizare a țării gazdă a primit 49 de probleme propuse de cele 9 țări participante. Selecția inițială cuprindea 19 probleme, la care, în cursul discuțiilor, s-au adăugat încă 7 probleme. Discuțiile asupra problemelor care urmau să fie date elevilor au durat aproape 10 ore. S-a însușit punctul de vedere al delegației române ca în selecția finală fiecare țară participantă să aibe cel mult o problemă. Problemele date la *O.I.M.* au fost tipărite în G.M.-B, pag. 421 din nr. 9/1966. În alte numere ale revistei se publică și unele din problemele propuse la *O.I.M.*

În total s-au acordat celor 6 probleme 40 puncte, repartizate egal pe cele două lucrări scrise.

Rezultatele obținute. Echipa română a obținut următoarele premii: *Dan Voiculescu* — premiul I, *Eugen Popa* — premiul II, *Alexandru Bădescu* și *Bogdan Lungulescu* — premiul III. Au fost citați pentru generalizările interesante pe care le-au dat: *Dan Voiculescu* (pentru problemele 5 și 6) și *Dan Cartianu* (pentru problema 6).

Lista tuturor premianților se găsește la pag. 496. Întrucît regulamentul *O.I.M.* nu prevede o clasificare a echipelor, căci ea este o întrecere între elevi, toate delegațiile au fost de acord să nu se publice o ordine de clasificare.

Dan Voiculescu

Eugen Popa

Alexandru Bădescu

Bogdan Lungulescu

Nicolae Manolache

Petru Farkaş

Dan Cartianu

Dan Ralescu

O analiză a modului în care s-au rezolvat problemele propuse, de către elevii noştri, se va publica în Gazeta matematică seria B în 1967.

Programul conex. Elevii au vizitat Sofia în mai multe jumătăţi de zile, au făcut o excursie la Lacul de acumulare de la Pancearevo, au avut întîlniri şi discuţii cu elevii celorlalte delegaţii ca şi cu unii elevi din Sofia. S-au creat astfel condiţiile ca elevii noştri să se împrietenească cu alţi elevi şi să-i cunoască nu numai punct de vedere al preocupărilor lor matematice, în cadrul jocurilor sportive, al schimburilor de insigne, al discuţiilor amicale etc.

Toate delegaţiile au făcut o excursie de 4 zile cu autobuzele putînd cunoaşte unele realizări ale poporului bulgar în construcţia socialismului, frumuseţi naturale şi caracteristici geoclimatice, cetăţeni de diferite vîrste şi profesiuni din ţara vecină şi prietenă. S-au vizitat astfel oraşele Tîrnovo, Varna, Burgas, Plovdiv (deşi s-a rezervat destul de puţin timp pentru aceasta) ca şi plajele „Prietenie", „Nisipurile de aur", „Coasta însorită".

Toţi elevii au primit cîte o diplomă de participant şi insigna celei de-a VIII-a *O.I.M.*

În mai multe ocazii, profesori din diferite ţări au subliniat meritul ţării noastre pentru iniţiativa organizării olimpiadelor internaţionale de matematică şi pentru găzduirea lor în primii doi ani (1959 şi 1960). La şedinţa festivă de închidere a celei de-a VIII-a *O.I.M.* preşedintele juriului internaţional a adus mulţumiri publice României pentru această iniţiativă.

Actuala ediţie a *O.I.M.* a dovedit din nou utilitatea şi importanţa unor asemenea întîlniri şi întreceri prieteneşti pe tărîm matematic între elevii diferitelor ţări. Este de dorit ca ediţiile viitoare să marcheze progrese în direcţia participării unui număr mai mare de ţări ca şi a obţinerii unor mai bune rezultate de către toţi participanţii şi în special de către elevii noştri.

Premianţii celei de-a 8-a O.I.M.

PREMIUL I

1. *Iurii Bogdanskii*, Kiev, 2. *Peter Enskonatus*, Berlin, 3. *Sabir Gusein-Zade*, Moscova, 4. *Walter Lipe*, Berlin, 5. *Laszlo Lovasz*, Budapesta, 6. *Andrei Marcenko*, Harkov, 7. *Michaz Misiurevicz*, Varşovia, 8. *Jazsef Pelikan*, Budapesta, 9. *Lajos Posa*, Budapesta, 10. *Iosef Richard*, Deuna, 11. *Dan Voiculescu*, Bucureşti, 12. *Mihail Fokin*, Novosibirsk, 13. *Grigorii Rozenheim*, Leningrad.

PREMIUL II

1. *Tadeusz Figiel*, Gdansk Wrzeszcz, 2. *Reinhard Höppner*, Prösen, 3. *Boris Matikainen*, Moscova, 4. *Bogus Sivak*, Zvolen, 5. *Jovare Vukmirovîi*, 6. *Eugen Popa*, Iaşi, 7. *Aleksandar Torgasov*, 8. *Zenon Fortuna*, Rzeszow, 9. *Tadeusz Iwaniec*, Elblag, 10. *Miklos Laczkovich*, Budapesta, 11. *Ştefan Heinrich*, Berlin, 12. *Henryk Iwaniec*, Elblag, 13. *Gert Siebert*, Berlin, 14. *Laszlo Babai*, Budapesta, 15. *Gheorghi Gargov*, Sofia.

PREMIUL III

1. *Alexandru Bădescu*, Ploiești, 2. *Liudmila Krîsteva*, Vidin, 3. *Jacek Litwin*, Varșovia, 4. *Bogdan Lungulescu*, Pitești, 5. *Jernej Polajnar*, Belgrad, 6. *Aleksandr Zaimskih*, Moscova, 7. *Petko Kazandjiev*, Kazanlîc 8. *Peter Kderlin*, Prievidza, 9. *Vladislav Mihailov*, Sofia, 10. *Laszlo Suranyi*, Budapesta, 11. *Petr Kurka*, Praga.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 7251

Să se afle limita șirului $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{6k-1}{3^k}$

I. Șiclovan, Petroșani

Soluție dată de *Vasile Eremia*, elev Constanța. Putem scrie:

$$\frac{6k-1}{3^k} = \frac{k}{3^{k-2}} - \frac{k}{3^{k-1}} - \frac{1}{3^k}$$

Facem în această egalitate pe $k = 1,2,3, \ldots, n$, și adunăm membru cu membru toate egalitățile. Obținem:

$$a_n = \sum_{k-1}^{n} \frac{6k-1}{3^k} = 3 - 1 + 2 - \frac{1}{3^n - 1} - \frac{n}{3^{n-1}} \frac{1}{3^n}$$

de unde:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 4$$

Problema 7253

Fie șirurile recurente $\{u_n\}$ și $\{v_n\}$ *caracterizate de relațiile de recurență*:

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

$$v_n = v_{n-1} + v_{n-2} + v_{n-3}$$

Să se determine relația de recurență a șirului sumă $\{u_n + v_n\}$ (vezi articolul din *G.M.-B* 1965 pag. 1—11).

Soluția I-a. Vom avea în vedere articolul lui Ion I. Cristea: „Despre șiruri recurente" din *G.M.-B*, 1965, nr. 1, pag. 1—11.

Ecuațiile caracteristice ale șirurilor $\{u_n\}$ și $\{v_n\}$ sînt:

$$x^2 - x - 1 = 0 \text{ și } y^3 - y^2 - y - 1 = 0,$$

astfel că termenii generali ai celor două șiruri sînt de forma

$$u_n = a_1 x_1^n + a_2 x_2^n$$

$$v_n = b_1 y_1^n + b_2 y_2^n + b_3 y_3^n$$

unde x_1, x_2 şi y_1, y_2, y_3 sînt respectiv rădăcinile celor două ecuaţii caracteristice, iar a_1, a_2, b_1, b_2, b_3 nişte constante.

Să notăm $s_n = u_n + v_n$. Vizibil termenul general al şirului $\{s_n\}$ este de forma

$$s_n = a_1x_1^n + a_2x_2^n + b_1y_1^n + b_2y_2^n + b_3y_3^n$$

astfel că ecuaţia caracteristică a şirului $\{s_n\}$ avînd ca rădăcini pe x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, se va putea pune sub forma

$$(t^2 - t - 1)(t^3 - t^2 - t - 1) = 0$$

sau

$$t^5 - 2t^4 - t^3 + t^2 + 2t + 1 = 0$$

Deci şirul $\{s_n\}$ va satisface relaţia de recurenţă

$$s_n = 2s_{n-1} + s_{n-2} - s_{n-3} - 2s_{n-4} - s_{n-5}.$$

Soluţia a II-a dată de *N. Teodorescu*, Bucureşti. Notînd $S_n = u_n + v_n$, prin adunarea relaţiilor

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \tag{1}$$

$$v_n = v_{n-1} + v_{n-2} + v_{n-3} \tag{2}$$

rezultă :

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-2} + v_{n-3}. \tag{3}$$

Din (3) rezultă succesiv :

$$\begin{aligned} S_{n-1} &= S_{n-2} + S_{n-3} + v_{n-4} \\ S_{n-2} &= S_{n-3} + S_{n-4} + v_{n-5} \\ S_{n-3} &= S_{n-4} + S_{n-5} + v_{n-6}. \end{aligned} \tag{4}$$

Din (2) rezultă :

$$v_{n-3} = v_{n-4} + v_{n-5} + v_{n-6} \tag{5}$$

Adunînd relaţiile (4), scăzîndu-le din (3) şi ţinînd seama de (5) rezultă relaţia :

$$S_n = 2S_{n-1} + S_{n-2} - 2S_{n-3} - S_{n-5}.$$

Problema 7254

Se consideră curba (Γ) *definită de ecuaţia* $(\Gamma) \equiv 2x^3 + (a + 2x)y^2 = 0$ (a = *constant*) *şi familia de cercuri* (C) *care trec prin origine şi sînt tangente mereu curbei* (Γ).

Se cere locul geometric al punctelor de pe cercurile (C) *diametral opuse originii.*

Soluţie dată de *M. Cistelecan*, Cluj. Ecuaţia cercurilor care trec prin origine este : $x^2 + y^2 + mx + ny = 0$. Pentru tangenţă se mai pune condiţia ca sistemul : $(\Gamma) \equiv y^2 = -\frac{2x^3}{a + 2x}$; $x^2 + y^2 + mx + ny = 0$ să aibă două soluţii confundate.

Pentru rezolvarea sistemului, se înlocuieşte y^2 din prima ecuaţie în a 2-a:

$$x^2 - \frac{2x^3}{a+2x} + mx + ny = 0\,;\; ax^2 + (a+2x)\,mx + (a+2x)\,ny = 0$$

de unde se scoate $y = -\frac{(a+2m)\,x^2 + amx}{n\,(a+2x)} = -\frac{x\,[(a+2m)\,x + am]}{n\,(a+2x)}$ şi se înlocuieşte înapoi în ecuaţia I:

$$\frac{x^2\,[(a+2m)\,x + am]^2}{n^2\,(a+2x)} = \frac{2x^3}{a+2x}\,.$$

$$[(a+2m)\,x + am]^2 = -\,2n^2a\,(a+2x).$$

Se fac dezvoltările:

$$(a+2m)^2x^2 + a^2m^2 + 2am\,(a+2m)\,x\;2an^2x + 4n^2x^2 = 0$$

Grupînd termenii, se ajunge la ecuaţia de gradul II în x:

$$[(a+2m)^2 + 4n)]\,x^2 + 2a\,[am + 2m^2 + n^2]\,x + a^2m^2 = 0.$$

Condiţia ca această ecuaţie să aibă rădăcini egale este:

$$a^2\,(am + 2m^2 + n^2)^{\,2} - a^2m^2\,[\,(a+2m)^2 + 4n^2] = 0\,;$$

se împarte cu a^2:

$$a^2m^2 + 4m^4 + n^4 + 4am^3 + 2amn^2 + 4m^2n^2 - a^2m^2 - 4am^3 - 4m^4 - 4m^2n^2 = 0$$

şi reducînd termenii asemenea se obţine $n^4 + 2amn^2 = 0$ sau $n^2 + 2am = 0$, care este condiţia de tangenţă a cercurilor $x^2 + y^2 + mx + ny = 0$ cu curba (Γ).

Vom căuta coordontele punctului diametral opus originii. Voi intersecta cercurile cu dreapta (D) care trece prin origine şi prin centrele cercurilor: $\left(-\frac{m}{2}, -\frac{n}{2}\right)$.

Panta acestei drepte este $\frac{n}{m}$, deci ecuaţia ei este $y = \frac{n}{m}\,x$.

Înlocuim pe y în ecuaţia cercurilor:

$$x^2 + \frac{n^2}{m^2}\,x^2 + mx + \frac{n^2}{m}\,x = 0,$$

$$(m^2 + n^2)\,x + m^3 + mn^2 = 0\,;\; (m^2 + n^2)\,x + m\,(m^2 + n^2) = 0.$$

Coordonatele punctului căutat sînt: $x = -m$, $y = -n$.

Pentru găsirea locului geometric avem de eliminat parametrii m şi n din 3 relaţii: $x = -m$; $y = -n$; $n^2 + 2am = 0$, eliminare care duce evident la parabola $y^2 - 2ax = 0$, care este locul geometric cerut.

Problema 7255

Fie în triunghiul ABC, O centrul cercului circumscris, I centrul cercului înscris, N punctul lui Nagel și O_9 centrul cercului lui Euler. Să se arate că dreapta care unește mijloacele segmentelor NI și NO trece prin O_9.

Teodor Gh. Cocea

Soluție dată de *I. Chițescu*, student București. Fie H ortocentrul și G centrul de greutate al triunghiului ABC. Se știe că G se găsește pe OH și satisface relația

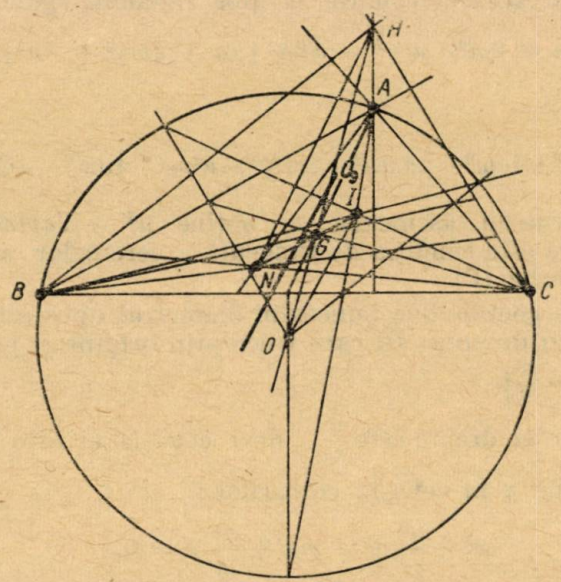
$$HG = 2GO \tag{1}$$

și pe IN stisfăcînd relația,

$$NG = 2GI \tag{2}$$

(vezi Geometria triunghiului de *Traian Lalescu*, paragrafele 1.9 și 4.40).

Triunghiurile OGI și HGN sînt asemenea, avînd unghiurile din G egale și laturile GH și GN omoloage proporționale cu GO și GI, căci din relațiile (1) și (2), împărțind relația (1) la (2), avem $\frac{GH}{GN} = \frac{GO}{GI}$. Rezultă deci că HN este paralelă la OI și avem relația $HN = 2OI$.



În triunghiul NOI dreapta care unește mijloacele laturilor NO și NI este paralelă la OI și deci paralelă și la NH.

În triunghiul NOH această dreaptă trecînd prin mijlocul lui NO și fiind paralelă la NH va trece și prin mijlocul laturii OH, care este O_9, centrul cercului lui *Euler* al triunghiului ABC.

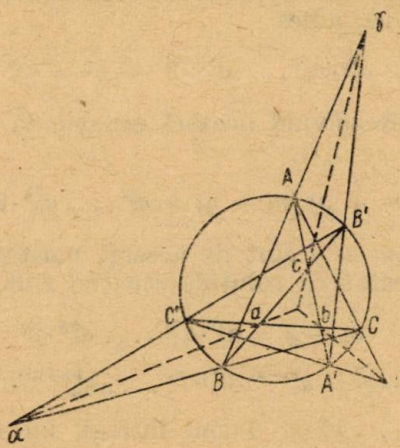
Problema 7256

Fie triunghiurile ABC, $A'B'C'$, înscrise în aceeași conică. Notăm: $(BC)\cap(B'C')\equiv\alpha$; $(CA)\cap(C'A')\equiv\beta$; $(AB)\cap(A'B')\equiv\gamma$ *precum și* $(BB')\cap(CC')\equiv a$; $(CC')\cap(AA')\equiv b$; $(AA')\cap(BB')\equiv c$.

Dreptele $(a\alpha)$, $(b\beta)$, $(c\gamma)$ *sînt concurente.*

Chițescu Ion, elev București

Soluția autorului: Notăm: $(BC')\cap(B'C)\equiv a_1$; $(CA')\cap(C'A)\equiv b_1$ și $(AB')\cap(A'B)\equiv c_1$ (punctele a_1, b_1, c_1 nu sînt figurate).



Se observă că $(a\alpha)$ este polara lui a_1 în raport cu conica dată; analog $(b\beta)$ față de b_1 și $(c\gamma)$ față de c_1.

Hexagonul $BC'AB'CA'$ este înscris în conică.

Laturile sale sînt: $(BC')\equiv l_1$; $(C'A)\equiv l_2$; $(AB')\equiv l_3$; $(B'C)\equiv l_4$; $(CA')\equiv l_5$; $(A'B)\equiv l_6$.

Avem: $l_1\cap l_4\equiv a_1$; $l_2\cap l_5\equiv b_1$; $l_3\cap l_6\equiv c_1$.

Conform teoremei lui *Pascal*, punctele a_1, b_1, c_1 sînt colineare.

Polii fiind în linie dreaptă, rezultă concurența polarelor lor, ceea ce ne-am propus să demonstrăm.

Problema 7257

Să se rezolve în numere întregi ecuația în x și y:

$$x^2 - y^2 + 2bx + b^2 - a_1^{p_1}\cdot a_2^{p_2}\cdot\ldots\cdot a_n^{p_n}\cdot 2^k = 0,$$

unde b este un număr întreg, n, p_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ și k numere naturale, iar a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ numere prime distincte mai mari decît 2.

Să se arate că ecuația dată admite

$$2(k-1)\prod_{i=1}^{n}(p_i+1)$$

perechi distincte de soluții întregi.

Tudor Zamfirescu

Soluția autorului. Rezolvăm ecuația în raport de x:

$$x_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2-(b^2-a_1^{p_1}\cdot a_2^{p_2}\cdot\ldots\ldots a_n^{p_n}\cdot 2^k - y^2)} =$$

$$= -b \pm \sqrt{a_1^{p_1}\cdot a_2^{p_2}\cdot\ldots\ldots a_n^{p_n}\cdot 2^k + y^2}.$$

Pentru ca $x_{1,2}$ să fie întregi trebuie ca discriminantul să fie patrat perfect de număr întreg, adică:

$$a_1^{p_1}\cdot a_2^{p_2}\cdot\ldots\ldots a_n^{p_n}\cdot 2^k + y^2 = m^2$$

unde m este întreg. Rezolvînd această ecuație în numerele întregi m și y, avem

$$(m+y)(m-y) = a_1^{p_1}\cdot\ldots\ldots a_n^{p_n}\cdot 2^k.$$

Cum $m+y$ și $m-y$ sînt de aceeași paritate, rezultă că ambele sînt pare. Reiese imediat că soluțiile ecuației sînt date de sistemul

$$m+y = a_1^{\alpha_1}\cdot a_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\ldots a_n^{\alpha_n}\cdot 2^{\beta}$$

$$m-y = a_1^{p_1-\alpha_1}\cdot a_2^{p_2-\alpha_2}\cdot\ldots\ldots a_n^{p_n-\alpha_n}\cdot 2^{k-\beta}$$

unde α_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ și β sînt întregi, iar $0 \leqslant \alpha_i \leqslant p_i$ și $0 < \beta < k$; deci

$$y = a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\ldots a_n^{\alpha_n}\cdot 2^{\beta-1} - a_1^{p_1-\alpha_1}\cdot a_2^{p_2-\alpha_2}\cdot\ldots\ldots a_n^{p_n-\alpha_n}\cdot 2^{k-\beta-1},$$

pentru care

$$x_{1,2} = -b \pm m = -b \pm (a_1^{\alpha_1}\cdot a_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\ldots a_n^{\alpha_n} 2^{\beta-1} +$$

$$+ a_1^{p_1-\alpha_1}\cdot a_2^{p_2-\alpha_2}\cdot\ldots\ldots a_n^{p_n-\alpha_n}\cdot 2^{k-\beta-1}).$$

Deci fiecărei soluții y îi corespund cîte 2 soluții x, deci cîte 2 perechi de soluții întregi distincte.

Să calculăm numărul soluțiilor y. Pentru aceasta observăm că fiecărei grupări $a_1^{\alpha_1}\cdot a_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\ldots a_n^{\alpha_n}\cdot 2^{\beta}$ îi corespunde o soluție y. Numărul posibilităților de formare a unei grupe $a_1^{\alpha_1}\cdot a_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\ldots a_n^{\alpha_n}\cdot 2^{\beta}$ este egal cu produsul dintre numerele posibilităților de formare a factorilor $a_1^{\alpha_1}$, $a_2^{\alpha_2}$, ..., $a_n^{\alpha_n}$, 2^{β}. Pentru factorul $a_i^{\alpha_i}$ găsim, avînd în vedere că $0 \leqslant \alpha_i \leqslant p_i$, următoarele posibilități: 1, a_i, a_i^2, ..., $a_i^{p_i-1}$, $a_i^{p_i}$, adică p_i+1 posibilități, oricare ar fi i natural mai mic sau egal cu n. Pentru 2^{β} avem, ținînd seamă că $0 < \beta < k$, posibilitățile $2, 2, 2^2, \ldots 2^{k-2}, 2^{k-1}$, adică $k-1$ posibilități. Deci

numărul posibilităților de formare a unei grupei $a_1^{\alpha_1} \cdot a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n} \cdot 2^\beta$ este egal cu

$$(p_1+1)(p_2+1)\dots(p_n+1)(k-1)$$

prin urmare ecuația dată admite în total $(k-1)\prod_{i=1}^{n}(p_i+1)$ soluții y distincte. Deci ea admite

$$2(k-1)\prod_{i=1}^{n}(p_i+1)$$

perechi de soluții (x, y) distincte.

Problema 7284

Un grup de elevi a hotărît să viziteze o instalație industrială care se găsea departe de localitatea din care porneau. Știind că la ducere autobuzul cu care au făcut călătoria a mers cu viteza medie de 45 km / oră, iar la înapoiere a parcurs 60% din distanță cu viteza de 45 km/oră și restul cu viteza medie de 40 km/oră, din care cauză la înapoiere a făcut cu 40 minute mai mult decît la ducere, să se afle distanța pînă la localitatea vizitată.

D. Mîrzan, R. Vîlcea

Soluție dată de *Cezar Corici*, elev București. Notînd cu x depărtarea dintre cele două localități, $\frac{x}{45}$ reprezintă timpul la ducere, iar $\frac{\frac{60x}{100}}{45} + \frac{\frac{40x}{100}}{40}$ reprezintă timpul în care autobuzul a parcurs distanța la înapoiere; 40 minute $= \frac{2}{3}$ intr-o oră. Formăm ecuația

$$\frac{x}{45} + \frac{2}{3} = \frac{\frac{60x}{100}}{45} + \frac{\frac{40x}{100}}{40};$$

sau $40x + 1200 = 24x + 18x$, de unde $x = 600$ km.

Problema 7286

Să se arate că dacă a, b și c sînt diferiți, avem

$$\frac{a^4}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^4}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^4}{(c-a)(c-b)} = a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca$$

Soluție dată de *Felicia Gheorghe*, elevă Craiova. Expresia dată, devine:

$$E = \frac{a^4}{(a-b)(a-c)} = \frac{b^4}{(a-b)(b-c)} + \frac{c^4}{(a-c)(b-c)} =$$

$$= \frac{a^4(b-c) - b^4(a-c) + c^4(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)}.$$

Notăm numărătorul cu N și avem :

$$N = c^4(a-b) + a^4b - a^4c - ab^4 + b^4c = c^4(a-b) +$$

$$+ ab(a^3 - b^3) - c(a^4 - b^4) = c^4(a-b) + ab(a-b)(a^2 + ab +$$

$$+ b^2) - c(a^2 + b^2)(a+b)(a-b) = (a-b)(c^4 + a^3b + a^2b^2 +$$

$$+ ab^3 - a^3c - a^2bc - ab^2c - b^3c).$$

$$\frac{N}{a-b} = -c(b^3 - c^3) + a^3(b-c) + a^2b(b-c) + ab^2(b-c);$$

$$\frac{N}{(a-b)(b-c)} = -c(b^2 + bc + c^2) + a^3 + a^2b + ab^2 =$$

$$= -b^2c - bc^2 - c^3 + a^3 + a^2b + ab^2 = b^2(a-c) + b(a^2 - c^2) +$$

$$+ (a-c)(a^2 + ac + c^2) = (a-c)(a^2 + b^2 + ab + bc + ca);$$

$$\frac{N}{(a-b)(b-c)(a-c)} = E = a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca.$$

Problema 7287

Să se arate că dacă x, y și z sînt diferite între ele,

$$\frac{ax^2 + bx + c}{(x-y)(x-z)} + \frac{ay^2 + by + c}{(y-z)(y-x)} + \frac{az^2 + bz + c}{(z-x)(z-y)} = a$$

Soluție dată de *Georgeta Ioniță*, elevă București. Aducem fracțiile la același numitor, adunăm și obținem

$$\frac{(ax^2 + bx + c)(y-z) + (ay^2 + by + c)(z-x) + (az^2 + bz + c)(x-y)}{(x-y)(x-z)(y-z)}.$$

Făcînd înmulțirile la numărător și scoțînd în factor a, b, c obținem :

$$a[x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)] + b[x(y-z) + y(z-x)$$

$$+ z(x-y)] + c[(y-z) + (z-x) + (x-y)] =$$

$$= a[x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)],$$

deoarece coeficienții lui b și c sînt nuli.

Fracția se simplifică cu $(x-y)(x-z)(y-z)$ deoarece

$$x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) = (x-y)(x-z)(y-z)$$

și identitatea este demonstrată.

CHESTIUNI DE EXAMEN

Problemele date la admitere în Institutul politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" din București, în septembrie 1966

7820. Se dau polinoamele : $P(x) = x^2 - mx + m + 7$ și $Q(x) = x^3 + 4x^2 + nx - 6$. Se cere :

a) Să se determine valorile parametrului m astfel încît între rădăcinile x_1, x_2 ale ecuației $P(x) = 0$ să avem inegalitatea

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} \leqslant x_1 + x_2.$$

b) Să se determine m și n astfel ca $x = -3$ să fie o rădăcină comună a ecuațiilor $P(x) = 0$, $Q(x) = 0$.

c) Să se simplifice fracția

$$\frac{Q(x)}{P(x)}.$$

d) Dacă $f(x)$ este fracția simplificată obținută la punctul c) să se arate că ecuația $f(x) + \alpha = 0$ nu are rădăcină dublă oricare ar fi parametrul real α.

La facultățile mecanice, electrice, transporturi

7821. Să dă expresia

$$E = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x.$$

a) Să se facă expresia E calculabilă prin logaritmi.

b) Să se calculeze valoarea numerică a expresiei E pentru $\operatorname{tg} x = \frac{3}{5}$ (x în cadranul I).

c) Să se calculeze valoarea numerică a expresiei E pentru $x = \frac{\pi}{12}$.

La facultățile mecanice, electrice, transporturi

7822. Se dă funcția

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 3}.$$

a) Să se calculeze prima derivată $f'(x)$.

b) Să se rezolve ecuația algebrică

$$11 f(x) - 5 f'(x) + \frac{8}{\sqrt{x^2 - 1}} = 0$$

c) Să se studieze variația funcției $f(x)$ și să se reprezinte grafic.

La facultățile mecanice, electrice, transporturi

7823. Se dă fracția

$$F(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 3x + 9}{x^3 - 3x^2 - 8x + 24}.$$

a) Să se simplifice fracția dată.

b) Se notează cu $F_1(x)$ fracția simplificată de la punctul a); să se rezolve ecuația $F_1(x) = 2x$.

c) Să se determine valorile parametrului m așa încît ecuația

$$F_1(x) + m^2 \cdot \frac{x^2 - 8}{x^2 - 3} = 2m$$

să aibă toate rădăcinile reale.

La facultatea de metalurgice și chimie industrială

7824. Se dă sistemul de ecuații :

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = \frac{35}{3}\ ; \quad x + y = 10.$$

a) Să se rezolve sistemul dat.

b) Să se scrie al n-lea termen al progresiei aritmetice crescătoare în care primii doi termeni sînt valorile lui x și y care verifică sistemul dat.

c) Să se arate că în această progresie suma patratelor a doi termeni consecutivi oarecare este divizibilă cu 4.

La facultatea de metalurgie și chimie industrială

7825. Să dă expresia

$$E = \frac{\cos 2x + \sin 6x}{\sin 2x + \cos 6x}.$$

Se cere :

a) Să se scrie expresia dată sub formă calculabilă prin logaritmi.

b) Să se calculeze valoarea numerică a lui E cînd $\sin 2x = -\frac{4}{5}$ iar $2x$ este cuprins între π și $\frac{3\pi}{2}$.

c) Să se calculeze valoarea numerică a lui E pentru $x = \frac{5\pi}{24}$.

La facultatea de metalurgie

7826. Se dă funcția $y = \sqrt{\frac{x}{1 + x^2}}$.

a) Să se calculeze prima și a doua derivată.

b) Să se calculeze abscisa punctului de inflexiune.

c) Să se studieze variația funcției date și să se reprezinte grafic.

La facultatea de Chimie Industrială

PROBLEME PROPUSE *)

7827. Se dă fracţia algebrică :

$$F(x, y) = \frac{x^5 - x^4y + 2x^3y^2 - 2x^2y^3 + xy^4 - y^5}{4(x^3y^2 - x^2y^3)}.$$

a) Să se simplifice fracţia $F(x, y)$

b) Să se scrie diferenţa $F(x, y) - 1$ sub forma unei puteri cu exponentul 2.

c) Să se calculeze valoarea numerică a expresiei $\sqrt{F(x, y) - 1}$ pentru $x = 0{,}1$ şi $y = 0{,}01$.

Concursul de matematică 1966, cl. VIII Bucureşti, *Gh. Stoiţescu*

7828. În planul P, se dă un triunghi ABC, dreptunghic în A, avînd unghiul C egal cu 30° şi ipotenuza egală cu a cm.

Se construieşte cercul de centru O_1 tangent în B ipotenuzei BC şi trecînd prin A ; de asemenea se construieşte cercul de centru O_2, tangent în C ipotenuzei BC şi care trece tot prin A.

a) Să se afle aria laterală şi volumul cilindrului circular drept, avînd ca bază cercul cu centrul în O_1, iar înălţimea egală cu lungimea segmentului O_1O_2 (generatoarele fiind perpendiculare pe planul P).

b) Să se afle aria laterală şi volumul prismei drepte care are ca bază hexagonul regulat înscris în cercul cu centrul O_2, iar înălţimea egală cu $\frac{a}{2}$ (muchiile laterale fiind perpendiculare pe planul P).

c) Să se afle raportul celor două volume şi să se arate că valoarea lui nu depinde de a.

Concursul de matematică, 1966, clasa VII, Bucureşti *V. Tomuleanu.*

7829. Să se descompună în factori expresia :

$$E = c^2(a + b) + c(b - a)^2 + b^2(a - b) + a^2b - (a^3 + c^3).$$

A. P. Petrescu, Craiova

7830. Fie AD bisectoarea unghiului A într-un triunghi ABC. Din punctul D se duce cîte o paralelă la laturile AB, respectiv AC, care intersectează pe AC în E iar pe AB în F. Dreapta EF taie pe AD în M. Să se arate că :

a. Triunghiul DEF este isoscel,

b. Dreptele AD şi EF sînt perpendiculare,

c. $MB + MC > AB + AC - AD$.

T. Weszely, Tg. Mureş

---

*) IX (7827–7836) ; X (7837–7847) ; XI (7848 – 7855) : S (7856 – 7859). Soluţiile se primesc pînă la 15 februarie 1967. Fiecare elev poate trimite rezolvări şi la problemele din clasa precedentă celei pe care o urmează. Problemele de clasa IX sînt indicate şi pentru liceele de specialitate sau pedagogice.

7831. Să se efectueze

$$1 + (-3) + 6 + (-4) + 5 - 5(-2)(1+2),$$

punînd în evidență și enunțînd toate proprietățile care fac ca mulțimea numerelor întregi să formeze inel.

Ilie Stănescu, Sibiu

7832. Dacă a și b sînt două numere întregi și pozitive, se consideră segmentele care au lungimile de a, $a + b$, $a + 3b$ centimetri.

a) Să se găsească condiția ca aceste segmente să fie laturile unui triunghi.

b) Să se afle apoi mulțimea triunghiurilor care au perimetrul de 100 cm.

I. Teodorescu, Galați

7833. Să se simplifice fracția:

$$F(x, y, z) = \frac{x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2}{x^4 - y^4 + z^4 + 4xy^2z - 2x^2z^2}$$

și apoi să se afle domeniul ei de definiție.

M. Oprea, Ploiești

7834. Se dă paralelogramul $ABCD$. Mediatoarea laturii AB taie latura CD sau prelungirea ei în M și mediatoarea laturii CD taie pe AB în N. Cu mediatoarele celorlalte laturi, găsim pnnctele P și R așezate respectiv pe BC și AD, sau pe prelungirile lor.

a) Să se arate că patrulaterul $MPNR$ este tot un paralelogram concentric cu cel dat.

b) Să se studieze cazurile particulare cînd $ABCD$ este: dreptunghi, patrat, romb cu un unghi de 60°.

Corneliu Georgescu, Craiova

7835. Se dă expresia:

$$E(x, y) = \frac{x^5y^2 - \frac{y^2}{x} + 3x(x^2y^4 - 1) + 3y(x^4y^2 - 1) + x^2y^5 - \frac{x^2}{y}}{x^4y^3 - y + x^3y^4 - x}$$

a) Să se aducă expresia dată E la forma unei fracții ireductibile

$$\frac{P(x,y)}{Q(x, y)}.$$

b) În ce caz valoarea fracției nu depinde de x și y?

c) Să se arate că $P(x, y) - 4Q(x, y) \geqslant 0$.

Gh. Molelică, Botoșani

7836. Fie ABC un triunghi obtuzunghic și înălțimile respective AA_1, BB_1, CC_1. Dreptele AA_1, BB_1, CC_1 mai taie cercul circumscris triunghiului ABC respectiv în A_2, B_2, C_2. Să se exprime unghiurile triunghiurilor $A_1B_1C_1$ și $A_2B_2C_2$ în funcție de unghiurile triunghiului dat ABC.

C. Ionescu-Țiu

7837. Se dau numerele reale m, n, $\frac{2m+n}{3}$, $\frac{m+2n}{3}$, $\frac{m+n}{2}$ și expresiile :

$$E_1(x, m, n) = x^2 - (x - m - n)^2,$$

$$E_2(x, m, n) = 8x^2 - 2(m + n)x - m^2 - n^2 - 2mn,$$

$$E_3(x, m, n) = 8x^2 - 2m^2 - 2n^2 - 4mn,$$

$$E_4(x, m, n) = 8x^2 - 4(m + n)x.$$

a) Știind că $n > m > 0$ să se găsească relațiile de ordine între cele 5 numere date.

b) Să se descompună în factori ireductibili polinoamele date și să se găsească relațiile care leagă polinoamele E_3 și E_4 cu polinoamele E_1 și E_2.

c) Să se găsească ce funcție se va obține după ce se simplifică fracția : $\frac{E_1 \cdot E_2}{E_3^2 - E_4^2}$, unde E, E_2, E_3 și E_4 sînt cele 4 polinoame date.

N. Peligrad, profesor Pitești

7838. Să se aducă la o formă mai simplă :

$$E(x) = 8\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{\sin 2x} - \frac{1}{\cos 2x}$$

$$F(x) = \sin^2\left(\frac{\pi}{12} + 2x\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{12} - 2x\right)$$

b) Pentru ce valori ale lui x produsul $E(x)F(x)$ este pozitiv. Se vor determina numai valorile din cadranul I ale lui x.

V. Băghină, Breaza

7839. Se dă expresia :

$$E_n = \frac{\sin 4ax + 2\cos 2ax}{2(\cos ax - \sin ax)}$$

unde $a = 2^{n-2}$, iar n este un număr natural.

a) Să se demonstreze identitatea :

$$\left(\sin\frac{3x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^3 = E_1 \times E_2.$$

b) Să se determine n în cazul cînd $E_n = -1$ pentru $x = \frac{\pi}{4}$.

Gh. Bazacov, Tr. Severin

7840. Să se arate că polinomul

$$P_k(x) = x^{6k-2} + x^{3k-1} + 1$$

se divide cu $x^2 + x + 1$, k fiind un număr natural.

Cezar Ivănescu, Tîrgoviște

7841. Folosind tabele matematice să se verifice egalitatea

$$\sqrt[10]{(4+3i)^{49}} + \sqrt[10]{5^{49}} = 0.$$

C. Ionescu-Țiu

7842. Fie identitatea:

$$\frac{kx-(k-1)}{(k-1)\cdot k\cdot x^k} = \frac{1}{(k-1)x^{k-1}} - \frac{1}{kx^k}.$$

unde k este un număr natural mai mare decît unu și $x \neq 0$.

a) Să se calculeze suma:

$$\frac{2x-1}{1\cdot 2x^2} + \frac{3x-2}{2\cdot 3\cdot x^3} + \frac{4x-3}{3\cdot 4x^4} + \cdots + \frac{nx-(n-1)}{(n-1)nx^n} = S_n$$

b) Să se demonstreze formula găsită prin inducția matematică.

D. Stan, Breaza

7843. Se consideră produsul de k factori:

$$a_k = \left(\frac{3}{1} - 1\right)\left(\frac{7}{2} - 2\right)\left(\frac{13}{3} - 3\right)\cdots\left(\frac{k^3+k+1}{k} - k\right).$$

a) Să se determine a_k și să se demonstreze că:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!a_k} < \frac{3n-2}{n}$$

b) Să se arate că expresia

$$E_{(k)} = \sum_{1}^{k}\left(\frac{h\cdot a_h}{2} + h\right) - 2C_{k+1}^{k-1}$$

este un număr întreg.

c) Să se determine valorile lui k pentru care:

$$E_{(k)} \geqslant \sum_{1}^{k} a_h$$

N. Bebea, Tîrgoviște

7844. Se dă :

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n}$$

a) Să se demonstreze direct că

$$1 - \frac{1}{2^n} \leqslant S_n < 3$$

b) Să se demonstreze prin inducție completă că $1 - \frac{1}{2^n} \leqslant S_n$, specificîndu-se cînd are loc egalitatea.

Fănică Murăreci, Pucioasa

7845. Să se elimine x între următoarele două relații :

$$a = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x \tag{1}$$

$$b \sin x \cos x = \cos x - \sin x \tag{2}$$

Emil Isac, Tg. Jiu

7846. Se consideră expresia

$$E(z) = z^{4n} - iz^{3n} + z^n - i$$

unde z este un număr complex, i unitatea imaginară.

a) Să se determine toate numerele complexe de forma $z = a + ib$ care satisfac egalitatea $E(z) = 0$, în cazul $n = 2$.

b) Să se determine toate numerele complexe de formă trigonometrică care satisfac condiția $E(z) = 0$ pentru n număr natural oarecare.

c) Să se reprezinte grafic numerele găsite în planul complex.

M. Boer, Cluj

7847. Să se arate că în orice triunghi ABC :

$$\sqrt{a} \cos\frac{A}{2} + \sqrt{b} \cos\frac{B}{2} + \sqrt{c} \cos\frac{C}{2} \geqslant \frac{3\sqrt{abc}}{2R}.$$

C. Ionescu-Țiu

7848. Se dau două axe ortogonale Ox, Oy și un punct $M(a, b)$ $(a > 0, b > 0)$, A fiind proiecția lui M pe axa Ox, B proiecția pe Oy.

a) Să se scrie ecuația dreptei paralele cu AB și care formează cu părțile pozitive ale axelor de coordonate un triunghi avînd aria de patru ori cît aria triunghiului MAB, apoi să se explice geometric că această dreaptă trece prin punctul M.

b) Să se arate că dacă punctul M se mișcă astfel încît perimetrul dreptunghiului $OAMB$ să rămînă constant, egal cu $2p$, perpendiculara

dusă prin M pe AB trece printr-un punct fix I. Să se determine coordonatele acestui punct.

c) Prin punctul M se duc două drepte perpendiculare variabile, dintre care una întîlnește axa Ox în P și cealaltă pe Oy în Q. Să se găsească locul geometric al proiecției lui M pe dreapta PQ.

Ion Goja, asistent Petroșeni

7849. Să se calculeze limita următoare:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln \sec^2 \sqrt{x}}{2x}$$

Alex. Păunescu, Tr. Severin

7850. Pe axele Ox și Oy ale unui sistem de referință dreptunghiular, se iau punctele fixe $A(a, 0)$ și $B(0, b)$ și respectiv punctele variabile M și N astfel ca $BN = k \cdot AM$ (k constant).

a. În cazul $k \neq -\frac{b}{a}$, să se arate că segmentul MN este împărțit de dreapta AB într-un raport constant.

b. Se dă $k = -\frac{a}{b}$ și se notează cu P punctul de intersecție al dreptelor MN și AB. Să se arate că perpendiculara în P pe AB trece printr-un punct fix. Fie C acel punct.

c. Să se găsească locul geometric al punctului de intersecție a dreptelor AN și BM și să se arate că acest loc trece prin C. În cazul particular $k=1$; $a=2$; $b=3$, se cere lungimea locului pentru $-1 \leqslant x_M \leqslant 0$ (x_M este abscisa punctului M).

I. Loziciu, Timișoara

7851. Să se calculeze limita șirului $\{a_n\}$ cu

$$a_n = \frac{1 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 9 \cdot 6 + \cdots + n^2(n+3)}{(1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2}$$

E. Begazgian, Constanța

7852. Pe semiaxele Ox și Oy ale axelor rectangulare se iau respectiv A și B, două puncte variabile astfel ca: $OA + OB = k$ (const.) Se cere:

a) Să se afle locul geometric al intersecției perpendicularei ridicate în A pe Ox cu dreapta BM, unde M este mijlocul lui OA. Discuție.

b) Să se arate că mediatoarea segmentului AB trece printr-un punct fix P situat pe prima bisectoare a axelor.

c) C și D fiind punctele de intersecție ale locului geometric de mai sus cu axele de coordonate, iar N intersecția mediatoarei segmentului AB cu axa Ox, să se determine poziția punctului A astfel ca patrulaterul $PNDC$ să fie inscriptibil.

S. Cărăguț, Lupeni

7853. Să se găsească relaţia între λ şi μ astfel încît funcţia

$$\left[\frac{\cos\alpha m + \lambda\sin\alpha m}{\cos\beta m + \mu\sin\beta m}\right]^{\frac{x}{m}}$$

să aibă limita e^x cînd $m \to 0$ (x este un număr real diferit de zero, iar α şi β unghiuri constante).

R. Vornişescu, Petroşeni

7854. În raport cu un sistem de axe perpendiculare se consideră punctul fix A situat pe axa Oy, prin A se duc două drepte perpendiculare care taie axa Ox în B şi C. Două drepte variabile ce trec prin originea axelor şi sînt simetrice faţă de axa Oy întîlnesc segmentele AB şi AC respectiv în punctele P şi Q.

a. Să se arate că dreapta PQ trece printr-un punct fix.

b. Să se arate că

$$\frac{2}{OR} = \frac{1}{OB} + \frac{1}{OC}$$

unde R este punctul fix al dreptei PQ.

c. Paralela la Ox dusă prin P întîlneşte segmentul AC în P_1. Să se găsească locul geometric al centrului dreptunghiului PP_1S_1S înscris în triunghiul ABC. (S şi S_1 se află pe BC).

Maria Sîrbu, Sibiu

7855. Se dau şirurile

$$U_n = a^{\frac{\alpha n+1}{n}} - a^{\alpha}; V_n = b^{\frac{2\alpha n+1}{n}} - b^{2\alpha},$$

în care $a > b \geqslant 1$ iar $\alpha \in R$.

a) Să se arate că şirurile U_n şi V_n sînt monotone şi convergente.

b) Se formează şirul

$$Z_n = \frac{b^2 \cdot U_n}{a^{\alpha} \cdot V_n}.$$

Să se arate că şirul Z_n este monoton şi convergent.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} Z_n$.

Vasile Neacşu, Constanţa

7856. Să se discute natura rădăcinilor ecuaţiei

$$(m-1)x^2 - (m+2)x - m\lambda - 1 = 0,$$

m şi λ fiind parametri reali (metodă grafică).

N. Ducaru, Cluj

7857. Se consideră în plan punctele $A(0, 4)$, $B_i(1, i)$ $(0 \leqslant i \leqslant 9)$, $C_j(2, j)$ $(3 \leqslant j \leqslant 6)$, $D_k(3, k)$ $(0 \leqslant k \leqslant 9)$, $E_1(4, 4)$ şi $E_2(4, 5)$, de coordonate întregi, precum şi segmentele AB_0, AB_2, AB_5, AB_7, AB_9, B_iB_{i+1}

$(0 \leqslant i \leqslant 8)$, $B_j C_j (3 \leqslant j \leqslant 6)$, $C_k C_{k+1} (3 \leqslant k \leqslant 5)$, $C_t D_l (3 \leqslant l \leqslant 6)$, $D_m D_{m+1} (0 \leqslant m \leqslant 8)$, $D_0 E_4$, $D_4 E_4$, $D_5 E_5$, $D_9 E_5$ și $E_1 E_5$.

Se poate trasa continuu o linie curbă neinchisă care să traverseze cîte o singură dată fiecare dintre segmentele considerate, dar să nu treacă prin niciunul din punctele date?

Aceeași întrebare pusă după ce se șterge unul dintre segmentele date.

C. Chelniceanu și *T. Zamfirescu*

7858. Fie un tetraedru $ABCD$ și I centrul sferei înscrise în tetraedru. Dreptele AI, BI, CI, DI mai întîlnesc sfera circumscrisă tetraedrului respectiv în A_1, B_1, C_1, D_1.

Să se demonstreze că aria și volumul tetraedrului $A_1B_1C_1D_1$ sînt mai mari respectiv decît aria și volumul tetraedrului $ABCD$.

C. Ionescu-Țiu

7859. Fie $M_1M_2M_3M_3$ un patrulater în spațiu și M_1', M_2', M_3', M_4' mijloacele laturilor M_1M_2, M_2M_3, M_3M_4, M_4M_1; mijloacele segmentelor $M_1'M_3'$ și $M_2'M_4'$ se află în același punct numit pseudocentrul patrulaterului $M_1M_2M_3M_4$.

Considerăm punctele $M_1, M_2, \ldots, M_8$ în spațiu. Cu aceste puncte se formează $C_8^4 = 70$ perechi de patrulatere care nu au nici un vîrf comun. Să ce arate că dreptele care unesc pseudocentrele oricărei perechi de patrulatere din cele 70 arătate mai sus, sînt concurente. (În legătură cu articolul de la pag. 481).

O. Sacter

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE PENTRU CLASELE V—VIII *)

E : 2596. Să se determine cifra a astfel ca numărul $\overline{3a101}$ să fie divizibil prin 47.

Ilie Diaconu, elev Tg. Jiu

E : 2597. Din documentele celui de-al IX-lea Congres al P.C.R. reiese că în 1965 au lucrat în agricultura țării noastre 186 000 de tractoare, semănători și combine.

Știind că numărul semănătorilor reprezintă 55% din numărul tractoarelor și combinelor luate la un loc și că au lucrat cu 44.000 mai multe tractoare decît combine, să se afle cîte tractoare, semănători și combine au lucrat în agricultura socialistă în 1965.

Dan I. Stănescu, elev Ploiești

E : 2598. Un magazin universal a vîndut într-o lună 104 metri de stofă de diferite calități, de 110 lei, de 150 lei și de 232 lei metrul, încasînd în total 14 674 lei.

*) V (E : 2596—2599); VI (2600—2604); VII (2605—2608); VIII (2609—2612). Soluțiile se primesc pînă la 15 februarie 1967.

Știind că s-au vîndut cu 12 m mai puțin din stofa de 232 lei metrul decît din cea de 150 lei, iar din cea de 110 lei metrul de două ori mai multă decît din cea de 150 lei, să se afle cît s-a încasat pe fiecare categorie de stofă ce s-a vîndut.

Nelu I. Dobre, Merei

E : 2599. În două luni un muncitor a efectuat 42% din planul de producție trimestrial ce i se repartizase. Știind că în prima lună el face cu 84 piese mai mult ca în luna a doua, iar în luna a doua face $\frac{5}{7}$ din piesele pe care le-a făcut în prima lună, să se afle cîte piese avea planificate să facă în acest trimestru.

Nelu I. Dobre, Merei

E : 2600. Să se arate că

$$(501_7 - 141_5) \cdot 1010_3 + (562_8 - 154_6) \cdot 1010_2 : 9000_{10} = 1$$

unde indicii indică bazele de numerație în care sînt scrise numerele respective.

M. P. Stoica. Tr. Măgurele

E : 2601. Două comune vecine trebuie să construiască un pod care costă 52000 lei, fiecare comună urmînd să contribuie cu o sumă direct proporțională cu numărul locuitorilor.

Să se afle contribuția fiecărei comune, știind că ambele comune au în total 2600 locuitori, iar dacă o comună ar avea cu 25 locuitori mai mult, raportul dintre numărul locuitorilor ar fi egal cu $\frac{3}{4}$.

Gh. V. Nistor, Buzău

E : 2602. Uzinele Electroputere din Craiova au produs în ultimii 2 ani ai șesenalului 195 locomotive Diesel electrice (de 2100 C.P.). Diferența dintre numărul locomotivelor fabricate în 1965 față de anul precedent este un patrat perfect exprimat printr-un număr de două cifre. Acest patrat este mai mic decît numerele întregi ce reprezintă producțiile anilor respectivi și neprim cu ele. Se cere numărul locomotivelor construite în 1965.

Marica Ștefan, Tr. Severin

E : 2603. O cooperativă agricolă de producție a rezervat pentru culturi experimentale o întindere de teren arabil de 1,2 ori mai mare decît a doua cooperativă agricolă. Dacă fiecare însămînțează cu grîu cîte 500 ha, iar restul cu porumb, partea însămînțată cu porumb de la prima cooperativă este de 2,2 ori mai mare decît cea însămînțată cu porumb de la a doua cooperativă. Să se afle cîte hectare de teren a rezervat pentru culturi experimentale fiecare dintre cele două cooperative?

D. Mîrzan, R. Vîlcea

E : 2604. Într-o familie soțul și soția sînt salariați. Suma salariilor primite de cei 2 este de 1500 lei, iar diferența patratelor acestor salarii este de 360000. Să se afle salariul fiecăruia.

E : 2605. La o școală generală, din totalul cadrelor didactice $16\frac{2}{3}$ % sînt bărbați, iar restul femei, care sînt cu 45 mai multe decît bărbați.

Să se afle numărul de cadre didactice bărbați de la acea școală.

B. Baeră, Păunești

E : 2606. Recolta de porumb obținută de o G.A.S. a fost în anul 1964 media aritmetică a numerelor 565 și 1115, exprimată în tone. Recolta anului 1965 a fost media geometrică a numerelor 576 și 10000, exprimată tot în tone. Pentru transportul recoltei din anul 1964 s-au folosit 20 de camioane și s-a transportat întreaga cantitate în 7 zile. În cît timp s-a transportat recolta anului 1965, dacă s-a folosit un număr dublu de camioane?

La concursul de matematică, clasa VI, Craiova 1966

E : 2607. Într-un trapez $ABCD$ raportul dintre baza mică și baza mare este de $\frac{3}{5}$, iar înălțimea este de 6 cm. Laturile neparalele prelungite se întîlnesc în punctul F. Să se afle distanța de la aceste puncte la fiecare bază.

La concursul de matematică, clasa a VII-a, Craiova 1966

E : 2608. La o cooperativă agricolă de producție, 3 brigăzi de tractoare ară un teren astfel : prima ară $\frac{2}{5}$ din el, a doua $\frac{5}{9}$ din rest, iar a treia 60 ha plus $\frac{1}{5}$ din cît a arat a doua. Tractoriștii celor 3 brigăzi fac o economie de 450 l de combustibil. Să se afle cantitățile de combustibil economiste de fiecare brigadă, știind că ele sînt porporționale cu numărul de hectare arate.

E : 2609. Pe ipotenuza BC a unui triunghi dreptunghic ABC se ia punctul M. Fie N simetricul lui M față de AB și P simetricul aceluiași punct față de AC.

a) Să se arate că unghiurile BAN și CAP sînt complementare.

b) Dreptele MP și NB se intersectează în punctul D. Să se arate că triunghiul MBD este isoscel.

Marica Ștefan, Tr. Severin

E : 2610. Să dă un cerc de rază R. Se dau două diametre perpendiculare AB și CD. Fie E mijlocul lui OA. Dreptele CE și DE taie cercul în H și F. Dreapta HE taie pe AB în G. Să se arate că $GE = \frac{3R}{10}$.

Elena Vasiliu, prof. București

E : 2611. Un avion decolează de pe un aeroport A, zburînd după următorul itinerariu : 200 km spre nord, apoi 200 km spre est, continuă cu încă 200 km spre sud și își încheie zborul cu 200 km spre vest, aterizînd în punctul B. Care este poziția punctului B față de A ? Discuție.

E : 2612. Se dau expresiile :

$$E_1 = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 + \frac{2}{x-1}$$

$$E_2 = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 - \frac{2}{x+1}$$

Făcînd produsul acestora, găsim același rezultat cu cel pe care-l obținem dacă suprimăm de la început fracțiile. Explicați de ce. Generalizare.

CĂRȚI NOI

N. Mihăileanu. *Elemente de geometrie proiectivă*, Editura tehnică, 1966.

Lucrarea cuprinde la un nivel mediu probleme de bază ale geometriei proiective ca : raport anarmonic, omografie, involuție, grup de transformări, proprietăți proiective ale conicelor, cuadricelor, studiul proiectiv al ecuației de gradul al treilea și al patrulea, construcție axiomatică, construcție algebrică, etc.

Expunerea sintetică necesită doar cunoștințe de clasa a X-a a școlii medii ; de aceea ea poate fi folosită cu succes de către elevii secției reale a liceelor.

Cuprinsul : I. Elemente pregătitoare ; II. Studiu sintetic ; III. Studiu analitic ; IV. Extinderi cu caracter proiectiv ; V. Chestiuni anexe.

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

Soluții primite pînă la 15 iunie 1966 (urmare)

GIURGIU *L. 1.* Mujescu Victor (2460—2, 74, 6—8, 92, 4, 7397, 9, 437, 94—6), Pîrcălăbescu Ștefan (2576, 92, 4, 509, 7441, 75, 7, 8, 94—7, 502, 52), Popescu Ionel (2474, 6—8, 92, 4, 7441, 75—7, 94—7), Popescu Stelian (2492—4, 509, 21, 5, 6, 7477, 94—6, 527, 708), cl. X Anghelescu Manuel (7529, 34—8, 34—8, 53, 4, 6, 60, 64, 5, 7) *Mărăcineanu Eugen* (7364, 72, 8, 85, 92, 3, 8, 402, 23, 4, 6, 38, 9, 44, 8—52, 4, 77, 9, 80, 4—7, 99—502, 5, 9—11, 4), Soavă Iuliana (7423—5, 30, 77, 90, 4—7, 9, 500), Absolvent Liţoaia Petrişor (7423—5, 33, 7, 8, 41, 77, 90, 4—6, 9, 505, 20), *L. 2* cl. IX Capră Maria (7437, 8, 41, 2, 4, 75—8, 502, 54, 74, 6, 94), Isar Aurelian (2474—8, 92—4, 7437, 92, 3, 75—8, 91, 4, 5, 608, 10, 23), Răsuceanu Rodica (7437, 8, 40, 2, 4, 75—7, 52, 4, 8, 94—6, 509), Tena Marcel (7385, 426, 30, 78, 90, 2, 7, 8, 504, 27, 52—4, 6, 52, 504, 609, 17, 18, 21), cl. X Paraschiv Ion (7372—5, 423—6, 32, 7, 8, 41, 2, 4, 50, 2), Păturcă M. Georgeta (7373—5, 7, 9, 82,

7, 92, 3, 5, 423—6, 30, 2, 7, 6—8, 80, 2, 90, 4—7, 99, 5007, 27, 8), c. XI Voicu Paul (7423, 37, 847, 9, 77, 8, 85, 7, 16, 505, 94, 20).

GOGOŞU (Oltenia). *S. g.* cl. VI Mihai Dan (2480—4, 95, 7, 8, 500, 12, 3).

GOHOR (Galaţi) *S. g. 1* cl. VIII Chirvăsuţă Emilia (2453—6, 60, 2, 4, 7, 71, 2, 7, 82—5, 9, 90, 2, 4), Toderaşcu Polixania (2462, 7, 71, 2, 83—5, 9, 90, 2, 4).

GOVORA (Argeş). *S. g.* cl. VII Ghelmuş Gheorghe (2471—3, 87—91)

GRECI (Oltenia) *S. g.* cl. VIII Ivan Ion (2513, 5, 6, 8, 9, 22, 8, 31).

HALEŞ (Buzău). *S. g. 1* cl. VI Dogaru Snghel (2468, 80, 1, 3, 4, 9, 95, 8), cl. VII Măiara Toma (2450, 3—5, 65, 7, 71, 83), cl. VIII Dogaru Vasilica (2480, 3, 4, 8—90, 5, 8, 503).

HAŢEG (Hunedoara). *L.* cl. X *Maftei Nicolae* (7275—84, 90—2, 4—7, 9, 500, 27, 9, 34—8, 52, 4, 5, 8, 60, 4, 608—10, 2, 4, 7, 9, 21, 3, 4), cl. XI *Marton Virgil* (7371—91, 4—6, 402—4, 6, 9, 10—3, 5, 8, 22—30).

HÎRLĂU (Iaşi) *L.* cl. XIV Iohan Burăh (2464—8, 79, 81, 3, 4, 9), cl. X *Solomon Ady* (7423, 6, 8, 30, 2, 7, 41, 2, 4, 7—50, 2, 4, 63, 4, 70, 5, 7, 80, 2, 3, 91, 3—7, 500—5, 11, 4, 6).

HÎRŞOVA. *L.* cl. X Climent Florea (7475, 6, 8—80, 3, 90, 1, 4—9, 507, 11, 4, 25, 7).

HOREZU (Argeş), cl. X Costescu Ştefan (7476—81, 93—7, 9, 505, 36, 7), Tertiei Ion (7475—80, 4, 90, 1, 3—502, 4, 5, 8, 11, 4), cl. XI *Buşe Marcel* (7475—83, 5, 7—91, 3—500, 2, 4, 9—11, 4—6, 29, 34—9, 52—4, 6, 60—2, 5, 7, 70, 83—7, 91, 4, 608—10, 2, 4—24), Cojocaru Constantin (7477, 9, 80, 2, 90, 4—7, 9, 501, 4, 14, 5, 27), HOMOROG (Crişana) *S. g.* cl. VI Tripa Ioan (2450, 2—5, 64—79), cl. VIII Matei Gheorghe (2450, 2—6, 62, 5, 6, 71, 2).

HUNEDOARA. *S. g.* cl. VII Zamfirescu Constantin (2464, 5, 7, 8, 71, 2, 6, 90, 2), cl. VIII Marinescu Doina (2455, 62, 71, 2, 83, 4, 5, 890), Negru Angela (2481, 3—5, 8—90, 4), Pitea Mihai (2460, 5, 7, 71, 2, 4, 7, 83, 5, 90, 5), *L. 1* cl. VII Raşcă Radu (2480, 1, 3 4, 1, 95, 7, 8, 500, 4, 16—9), cl. VIII Fazakaş Elisabeta (2460, 71, 2, 7, 81, 3, 5, 8, 91, 5, 509), Gherghina Marius (2450, 2—6, 60, 5, 7, 8, 71, 2, 7, 80—5, 8—92), Jula Angela (2482, 6, 91, 4, 503, 4, 6, 8, 9, 12—20), cl. IX Cotoară Romulus (2474—8, 92, 4, 509, 10, 7437, 502, 29), Ionescu Petru (2463, 3, 70, 92—4, 4730, 7, 8, 74—8, 94), Nedelcu Violeta (2479—83, 5, 9, 90, 5, 504, 8, 9, 13—6), cl. X *Ciotescu Ion* (7423—6, 8, 30, 2, 7, 41, 9, 50, 2, 4, 64, 5, 70, 5—23, 90, 4—502, 5, 7, 40, 11, 4, 6, 27, 9, 34—8, 42, 6, 50, 2—6, 9, 60, 3, 57, 7, 80, 7, 502, 10, 2, 4, 7, 20, 4, 30, 69, 40, 2, 4, 59, 60, 2), Loi Maria (7374, 423—5, 30, 7, 41, 7, 9, 80, 2, 90, 4—7, 9, 502, 5). Mogoşan Petru 7372—5, 7, 8, 91, 5, 9, 400, 23—9, 30, 7, 71, 90, 4—7), Pop Radu (7423, 4, 37, 49, 70, 6, 7, 9, 90, 5, 500, 11, 4), cl. XI Căpăţînă Octavian (7423—30, 2, 7, 41, 2, 7, 9, 52, 4, 6, 9, 60, 5, 7, 8, 70, 5—80, 7, 90, 7—9, 501, 2, 5, 10, 1, 4—6, 20), Lambi Robert (7491, 4—7, 9 5, 36, 7, 54, 6, 60), Oprişa Doru (7423—6, 30, 2, 7, 49, 50, 4, 77—80, 2, 90, 4—500, 2, 5, 7, 11, 6, 27, 9, 34—8, 55, 9), Petruţiu Horia (7423—6, 8—30, 2, 50, 2, 4, 76, 7, 9, 80, 1, 7, 90), Retegan Aurel (7427, 8, 32, 7, 41, 50, 2, 4, 6, 71, 5—80, 2, 3, 5), Absolvent *Căpăţînă Octavian* (7529, 32, 4—8, 6, 50, 2—6, 60, 3, 5—7, 70, 2, 80, 1, 3, 7, 91, 3, 4, 9, 601, 1, 8, 10, 2, 4, 6, 7, 21, 3, 4, 6, 40, 2, 3, 6, 50, 2, 6, 7, 60, 2). *Suruceanu Alexandru* (7476—80, 2, 3, 5—91, 3—7, 9, 502, 5, 9, 11, 4, 5, 7, 20, 1, 5, 7, 32, 4—8, 54), Vlad Doinel (7477, 90, 6, 529, 35—7, 55, 62, 608, 10, 21).

HUŞI. *L.* cl. IX Mărica Constantin (2460—3, 74—8, 92—4, 9, 502, 3), cl. X Burcus Gheorghe (7423—6, 8, 37, 44, 7, 50, 2, 4, 70, 6, 8, 9, 80, 90, 4—7, 9, 500, 11).

IAŞI. *S. g. 7* cl. V Roşca Nicuşor (2466, 7, 70, 1, 81, 3, 4, 500), Timofte Eugen (2450, 2, 64—8, 70, 9—81, 3, 500), cl. VI Asofiei Costel (2464, 5, 7, 79—81, 3, 4), Bălan Carmen (2479—85, 7, 500), Bercovici Zina (2465, 7, 79, 81, 3, 4, 9, 95), Calinor George (2465, 8, 70, 9—81, 3, 4, 509), Goldstein Margit (2450, 6, 64—8, 70, 80, 3, 4), Hortvitz Sergiu (2452, 4, 65, 7, 71, 2, 9, 80, 4), Ifleni Călin (2453—6, 64, 5, 70, 9—81, 3, 4), Petrichioaie Eugen (2450, 4, 5, 64, 5, 7, 70, 83, 95, 9), cl. VII Bîzgă Adriana (2479, 80, 3, 4, 9, 95, 7, 8, 508), Gheorghiţă Dănuţ (2464, 5, 7, 70, 9, 80, 4, 95), Melinte Suzana (2453—5, 64, 5, 83, 4, 5, 9), Pandelescu Victor (2468, 70, 9—974, 6, 9, 500), Tănăsachi Dragoş (2464—8, 70, 9—81, 3, 4), Timofte Radu (2482, 97, 9—501, 12, 3, 6, 7, 9, 29), cl. VIII Petrăchioaie Dorin (2445, 6, 50, 2â6, 62, 4—7, 712), *S. g. 12* cl. VI Fulga Doina (2453, 4, 59, 5, 7, 80, 1, 2, 4, 5, 9), Gherasim Mihalea (2453—5, 67, 70, 80, 1, 2, 4, 95, cl. VIII Leonte Alina (2471, 2, 84, 8—92), Nistor Victoria (2471, 2, 84, 18—92), Ruxăndreanu Silvia (2481, 3, 4, 508, 1, 2, 3, 6, 7, 9), *S. g. 10* cl. VIII Chiţanu Doina (2480, 3, 4, 5, 6, 9, 20, 2), *S. g. 12* cl. VII Poroşnicu Gabriela (2456, 7, 61, 2, 4—8, 70—3, 5—8), 74, 9, 80—5, 890—2), *L. 1* cl. VII Rimer Matia (2467, 71, 2, 9, 80—4), cl. VIII Mîrzanea Magda (2483, 4, 7—92, 8, 500, 3, 4, 5, 13, 7, 22), Radu Dănilă (2450, 3—6, 60, 1, 3, 4, 7, 72, 4, 89), cl. IX Simon Iosip (2473, 7, 80—5, 7—92, 4, 5, 502—4, 17, 22, 7477, 80, 94—6, 500, 50, 1, 4), *L. 2* cl. V Fişel Anca (2464—81, 95, 529), cl. VI Davideanu Cătălina

(2450, 2—6, 65, 7, 8), cl. VII Iftimescu Radu (2450, 65, 7, 70, 9, 83, 4, 9, 95, 500), Nemţeanu Elena (2465, 7, 8, 70, 9, 80, 4, 95, 300), cl. VIII Pandenfunda Liviu (2450, 2—4, 64, 5, 7, 9), *L. 3* cl. V Grigoraş Laurenţiu (2450—5, 64—8), Iacob Georgică (2464—6, 8, 80, 97, 8, 501), Miriţă Cătălin (2481, 3—5, 97, 513, 7, 9, 29), cl. VI Balahur Paul (2450—6, 647—72, 4, 5), Lupescu Silvia (2464—9, 79—85, 7, 9, 90), Tiba Dan (2450, 3, 64—8, 71), cl. VII Burlacu Călin (2452, 4, 61, 5—72, 6, 80, 1, 3—5, 8—90), Cepăreanu Dan (2481, 3, 4, 9, 313, 4, 6, 7, 9), cl. VIII Dumitrescu Lucius (2504, 9, 15—7, 9, 20, 2, 4, 31, 3—5, 41, 2), Leibovici Eugen (2480—5, 7—92, 5, 9), Mîrţa Mihai (2495, 7—501, 4, 8, 17, 20), Teodorescu Horia (2484, 9, 95, 7, 8, 500, 1, 6, 8, 9), cl. IX Angelescu Romulus (2492, 4, 508, 9, 24—7, 7554, 618, 9, 23), Linde Radu (2474, 45, 92, 4, 7437, 75—7, 94, 6, 503, 27). Teodorescu Octavian (2474—7, 92, 4, 503, 9, 22, 7437, 94—6, 503, 27, 608), cl. X Achelăriţei Radu (7095, 8, 9, 87, 91, 423, 30, 2, 77, 8, 90, 1, 4—7, 9, 500), *Baban Ştefan* (7364, 72—9, 87, 91, 5, 402, 18, 22—6, 30, 2, 7, 8, 76—80, 2, 90, 4—6, 502, 9, 11, 3), Bejenaru Ion (7423, 5, 76, 7, 9, 80, 90, 4—7, 514, 34, 6—8), Bendescu Mihai (7437, 77, 8, 90, 1, 3—7, 500, 2), *Bordan Fănică* (7364, 72—5, 7, 9, 95, 402, 5, 6, 22—6, 30, 7, 67, 77—9, 83, 90, 4—6, 9, 500, 2, 11, 3, 29, 35—8, 52), Cojocaru Cristofor (7391, 424, 30, 7, 80, 90, 4, 5, 8, 511, 3, 36), Costăchescu Florin (7372, 7—9, 87, 9, 424, 5, 30, 7, 52, 77, 94—7, 9, 505, 11, 34—8, 54), Damaschin Ioan (7372, 3, 5, 7, 87, 91, 424, 30, 80, 90, 4, 9, 511, 299, 36), Deriş Aurel (7372, 3, 5, 7—9, 87, 91, 5, 424, 50, 94, 6, 9, 511, 29, 35—7, 54), Diaconu Ion 7372, 3, 5, 7, 91, 424, 5, 30, 77, 8—80, 2, 94—9), *Donea Dragoş* (7360, 4, 6, 72—9, 85, 7, 8, 91, 5, 7—1, 423—6, 32, 7, 41, 9, 50, 3, 4, 76—9, 84, 90, 4—7, 9—502, 11, 3—5, 25), *Gheorghiescu Mihai* (7364, 72—9, 87, 91, 9, 406, 22—6, 30, 2, 7, 64, 77—80, 3, 90, 1, 4—6, 9, 502, 11, 29, 34, 6—8, 54), *Grindei Iulian* (2423—6, 8, 30, 2, 7, 8, 41, 2, 7, 50, 4, 77, 9, 80, 2, 3, 90—502, 11, 3, 4, 34—8, 52, 4, 5, 60, 4, 610, 4, 21, 3), Huţanu Virgil (7360, 4, 72—5, 7, 91, 9, 424—6, 76, 70—81, 90, 4—7, 505, 11, 29, 34—8), *Iacob Florin* (7360, 4, 6, 71—9, 82, 5, 7, 8, 91, 5, 7—403, 5, 6, 8—10, 3, 7, 8, 22—26, 30, 2, 7, 8, 40—4, 8—547, Ionescu Florentin (7372, 3, 6, 7, 91, 424, 5, 30, 2, 7, 77, 890, 4—7, 505, 11, 29, 36—8), *Irimia Constantin* (7372, 3, 5—7, 9, 87, 91, 5, 424—6, 50, 64, 77—80, 3, 90, 4—500, 2, 11, 3, 34—8, 54, 5), *Jiusacovski Vasile* (7360, 4, 6, 72, 3, 5, 6—9, 85, 7, 91, 9, 4, 23—6, 30, 2, 7, 50, 2, 77, 9, 90, 4—7, 511, 34—8), Leahu Petru (7423, 5, 6, 30, 76, 8—80, 2 4, 91, 4—7, 9, 529, 34—8, 11, 3), Lozanu Tiberiu (7423—5, 37, 77, 9, 80, 90, 4—6, 9, 511, 29, 34—7, 54), Moga Virgil (7372, 3, 5—98, 87, 424—6, 77, 80, 90, 1, 4—7, 511 34, 6—8), Niţu Gh. (7364, 6, 72, 3, 5, 7, 9, 82, 7, 91, 5, 9, 400, 22—5, 30, 50), Oanţă Corneliu (7375, 7—9, 424, 77, 80, 90, 4—6, 9), Pădure Ioan (7366, 7, 91, 423—6, 32, 77, 9, 80, 94—7, 511, 29, 36—8), Păduraru Laurenţiu (7372—4. 7. 9. 87, 91, 424, 32, 49, 600, 63), Pădureanu Gheorghe (7372, 91, 424—6, 450, 2, 94—7, 35—7), Pascal Stelian (7372, 3, 7, 423—6, 32] 7, 94—6, 9), Perşoiu Sorin (7364, 72, 3, 5, 7, 9, 87, 91, 5, 405, 22, 4, 5, 30, 2, 83, 90, 4—6, 502, 11, 3, 35—7), Petraru Constantin (7373, 4, 7, 9, 87, 423, 49, 94—7, 511, 36, 8), Pînzaru Gheorghe (7364, 72, 3, 5, 7, 87, 95, 424, 5, 30, 90, 4, 511, 29, 35—7), Pricop Bogdan (7423—6, 30, 52, 90, 4—6, 529, *Popa Eugen* (7305—5, 8, 20, 23, 5, 31, 6, 9, 45, 7, 9, 35—60, 7, 9, 72—4, 82, 5—8, 401, 4—6, 9, 17, 21, 3, 5, 30, 7, 8, 41, 29, 52, 4, 7, 74), *Profire Stelian* (7373, 5, 7, 9, 87, 91, 2, 5, 423—5, 30, 2, 36, 7), 7, 52, 76—80, 90, 4—7, 423—5, 30, 90, 4, 5, 9, 500, 2, 11, 3, 29, 34—8, 50—6), Pruteanu Neculai (7373, 7, 9, 423, 5, 32, 52, 95, 9, 513, 34, 6—8, 54, 75), *Rusu Gheorghe* (7358, 60, 4, 6, 72, 3, 6—9 85, 7, 91, 2, 97, 423—6, 30, 2, 7, 76—81, 90—7, 9, 500, 2, 11, 34—6, 8), *Surdu Mihai* (7364, 72—9, 91, 5, 418, 24, 5, 30, 2, 7, 40, 51, 76—81, 90, 1, 4—7, 9, 500, 11, 29 34—8), Ştirbulea Constantin (7373, 7, 9, 423, 5, 52, 90, 4, 5, 7, 9, 513, 34—8), Tarcan Ioan (7373, 5, 7, 9, 87, 91, 3424, 5, 30, 7, 95, 6, 9, 511, 29, 34), Ţepeluş Gheorghe (7423, 5, 77, 80, 90, 4—7, 9, 514, 34—8), Tîşca Nicolai (7373, 5, 7, 87, 91, 5, 424, 5, 30, 77, 94—6, 500, 11, 3, 29, 34—8), *Ţîrdea Ioan* (7372, 3, 7—9, 87, 423—6, 30, 2, 7, 42, 52, 76—80, 4, 91, 1, 3—7, 9, 500, 511, 34—8), Văleanu Neculai (7387, 91, 423—6, 30, 2, 77, 80, 90, 4—7, 9, 511, 29, 36—8), Vărzaru Ioan (7372, 3, 5, 7, 9, 87, 91, 424, 5, 30, 2, 90, 5, 6, 9, 500, 11, 29, 34), *Volovatic Ioan* (7357, 60, 4, 6, 72—9, 82, 5, 7, 8, 91, 7, 423—6, 8, 30, 2, 7, 42, 8, 50, 2, 4, 75—81, 90, 1, 4—7, 501, 5, 9, 11, 4, 34—8, 50), *Vrasăzică Mihai* (7375, 8, 9, 85, 423, 32, 7, 52, 90, 4, 5, 7, 38, 54), Zaharia Vasile (7360, 6, 72, 3, 5, 7—9, 85, 91, 2, 423, 4, 6, 30, 737, 9—81, 90—2, 4—9, 34—6). cl. XI Gîlmeanu Vasile (7423—5, 30, 2, 8, 42, 7, 52, 4, 77, 90, 4, 6), Ichim Horia (7477, 9, 90, 4—6, 9, 511, 4, 35—7, 54), *L. 4* cl. VII Popa Dinu (2457, 61, 71—3, 6, 88—92), cl. VIII Russu Dorina (2450, 2, 3, 5, 60, 2, 5—7, 70, 1, 2, 7, 9—85, 8—92), cl. IX Iliescu Brînduşa (7476, 90, 2, 50, 29, 34, 5, 8, 51, 4, 6, 610, 20, 2, 3), *L. 6* cl. VI Vaisman Julian (2450—6, 64, 5, 7, 9—71, 80, 1, 500, 2, 28, 31), cl. X Aronovici Paula (7479, 80, 2, 94—7, 9, 36—8), cl. XI Nicolae Otilia (7475, 9, 511, 34, 5, 7, 8, 54, 608, 10, 7, 9, 21), *Similovici Silviu* (7477, 8, 83, 7, 8, 90, 4—6, 9, 502, 11, 5, 27, 9, 32, 4—8, 42, 44, 8, 52, 4—6, 80, 3, 5, 608, 10, 7, 9—23), *L. 7* cl. VII Cralicovski

Adriana (2464—72, 4—85, 90—2, 7478, 95, 7—501, 4), Dimitriu Laurenţiu (2464—70, 5, 7, 8), Lazbă Tudor (2464—7, 70—2, 5, 6, 8—84), Mardare Cornelia (2450, 2—5, 64, 5, 70, 3, 4, 9, 84, 9), Sireteanu Georgel (2460, 2—5, 64, 5, 7, 70, 5, 8, 84, 9, 98), cl. VIII Bîrleanu Dorel (2466, 9, 73, 6, 7, 9—85, 7—92, 8—501), Bulancea Valentin (2450, 3—5, 60, 2, 5, 7, 8, 71, 2, 4, 5, 7), 80—5, 7—92), Păduraru Gabriela (2464—8, 70—2, 4—85, 8—90, 7—501), Vulpoiu Grigore (2479—81, 3, 4, 6, 95, 7, 8, 501, 16, 7, 9, 20, 5—7), cl. IX Barbă Georgeta (2475—8, 94, 423, 75—8, 94—6). Pelin Alexandru (2460, 2, 3, 94, 7385, 99, 413, 22, 30, 7, 75, 7, 8), cl. X Breaur Neculai (7364, 6, 71—5, 7, 91, 7—400, 2, 5), L. 8 cl. V Gogoncea Gabriel (2464—7, 79—81, 95), cl. VI Gogonea Liliom (2468—70, 82—5, 99, 500, 1), cl. VII Moceanu Gabriela (2475, 7, 84, 512, 4—7, 9, 24), *L. 9* cl. V Averalon Doina (2479, 80, 97, 515, 8, 29, 31, 3), cl. VI Vlad Marius (2495, 500, 1, 2, 13, 5—7, 9), cl. X Gogoi Mihai (7423—5, 430, 41, 50, 77, 9, 82, 90, 4—6, 9, 505, 10, 35—7).

ILIA (Hunedoara). *L.* cl. VIII Gherman Emil (2464—72, 4).

INEU (Crişana) *L.* cl. IX Stan Ilie (2474—8, 92, 4, 5, 509, 10, 54), cl. XI Alexa

IZVOR (Oltenia) *S. g.* cl. VIII Matei Elena (2450, 72, 84—8—92), Netea Ghcorghe (2454, 5, 60, 71, 2, 84, 9, 95), Safta Eugenia (2471, 2, 4, 83, 4, 8—92).

JIMBOLIA. *L.* cl. X Schuster Karl (7477,9, 90, 4—7, 9, 34—6, 617).

LECHINTA (Cluj). *S. g.* cl. VIII Coruţiu Viorica (2450, 2—5, 61, 2, 4, 5, 74, 8, 80, 1, 3—5, 90—2).

LILIEŞTI (Ploieşti). *S. g.* cl. VIII Ioan Cornel (2467, 70, 2, 4, 83, 4, 91, 503, 15, 7, 9). Mociorniţă Ion (2465, 8, 71, 2, 9, 80, 2—5, 8—90, 512—7, 22—4).

LIPOVA (Banat). *S. g.* cl. VIII Gang Harmut (2464, 5, 7, 9—74, 8), Wild Gümther-Neurdof (2471—5, 7, 8, 83—5, 8—95), cl. IX Luouţ Valeriu (2474, 7, 8, 509, 7442, 5—8 94—6), cl. X Bătuţon Iosif (7475—82, 90, 1, 4—6, 505, 9, 10), Marin Ioan (7364, 6, 73, 5, 78, 97—400, 2, 3, 6, 76—9, 94—6).

LUCĂCEŞTI (Bacău), *S. g.* cl. VII Andrei Ludmila (2450—57, 59—92).

LUDUŞ (Mureş Aut. Maghiară) *S. g.* cl. VII Bacinscki Petru (2450, 2—7, 9, 61, 4—6, 8—73, 9—86), Ghyarmati Gheorghe (2450, 3—7, 67—73, 80, 2—6, 90).

LUGOJ *S. g. 3* cl. VIII Luminosu Elena (2509, 13, 5—7, 9, 21, 2, 4), Sulinca Mariana (2503, 13, 5—7, 9, 21, 2, 4), *S. g. 4* cl. VI Duncescu Sorin (2450, 1, 3—6, 65, 8), *S. g. 6* cl. VIII Larion Maria (2494, 513, 5—7, 9, 21, 2, 4), Murăreţiu Elena (2450, 2, 3, 6, 61, 4, 74—6), *L. 1* cl. VIII Cristea Rodica (2464, 5, 7, 8, 70—5, 80, 1, 3, 4, 5, 8—90, 4—6, 5, 2—7, 9—22), cl. IX Bloch Ivan (7360, 4, 85, 8—400, 8, 30, 7, 8, 41, 2, 4, 5, 75, 7, 90, 4â—7, 9, 500, 2), cl. X Neu Tiberiu (7511, 29, 34, 5, 52, 5, 8, 93, 80, 608, 10, 2, 21), *Orbülov Petru* (7423, 30, 6, 8, 44, 6, 7, 75, 7—81, 90, 7, 501—3, 5, 27, 9, 34—8, 52, 5, 64). *Preoteasa Viorel* (7371—5, 8, 9, 85, 7, 91, 5, 7, 423—6, 30, 2, 7, 8, 47, 50, 2, 4, 75, 7—81, 94—6, 501, 2, 5), Ristea Tiberiu (7475, 80, 3, 90, 1, 4—7, 9, 50, 27), cl. XI Murariu Dorin (7423—5, 30, 7, 8, 47, 50, 4, 7, 80, 94, 5), *L. 2.* cl. VIII Marcu Florica (7494, 5, 73, 8, 94, 503, 4, 6, 8), cl. X Borcănescu Florin (7423, 5, 6, 30, 7, 41, 2, 50, 77, 90, 4—6).

LUPENI. *L.* cl. IX Loigun Vasile (2461, 2 74, 6, 509, 7441, 75, 7, 91, 4—6, 527).

MĂCIN. *L.* cl. XI *Simion Andrei* (7356, 7, 60, 4, 6—9, 71—8, 89—91, 4—5, 7, 9—406, 9—10, 68, 21—30, 2—3, 5—8, 41—4, 7—56, 9—60, 4—7, 9—70, 4—91, 3—502, 4—5, 9, 11, 4—8, 9—32, 4—8, 54—6, 8, 60—4, 7, 9, 74, 80, 57, 601, 8, 9, 12, 4—21, 38, 443).

MÎNĂSTIRENI (VCluj). *S. g.* cl. VIII Coldea Dorina (2468, 71, 2, 4, 7, 83, 8—90).

MĂNEŞTI (Ploieşti), *S. g.* cl. VIII Predescu Gheorghe (2479—84, 6, 9), Vlad Mariana (2454, 5, 60, 2, 6, 8, 77, 9, 83, 9—92).

MĂRĂŞEŞTI (Galaţi). *S. g.* cl. VIII Ichim Gheorghe (2464, 5, 7, 9—72, 81, 3, 5, 94), *L.* cl. X Apostol Ovidiu (2423—6, 30, 42, 7, 8, 78—81, 4—6), absolvent Chiriţă Constantin (7475—80, 7—91, 4—9, 501—3, 4, 6).

MARGHITA (Crişana) *Kasa Zoltan* (7476, 7, 9, 80, 7, 90, 1, 4—7, 9, 502, 11, 4 20, 9, 32, 4—8, 52, 4—6, 91, 608, 10, 5, 21—3, 42, 62).

MARGINA (Banat). *S. g.* cl. VI Cipu Mihai (2452—6, 64—7, 79—81, 3, 9).

MEDGIDIA *S. g.* cl. VIII Florescu Luminiţa (2450—3, 74, 5, 92, 4, 78, 88), *L.* cl. IX Bărbat Dumitru (2474, 5, 7, 8, 92, 7492—7, 500, 2, 7, 27).

MEDIAŞ. *L.* cl. X Andreescu Emanuel (7372, 4, 7—9, 82, 5, 7, 91, 9, 426, 8, 30, 50, 2, 4, 76—80, 94—6, 9, 505), Brădişteanu Smaranda (7372—8, 82, 5, 9, 90, 1, 4—500, 5, 27), Marian Liviu (7360, 6, 87, 98, 9, 402, 13, 23, 5, 8, 30, 7, 46, 450, 2), cl. XI *Dumitru Gh.* (7355—7, 9—62, 71—8, 81, 4, 7, 9, 90—5, 8, 9, 402, 4, 6, 910, 12, 23—30, 2, 5—7, 50, 2, 4, 7, 9, 60, 4, 5, 75, 7—80, 2, 3, 6—8, 90, 1, 4—7), Marian Liviu (7477, 8, 80, 90, 1, 4—7, 9, 500, 10, 29).

MEHADIA (Banat). *L.* cl. X Chiata Ion (7479—82, 90, 1, 4—7, 9, 34—7).

MIERCUREA (Hunedoara) *L.* Cl. IX Dietrich Michael (2445—7, 9, 62, 74—6, 8, 7326, 8, 88), Galaczi Peter (7367, 85, 7, 95, 7, 8, 400, 1, 5, 18, 22, 60—3, 74—7, 37, 8, 75, 6, 94), Ludoşan Ioan (2492, 3, 509, 24—6, 78, 97, 502, 54, 93 608, 9).

MÎNECIU, PĂMÎNTENI (Ploieşti). *S. g.* cl. VIII Preda Viorica (2474, 6, 7, 92, 4, 503, 4, 6, 9).

MIZIL *S. g.* cl. VI Dresu Wlena (2479, 84, 9, 95, 8—500, 16, 7, 9), cl. VII Popescu Nicolae (2477, 9, 81, 3, 4, 9, 75, 500), cl. VIII Boziaru Mirela (2465, 72, 83—5, 8, 90—2, 8), Ciomega Constantin (2465, 72, 4, 9, 80, 2—5, 8, 90—2, 504), Drosu Sonia (2468, 74, 91, 2, 5, 8, 9, 503, 9), Hurduială Elena (2465, 72, 82—5, 8, 90—2), Iliescu Cristina (2465, 72, 4, 9, 82—5, 8, 90—2, 8, 504), Iliescu Marcel (2465, 72, 4, 9, 82—5, 8, 90—2), Mateescu Maria (2482—4, 90, 503, 4, 17—9), Ţugui Lucia (2455, 71, 2, 8, 88, 97—9), Vasilescu Stelian (2465, 8, 72, 80—5, 8—92, 8), *Vlădăreanu Doina* (2479—85, 8—92, 4, 6, 7—9, 503, 13—24), 6—35, 42, 4, 7494, 5, 54).

MOGOŞANI (Argeş) *S. g.* cl. VIII Badea Gheorghe (2478, 80, 5, 99, 500, 12, 3, 5—22, 5, 6), Postelnicu Iom (2479—86, 8—90, 2, 4, 5, 7, 9, 500—7, 7494—7).

MOINEŞTI (Bacău), *S. g.* cl. VIII Cristea Dan (2488, 9, 99, 513, 5, 7, 9, 22, 4, 5), cl. IX Bocănescu Elisabeta (2460—3, 748, 92, 4, 7437, 75, 7, 94), Ciotlos Costache (2461—3, 74, 6, 8, 92, 4, 7399—401, 44, 502, 5), Tănase Anişoara (2460—3, 74, 8, 92, 4, 7437, 75,

MORENI (Ploieşti) *L.* cl. V Andrei Horia (2453—5, 64, 5, 7, 79—81, 4), Bica Severa (2453, 4, 64, 5, 7, 79, 84, 9, 98), Stefănescu Adina (2450, 3—5, 64, 6, 7, 8, 81, 3, 4, 9), cl. VI Popescu Viorel (2429—31, 8, 9, 50, 3—5, 70, 9, 81, 4), Feldman Cristina (2452—5, 64—70), Ilie Daniela (2450, 2—5, 64, 5, 9, 70, 84, 9), cl. VIII Feldman Daniela (2485, 8—92, 503, 4, 6, 9), Ghenoiu Mihai (2450, 3—5, 61, 7, 8, 76, 7, 84, 9), Ghenoiu Nicolae (2450, 3—5, 62, 7, 8, 82, 4, 9), Georgescu Liliana (2464, 5, 71, 4, 5, 80, 1, 3—5, 8), Oprescu Marian (2450, 2—6, 60—5, 7—9, 71—6, 80—5, 7—92), cl. IX Boltres Cristian (2492, 4, 509, 75—7, 94—6, 502, 5, 54), cl. X Dobrescu Mircea (7475, 7, 8, 90, 4—6, 502, 5, 27, 54, 608), Iordan Ion (7314, 7, 8, 21—3, 5, 6, 33, 64, 423, 5, 6, 50), *Leu Constantin* (7356, 60, 4, 6, 72, 2—9, 85, 7, 97—405, 23—6, 4, 2, 7—9, 41, 3, 4, 6, 8—52, 75—80, 2—4, 93—500, 4, 5, 7, 10), Ştefan Vasile (7360, 6, 72, 4, 5, 7, 85, 7, 8, 98, 423—6), cl. XI Şelaru Corneliu (7475, 4, 89, 90, 4—9, 505, 20, 32, 4—8, 54, 5, 608, 14, 6, 7, 29, 1, 38, 40, 24, 9, 62),

MOZECENI—DEAL (Argeş). *S. g.* cl. VIII Chiorăscu Constantin (2450, 2, 3, 5, 5, 62, 8, 70—2, 4, 9, 81, 3—5, 8—90, 5000, 3, 4, 8), cl. IX Bălăşoiu Florian (2474, 6, 7, 92, 508, 7477, 94—7, 54).

NADRAG (Banat). *L.* cl. VI Rusz Geza (2464, 5, 7, 8, 70, 83, 4, 9, 98, 502), cl. IX Popescu Pavel (2460—3, 74—8, 92, 4, 508, 7366, 84, 5, 422, 6, 550, 40—2, 94, 9).

NĂSĂUD. *L.* cl. VIII Rusu Gheorghe (2480, 1, 3—5, 88—90, 4, 5, 9, 500), cl. X Mureşanu Florin (7477, 9, 80m 90, 1, 4—7, 9, 500, 29, 34—7), Scurtu Vasile (7441, 3, 52, 4, 83, 9, 505, 1, 29, 34—8, 52—6, 60) Timbulea Leon (7364, 75, 9, 99, 402, 23—6, 30, 47, 77, 80, 90, 4—6).

MELINEŞTI (Oltenia). *L.* cl. IX Popa Dumitru (7475), 7, 90, 34—7, 500, 1, 5, 27, 34, 5, 92, 4, 509).

NEGREŞTI (Iaşi). Absolvent Ungureanu Ion (7423—6, 50, 2, 78, 90, 4—7, 9, 505,

NEGRU VODĂ (Dobrogea). *L.* cl. IX Bulică Ion (2474, 6—8, 518, 9, 7437, 41, 7, 94, 6, 554), cl. X Ciocîia Ilie (7477, 90, 4—7, 34, 6—8, 42, 54, 5), Dobre Ion (7423—6, 30, 47, 9, 50, 2, 64, 76—81, 3, 90, 4—7, 9, 500, 2, 11, 29, 35—7, 50, 4—6), *Vlădulescu Petre* (7476—84, 90, 1, 4—6, 9, 502, 5, 13, 4, 6, 25, 7, 9, 608—10, 12).

NEHOIAŞI (Ploieşti) *L.* cl. X Posea Traian (7373, 5, 7, 424, 5, 30, 7, 78—80, 90 4—6).

NICOREŞTI (Galaţi). *S. g.* cl. VIII Oprea Dorin (2464, 6, 9—72, 5, 7, 9—81, 3, 4).

NOVACI (Oltenia). *S. g.* cl. V Andreoiu Elena (2464—8, 79—84), Berbecel Ilie (2464—8, 79—81, 3, 5, 90), Ciocoiu Viorica (2464—8, 79—81, 3—5, 90, 5, 7, 501, 8, 12—9), Dafinescu Elena (2464—8, 79—81, 3—5, 90), Ciorogoru Ionica (2464—8, 79—81, 3—5, 90), Ciucă Ion (2464, 5, 7, 74, 9, 81, 3, 4, 9), Negucioiu Constantin (2464—8, 79—81, 3—5, 90), Simionescu Olga (2464—8, 79, 81, 3, 4, 9), cl. VI Jianu Maria (2450—6, 64, 5, 7), Opriţescu Maria (2450—6, 64, 5, 7), Preoţescu Viorica (2450—5, 64, 5, 7), cl. VII Ciocan Mia (2450—6, 64, 5, 7), Cosor Ion (2450—64, 5, 7), Giugiulan Gheorghe (2450—5, 8, 64, 5, 7), Peştereanu Vali (2450—6, 64, 5), Truşcă Mihai (2450, 1, 3—5, 8, 64, 5, 7, 79), Absolvent *Buşe Ion* (7532, 4—9, 41, 3, 4, 6, 8, 50, 2, 62, 7, 70, 4, 80, 3, 9, 91, 3, 9, 600, 1, 5, 7, 8, 10, 2, 4—7 19—21).

OCNA MUREŞ. *L.* cl. IX Fülöp Ana (2444—6, 8, 9, 7317, 8, 22, 5, 6, 30), Popa Ioan (2476, 94, 508, 9, 7437, 44, 75—7, 90, 1, 4—6, 502, 34, 5), Suciu Victor (2508, 9, 7476, 8, 94—6, 502, 50, 4, 608, 10), Ursu Tiberiu (2474—8, 92, 4, 7475, 7, 94, 5, 6),

OLANU (Argeş) *S. g.* Marcu Filofteia (2464, 5, 7, 8, 81—4, 8, 9).
5, 13, 23—6, 8, 30, 2, 7, 8, 41, 2, 6, 52, 4, 64, 74, 76—90, 4, 6, 9).

ORADEA. *L. 1* cl. IX Bîrău Marietta (2477, 92, 4, 509, 23, 37, 8, 76, 94--6, 502, 54), Negrău Mircea (2474—8, 82, 5, 402, 18, 26, 37, 41, 2, 4, 54, 94, 7475—8, 91, 4—6, 502, 5), Onaca Mariana (2475, 8, 92, 504, 26, 7475, 94—6), Vasile Emil (7474, 90, 4—7, 529, 34—8, 610, 7), Manole George (7441, 75, 7, 90, 4—6, 503, 51, 4, 608, 10, 7, 9), cl. X Albu Adalbert (7378, 3, 5—7, 9, 80, 1, 4, 529, 36—8, 54, 6, 612). Maghiar Ioan (7372—9, 98, 9, 40, 2, 5, 23—6), Pop Gavril (7372, 3, 5, 7, 9, 99, 402, 5, 9, 24, 5, 32, 501, 2, 5), Urdă Ioan) 7476—80, 2—4, 90, 1, 4—502, 4, 5, 10, 1, 4, 20, 7, 8), Weisz Dezideriu (7366, 73, 5, 8—9, 95, 402—4, 23—5, 37, 80), cl. XI *Buț Tiberiu* (7423—6, 37, 8, 41, 2, 4, 50, 77, 8, 80, 3, 5, 6, 90, 4—7, 9, 507, 20, 34—8, 52, 4, 6, 610, 7, 21, 3), Lucuș Teodor (7482, 3, 5, 6, 75—9, 90, 4—7, 9, 505), Mănuca Dumitru (7427, 32, 77, 90, 4—6, 9, 505, 20, 34—8, 610, 7, 21), *L. 4* cl. X Bărbuță Sandu (7424, 5, 8, 54, 95—7, 9, 500, 29, 34, 6). *Brădău Florian* (7372—4, 400, 3, 10, 3, 21, 3—6, 28, 30, 2, 7, 8, 14, 2, 7, 50, 1, 64, 7, 8, 70, 5, 7, 9—83, 7, 90, 4—7, 9, 500, 7, 9, 11, 14, 21, 7—9, 34—8, 52), Craijun Radu (7336, 72—5, 7, 8, 82, 79, 85, 91, 8, 400, 2—4, 13, 8, 21, 2, 76—80, 90, 1, 95—7, 9, 505), Negruțiu Radu (7373, 5, 7, 9, 85, 400, 9, 80, 290, 5—7m 9), Pop Romul (7423, 5, 6, 8, 79, 80, 90, 4—7, 529), *L. pedagogic* cl. VII Budan Felicia (2495, 515, 7, 9, 32, 3, 5), Matiaș Ervin (2480—2, 4, 9, 97, 500, 1, 4, 12—9, 26, 35).

ORAȘ GH. GHEORGHIU DEJ. *S. g.* cl. VII Fenichi Mariana (2464—7, 71, 2, 81 3), Oncean Ioan (2454, 64, 5, 7, 70, 3, 6, 81, 4, 9), *L.* cl. IX Kopecsiri Andrei (2475—7, 92, 4, 7397, 9, 477, 8, 94, 5, 7, 500, 2), Papanicolau Lefteris (2477, 92, 4, 82, 5, 97, 9, 475—8, 94, 5,) cl. X Robu Vasile (7437, 8, 41, 9, 50—2, 5, 9, 14, 54—6, 77, 9, 90, 4—6, 534—7, 610, 4, 7), cl. XI Merilă Angelica (7366, 8, 81, 7, 9, 90, 1, 5, 423, 4, 6, 7, 30, 80). ORAVIȚA. *L.* cl. IX Grecu Adoni (2460—3, 74, 5, 8, 4, 8, 92, 400,37, 502), Absolvent Florian (7475—80, 2, 6, 8—91, 4—6, 500, 1, 5, 11, 20).

ORLEȘTI (Argeș) *S. g.* cl. VIII Florescu Constantin (2464—7, 77, 81, 3, 4, 9).

ORȘOVA. *L.* cl. VII Cristescu Răsvan (2465—8, 71, 2, 5, 9—83). Ionescu Stana (2480, 4, 9, 97, 500, 16—18, 20, 4), Moruzi Nicolae (2489, 95, 500, 13, 20, 3, 31), Achiomek Victor (2495, 7, 500, 1, 17—9, 28, 30, 1, 3), cl. IX Mageriu Oana (2460—3, 74, 5, 7, 8, 7397, 437, 508, 9), cl. X Erimescu Ion (7426, 32, 44, 5, 52, 75—82, 90, 1, 4—7, 9, 501, 2, 7), cl. XI Stricker Iosif (7423—6, 30, 7, 42, 8—52, 4, 79, 80, 90, 4—6, 9, 509, 24, 35—7).

ORĂȘTIE *L.* cl. VI Cociorvă Rodica (2464—7, 70, 81—4, 9), cl. VIII Mera Dan (2474—8, 502, 4, 5).

OȚELUL ROȘU. *S. g.* cl. VIII Neicu Victorian (2495, 512, 3, 5—20, 2, 4, 6, 7). Făroată Anghel (2479—86, 88—92, 4, 5), cl. VIII Totoi Ionel (2495, 8, 9, 503, 7, 15—9, 22, 4, 6, 30), Țuican Stela (2464, 71—3, 6—9, 83, 4, 7, 8, 9, 91, 503, 4), Tăroată Gheorghe (2461—3, 76, 94, 509, 7382, 97, 9, 402, 5), cl. X Țuican Flore (7423, 5, 6, 30, 7, 44, 50, 2, 4, 75—83, 90, 4, 6, 9, 514, 36—8).

OVSELU (Oltenia) *L.* cl. XI Ciumăgeanu Constantin (7423—6, 30, 7, 8, 42, 50, 2—4, 8—80, 90, 1, 3—7, 500, 2, 14), Preda Ion (2423—6, 30, 7, 8, 50, 2, 4, 7, 80, 90, 6, 7).

PADINA (Ploiești) *S. g.* cl. VII Balcan Elena (2481—3, 9, 512—7, 9, 20, 3—5), Scîrlat Maria (2479, 81, 3, 4, 9, 512, 4—7, 9, 20, 3, 8).

PALONCA (București) *S.g.* cl. VIII Năchilă Petru (2469, 74, 85, 95, 7, 9—501, 3, 4).

PANCIU. *L.* cl. VIII Drăgan Diana (2465, 7, 8, 71, 2, 4, 8, 81, 3—5, 8, 9, 91, 2), cl. IX Luca Georgeta (2468, 74, 5, 8, 83, 4, 9, 90, 8, 503, 9, 17, 9, 27), cl. X Minea Gheorghe (7364, 73—5, 7, 9, 82, 5, 95, 402, 6, 23—5, 50, 2, 4, 75, 7—83, 94, 6, 7, 529, 35—8), absolvent Ion Fătu (7355, 6, 9, 60, 2, 4, 6, 91, 7, 8, 402, 3, 10, 6, 90, 4—7, 9, 505, 14).

PĂTIRLAGELE *L.* cl. VIII Ionescu Claudia (2450, 3, 4, 62, 8, 71, 2, 4, 5, 8, 95, 503, 6, 13, 5—8, 20, 2), cl. IX Olteanu Nicolae (2492, 4, 509, 10, 24—7, 42—4, 503, 5, 8), cl. X Posea Dumitru (7424, 5, 30, 7, 77, 9, 90, 4—6, 9, 535—7), *Toma Viorel* (7360, 72, 4, 8, 405, 10, 23—6, 30, 2, 8, 41, 2, 4, 7—50, 75—83, 90—502, 5, 10, 1, 4, 25—8), cl. XI Poșoiu Constantin (7359, 72,271—8, 97—404, 9, 13, 22).

PĂUNEȘTI (Adjud) *S. g.* cl. VII Conduraru Maria (2451, 65, 9, 79, 80, 5, 9, 7, 502, 8), Gheorghiu Mihai (2431, 7, 50, 2, 6, 8, 62, 5, 7, 80), Neagu Viorica (2435, 46, 7, 53—6, 61, 4—73, 7, 81, 2, 4, 5, 9, 500, 1, 7318, 23), Nica Lucica (2465, 8, 9, 79, 80, 90, 1, 5, 7, 506). Novac Maria (2446, 2, 4, 61, 4, 9, 870, 2, 83—98, 9), cl. VIII Novac Maria (2479—82, 4, 5, 8—90, 4), Rizuc Rodica (2479—82, 4, 9, 91, 2, 7480, 94).

PĂTULE (Oltenia) *S. g.* cl. VII Gagica Constantin (2480, 1, 3, 4, 9, 516, 7, 9, 26).

PERIEȚI (Argeș) *S. g.* cl. VII Lincă Lidia (2464, 5, 7—9, 81, 3, 4, 9, 95, 517, 9).

PETRILA *L.* cl. X Cațan Nicolae (7477, 9, 82, 94—7, 9, 554—6, 608, 12, 4).

PETROȘENI *S. g.* cl. cl. V Siclovan Codruța (2464—72, 5, 6), cl. VI Siclovan Codruța (2480—4, 9, 90, 3, 4), cl. VII Butulescu Valeriu (2495, 7—501, 4, 12—7, 9, 20), Duda Iordan (2464, 5, 7—74, 6—7), cl. VIII Stenberg Margit (2450, 2—6, 9—74, 83, 4, 9—93, 397, 505), *L.* cl. IX Ștefan Mircea (2492, 4, 509, 6465—7, 90, 4—7, 52, 4, 5, 610, 8, 9),

cl. X Oprişiu Oltea (7366, 73—5, 91, 423, 4, 6, 430, 7, 50, 2, 4, 77, 8, 90, 1, 4—7, 9, 505), *Stan Mihai* (7423—6, 37—9, 41—5, 7—52, 75 — 84, 90 — 505, 9 — 11, 34 — 8, 54 — 6, 77).

PEŞTEANA-JIU (Oltenia) *L.* cl. X Lumezeanu Constantin (7372—7, 9, 98, 9, 423—6), Truşcă Matei (7373—9, 97, 402, 23—6, 51), Tudorescu Aurel (7423—6, 30, 2, 7, 8, 50, 79, 80, 90, 4—7, 500, 5, 28, 9, 34—8, 54).

PLOPENI (Ploieşti) *L.* cl. X Drăgan Nicolae (7372—4, 91, 7—9, 402, 24—56, 52, 4, 77, 9, 94—500, 11, 36). Petrache Gheorghe (7366—4, 6, 7, 87, 91, 404, 26, 30, 2, 50). Şerban Gheorghe (7366, 72, 3, 5, 7, 95, 402, 23—6, 30, 50, 2).

PIATRA NEAMŢ. *S. g.* cl. VI Chiruc Mişu (2431, 53—5, 9—84, 95), cl. VIII Bronşteain Eugen (2481, 3—5, 9, 95, 9, 501, 29, 31, 3, 7), *L.* cl. IX Cîmpu Adrian (2492, 4, 508, 9, 7475—8, 91, 7, 51, 4), cl. X Meresĉu Mioara (7423—6, 30, 2, 7, 8, 42, 50, 2, 4).

PIATRA OLT (Argeş), absolvent Enache Ilie (7423, 5—30, 42, 77, 8, 94—7).

PIPIRIG (Tg. Neamţ). *S. g.* cl. VIII Pintea Gheorghe (2462, 5, 7, 71, 2, 9, 83, 90, 509).

PITEŞTI. *Ş.g. 3* cl. VIII Cotescu Mariana (2450, 53—6, 60—2, 4, 5, 71, 2, 4, 5, 9—85, 7—92, 4). *Ş.g. 4* cl. VIII Bunea Mihai (2450, 2, 3, 60, 2, 5—7, 80, 3), *Ruse Lilion* (2480—5, 8—92, 4, 7—500, 3, 4, 6, 12—24, 7475—8, 94), *Ş.g. 9* cl. VII Schiancu Sever (2464, 5, 7, 70k 80, 1, 2, 95, 7), *S.g. 10* cl. V Ionescu Radu (2484, 9, 98, 512, 4, 6, 7, 9), cl. VII Minduţeanu Dan (2450, 2—6, 6, 4, 5, 80—6, 8), Pa savel Remona (2464—8, 70—4), Tucă Dan (2450, 2—5, 61, 8, 81, 4, 95—502, 4), cl. VIII Matei Vania (2481, 3, 4, 9, 90, 503, 4, 8, 15, 7, 9), *Ş.g. 17* cl. VI Portuzudis Costas (2450, 2—5, 64—72), Vanderdi Ileana (2466, 9—72, 9, 80k 2, 3), *Şc. prof. textilă an I* Badea Constanţa (2452, 60, 5, 71, 2, 7, 9—81, 3, 5, 9), Capanu Tudora (2446, 52, 65, 771, 2, 9, 80, 1, 3, 5). L. 1 cl. IX Chifor Ion (2476—8, 92, 4, 7476, 91, 4—6, 500, 2, 27, 54, 619), Corta Emil (2461, 3, 74, 6, 60, 95, 8, 401, 18, 30, 7, 42, 70, 94, 5), Cosciug Alex. (2476—8, 92, 4, 7442, 4—7, 94, 5, 502, 3), Florescu Radu (2460, 2, 3, 74, 6—8, 92, 4, 509, 10, 7442, 75, 94), Georgescu Corneliu (2474—6, 8, 92, 4, 8475—7, 94—6), Ilie Ştefan (2464, 8, 71, 2, 7, 81, 3—5, 8—91, 2), Joiţa Constantin (2461—3, 74—6, 8, 92, 4, 7385, 99, 437, 42, 74, 5, 7, 94—6)., Minduţeanu George (2474—8, 7397—9, 401, 37, 8, 41, 2, 75—8, 93—8, 500—2, 4, 5, 20, 3, 7), cl. X *Dumitrache Ion* (7398—100, 2, 3, 5, 22—6, 8, 30, 2, 78, 41, 2, 4—50, 2,5, 66—8, 77—83, 90—5, 10—4), Dumitriu Nicolae (7425, 6, 50, 50, 2, 76, 7, 9, 80, 90, 1, 4, 5, 6, 9, 2, 7, 52, 4, 5), Lazăr Mircea (7364, 72—5, 9, 423, 5, 30, 7, 8, 41, 2, 9, 50, 2), Pavelescu Ion (7360, 4, 6, 72—5, 7, 8, 82, 5, 91, 7, 8, 400, 3, 25—6, 30, 2, 7—9, 41—3, 7—52, 4), Simion Eleonora (7360, 72, 5, 7, 87, 91, 401, 18, 25, 397, 42, 52, 4, 70), cl. XI *Ioana Mariana* (7355, 6, 66, 2k 9, 72—86, 94, 6, 8, 401—3, 13, 22, 23, 4, 6, 7, 77, 8, 80, 3, 7, 94, 6), Ionescu Alex. (7324—9, 32, 42, 91, 3, 5), Opran Ştefan (7423—5, 90, 4, 9, 529, 33—9), *Pietreanu Cristian* (7356, 9, 60, 2, 6, 72, 3, 5—6, 81, 3, 4, 6, 98, 401, 2, 18, 21, 3—5, 30, 2, 3, 7, 41, 2, 7, 52, 4, 70, 4, 94—8, 500, 4, 5, 34—8, 52, 4—6, 65, 7, 72, 8, 87, 9, 608, 10, 7, 8, 20—2), Simion Eleonora (7423, 4, 6, 8, 77, 83, 90, 4—7, 54), *L. 2* cl. XI *Preda Vasile* (7323—7, 30, 2, 3, 5, 7, 41, 2, 6—54, 6, 61, 4, 5, 8, 9, 75—80, 2, 3, 5, 8—91, 4—9, 501, 5, 14, 6, 20, 5—7, 9, 30, 4—8, 42—4, 8—50, 2—6, 8, 62, 7, 9—71, 80, 83, 9, 608—10, 17—23), *L. 3* cl. XI Gheorghe Ion (7423—8, 30, 7—9, 41—3, 8—50, 4, 7, 65—7), absolvent *Bronişte Dumitru* (7423—8, 30, 2, 3, 5, 50, 2, 6, 65, 74, 90, 4—6, 7, 520, 33—8, 54, 83, 9, 610, 2, 7—9, 21), *Historescu Titel Constantin* (7475—505, 27, 9, r32, 4—8, 48, 554—6, 62, 4, 5, 80, 6, 610, 12, 20, 1).

PLOEŞTI. *Ş.g. 2* cl. VIII Cernat Gabrela (2465, 74, 8, 80, 3—5, 98, 503, 6, 9). *S.g. 4* cl. VIII Iordan Marin (2512—20, 2), *Ş.g.* cl. VI Mocanu Maria (2480, 1, 3, 95, 78, 513, 5), *Ş.g.* cl. VI Iacob Sorinea (2453—5, 64, 7, 83, 4, 9), Maevschi Eugenia (2453—5, 64, 5, 70, 84, 9), Negrescu Dan (2453—5, 64, 5, 70, 84, 9), cl. VII Berciu Elena (2452—6, 72, 7, 81—4, 90, 5, 500), cl. VII Ailienii Luminiţa (2450, 2, 3, 61, 5, 8, 71, 2, 80, 2—5, 90—2), Chiru Dan (2450, 2—6, 9—62, 5, 8, 71, 2, 4, 8), *Marinescu Monica* (2450, 2—5, 9—62, 4—72, 80—5, 8—92, 4, 5, 8, 500, 3, 4), *Vasilescu Ileana* (2450, 2—7, 9—62, 4—74, 6, 8, 80—5, 8—92, 9, 503, 6, 9), *Ş.g. 12* cl. VI Dumitrescu Virgil (2450, 2—5, 64—70, 9—81, 3—5), cl. VII Tiprigen Carmen (2464, 5, 7—9, 71, 6, 7, 80—4, 9, 90, 5). *Ş.g. 17* cl. VIII Simion Iftimie (2450, 2, 4, 5, 61, 4 5, 7, 8, 71, 2, 4, 7), *Ş.g. 21* cl. cl. VII Moisescu Dorina (2483, 4, 9, 95, 515, 5—7, 9, 20, Zielinschi Roxana (2450, 4, 5, 64—8, 71—3, 80—4), cl. VIII Sgraon Victor (2485, 91, 5, 9, 504, 13, 5—22, 4), Turţudău Florin (2479, 82, 5, 95, 7, 9, 500, 1, 9, 10, 7495), *Ş.g. 23* cl. VII Stoica Valentin (2464—76, 8), cl. VIII Anton Costel (2450, 2—6, 4, 4—9, 71—6, 8—92, 4, 5), *Avramescu Mircea* (2450, 2—7, 4—74, 87—92, 5—500 , 2—10, 520—6, 88—35), Ncolae Daniela (2450, 2—5, 60—2, 71, 2, 82—5), Răduţă Viorel (2471, 2, 9—85, 8, 9), Stoica Valentin (2479——86, 8—92), *L. 1* cl. V Redmic Cristina (2464—8, 71, 2, 9—81), cl. VI Bucheru Raluca (2479, 81—4, 500, 1, 16), Florea Mariana (2479—81, 3—5, 1, 90), Munteanu Dinu (2488—92, 4, 503——5), Olteanu Horia (2497, 5—7, 29, 31—3), Solomon Ernest (2465—7, 70, 7, 80, 1, 3, 4), Solovăstru Aniela (246, 5, 7, 79, 83—5, 9, 95), cl. VIII Calotă Dumitru (2483, 9, 90, 504, 13, 5—7, 9, 23), Ciobanu Vasile (2495, 7, 8, 500, 3, 6—10, 2—24), Cucurezeanu Mihaela (2450, 60—2, 71.

81—5, 90—2, 503, 13, 5—9), Nicolescu Ruxandra (2465, 7, 8, 72, 3, 9, 81, 3k 4), Olteanu Gheorghe (2462, 4—7, 71, 4—8, 82—5, 90—2, 8—501, 3, 6, 8). Petreanu Traian (2515—7, 9, 20, 2, 8, 31), Preda Oltea (2450, 2—5, 60, 2, 7, 76, 80—3, 8), Roibu Constantin (2450, 2—5, 60, 4, 5, 7—74, 8—81, 3—5, 8—92, 501, 3, 4, 8), *L. 1* cl. IX Bărbulescu Vasile (2492, 4, 509, 7475—8, 94—7, 502, 27), Boaldă Nicolae (2508—10, 7437, 8, 42, 78, 82, 90, 4—6, 502, 34—6, 54), Dobrescu Laurenţiu (7397, 9, 400, 1, 37, 8, 42, 75—8, 94), Dreptate Marcel (2495, 7—504, 13, 5—24), Iordache Sorin (7397, 9—401, 38, 38, 41, 2, 75—8, 94—6, 500, 2). Păunescu Elena (2492, 508—10, 24, 6, 7, 52, 4, 7974, 7, 8, 548, 56), Ristea Ilie (2474, 6—8, 94, 508—10, 7437, 8, 41, 2, 4, 94, 502, 5, 14, 27, 54, 6), Simion Iftimie (2479, 80, 2—5, 8, 91, 4, 5, 9), Tăbleţ Domniţa (2492, 4, 508, 10, 7475, 7, 8, 94—6, 27, 52), Vasile Marilena (2492, 4, 508, 9, 10, 24, 7496, 550, 2, 6, 608), Vasilache Dan (2474—6, 8, 92, 4, 7437, 41, 75, 7, 90, 4—6), cl. X Băicoianu Eugenia (7375, 97—9, 401, 2, 5, 23, 4, 37, 79, 80, 2, 94, 6, 9, 502, 3), *Botoşanu* Lidia (7423——6, 37, 8, 41—3, 7—52, 70, 75—83, 90, 4—503, 27—9, 34—8, 52—8, 60, 1, 4—7, 608—10 12—4, 7—22), *Botoşanu Maria* (7475—83, 90, 3—503, 5, 9, 27—9, 34—8, 52—6, 60, 5—7), *Breţeamu Sabina* (7400, 1, 5, 37, 41, 2, 47—50, 475—84, 90, 3—7, 500—3, 5, 11, 4, 29, 34—8, 51—4, 93, 608, 9, 12, 4, 7—9), Căsăndroiu Dănuţ (7321, 8, 60, 4, 72—8, 82, 5, 91, 8, 9, 402, 5, 23—6, 8, 42, 4, 50, 2, 4, 76, 7. 9, 80, 2, 90, 3—6, 9, 511), Dinescu Iulian (7360, 6,)2, 3, 5, 7, 87, 97—402, 23—5) 30, 7, 41, 2, 46, 52, 4, 79, 80, 90, 407) *Dragomirescu Cezar* (7372—4, 7—9, 403, 5, 23—6, 37, 8, 41, 2, 7—52, 77—80, 91, 1, 3—501, 5, 9, 14, 34—8, 54, 5, 608, 12, 14, 7, 8, 21), Dumitrescu Marian (7423—6, 8, 32, 7, 8, 41, 2, 4, 7—50, 2, 4, 76—80, 2, 90, 1, 3—7, 9, 500, 511, 4, 25, 35—8, 50—4), Ghgeorghe Marioara (7397, 8k 401, 2, 5, 25, 37, 8, 42 9, 54, 501—3, 44, 52, 91, 4—7, 58—5), Grinţescu Mihalea (7373—5, 7—400, 2, 3, 5, 23—5, 37, 46), Grigore Ecaterina (7377—9, 97â403, 22—5, 41, 2, 4, 6, 9 502), Ionescu Lucian (7360, 71—8, 97—403, 5, 23—6, 42, 4, 6, 7, 50, 79, 82, 3, 93—7, 501—3), *Neguţ Gheorghe* (7397, 400, 1, 23—6, 8, 30, 2, 7—9, 41, 2, 4, 6, 7, 9, 50—2, 54, 5, 64, 75—84, 90—503, 5, 9, 11), Nea Tiberiu (7377, 87, 92, 3, 5, 413, 23—5, 30, 2, 41, 80, 3, 90, 2, 4, 5), Nicolae Aureliu (7467, 70, 80, 2, 90, 4—6, 9, 514, 27, 8, 34—8), Nicolae Aureliu (7467, 70, 80, 2, 90, 4—6, 9, 514, 27, 8, 34—8), *Nicolescu Amelia* (7397, 400, 1, 2, 38, 41, 2, 4, 9, 54, 7, 80, 3, 94—6, 9, 502, 3, 27, 30, 47, 8, 51, 75, 6, 81, 2, 90, 1, 3, 7, 9, 500, 1, 5, 10, 4, 28, 9, 34—8, 52—6, 60, 5, 6), *Olteanu Raluca* (7379, 97, 8, 400, 1, 3, 38, 41, 2, 54, 75, 9, 80, 2, 3, 90, 1, 3—7, 501——3, 27, 9, 34—8, 52—6, 608, 10, 7—22), Popescu Mariana (7475—8, 94—8, 9, 502, 5, 7, 14, 6, 27, 608), *Prelipceanu Minodora* (7374, 98, 403, 5, 24—6, 30, 8, 41, 2, 4, 6, 50, 2, 4, 77, 9, 80, 2, 3, 90, 1, 4—9, 501, 2, 27, 9, 35, 6), Roman Dan (7372, 3, 5, 7, 91, 7, 400, 1, 2, 5, 23——5, 30, 2, 7, 8, 41, 2, 4, 6, 7, 9, 50, 2, 4, 5, 79, 80, 3, 90, 9, 502, 3, 36, 7), Stan Nicolae (7323—5, 30, 7, 42, 77, 80, 90, 6, 514, 6), State Adrian (7423—5, 30, 2, 7, 8, 41, 2, 4, 6, 7, 9, 50, 2, 4, 5), Schiopu Ion (7360, 6, 72—5, 7, 91, 9, 418, 23—6, 30, 42, 4, 7, 50. 2, 3, 54, 77—80, 90, 502, 6, 11, 4, 6), cl. XI *Coman Constantin* (7476—82, 4, 90, 1, 3—6, 9, 502, 3, 6, 11, 4, 20, 7—9, 34—8, 51—6, 608, 12—4, 7—9), Luca Constantin (7317, 8k 20, 3, 6, 7, 33, 5, 7, 9, 42, 3, 64, 75, 7, 400), *Nicolae Florea* (7475—84, 90, 1, 3, —6, 9—505, 9—11, 4, 29, 34—8, 50—6, 63—5), Vasilescu Cristian (7423—6, 64, 77, 9, 80, 90, 4—6, 9, 502, 3, 11, 4, 7, 35, 6, 8, 51, 2, 4—6), absolventă Rucăndrescu Mioara (7494—7, 520, 1, 34—8, 608, 23), Stan Ioana (7430, 3, 7—9, 41—4, 6, 8, 9, 50—4, 9, 60, 2, 6, 9, 70, 4) *Vasiliu M. Constantin* (7346, 55 9, 60, 2, 46—9, 71—8,82—5,7—95,7—400, 2, 3, 5, 8—10, 3, 5, 6, 8, 21—7, 30, 3, 7, 8, 41, 25, 6 9—9—54, 6, 70, 90, 6, 8, 70, 5, 529, 31, 2, 4—9, 42—4, 50, 2—6, 9, 60, 3, 5, 6, 8—71, 3, 4, P), *L.2* cl. V Fulga Cristian (2464—7, 70, 9, 80, 1, 3), Mariniu Dragoş (2450, 3, 67, 8, 80, 1—3, 95, 504), cl. VI Alecu Voica (2452, 71, 2, 9—84, 92), Mazăre Valentin (2515, 7, 9, 14, 30—3), Coman Alexandru (2450, 3, 4, 64—9, 71, 2, 9—81, 4, 6), Lupulenco Livia (2450—4, 61, 4, 5, 7), Miron Alex. (2464, 5, 7, 70—2, 4,7), Pastia Alex. (2482—5, 8—90, 9), cl. VIII Beffa Mihai (2250, 2—6, 60—2), Dacian Plaiu (2454, 6, 71, 4, 83, 4, 9, 91, 2, 504, 6, 9), Grigore Elena (2464, 5, 7, 8, 70, 80—4, 9, 500, 15—7, 9, 20, 5), Lipănescu Costin (2479——81, 4, 8, 90, 503, 13, 5, 6—21), Miron Alex. (283—92), Nicolae Ligia (2480, 1, 3—5, 7—90, 8, 503, 4), Petroşanu Grigore (2454, 5, 65, 7, 71—4, 95, 9). Popescu Teodor (2450, 2—5, 61, 5—7, 70—2, 9, 81—4), *L.2.* cl. IX Alecu Steliana (2460, 2, 3, 74, 5, 2, 92, 4, 74, 13, 8, 30, 79 74, 6, 503), Brenner Mircea (7475—8,, 91, 4—7, 500, 2, 27), Bucur Teofil (7423, 30, 7, 41, 2, 75—8, 80, 91, 4—6, 502, 28, 52), Carabaşu Gheorghe (7378, 85, 99, 413, 8, 22, 3, 30, 7, 42., 6, 75, 7, 90, 4—6, 9, 527), Constantin Aurel (2460, 2, 74—8, 7437, 8, 75—7, 502, 54, 6). Constantinescu Mălina (2460—3, 74, 5, 7, 8, 92, 4, 508, 9, 7382, 5, 425, 77, 94—6), Dima Foina (2462, 3, 74, 8, 92, 4, 509, 7392, 4, 418, 37, 8, 41, 75, 94—7), Dinu Dumitru (2460—3, 74, 5, 8, 91, 2, 4, 7378. 85, 418, 23, 30, 7, 75, 7, 90, 4—6, 8), Duţescu Constantin (2460—3, 74, 6—8, 7385, 99 401, 75—8, 91, 4—6, 500, 2), Fava Dan (2461—3, 92, 4, 7382, 5, 9, 477, 92, 4—6, 8), Furda Ruxandra (2460, 2, 3, 74, 8, 90, 4, 7282, 418, 37, 41, 75—8, 94—6), Georgescu Adrian (2460, 2, 74, 94, 509, 7425, 6, 30, 8, 75, 95, 6, 9, 500), Iancu Filofteia (2462, 3, 5, 72, 4—6, 85, 94, 7399, 437, 9, 41, 75, 7, 944—6, 8), Ilie Alexandru (2460—2, 74—6, 8, 92, 9, 7378, 85, 99, 401, 23,

37, 77, 8, 94—6), Ilie Ion (2460—3, 74—8, 92, 4, 7399, 400, 37, 8), Ionescu Mihai (2460, 2, 3, 74—8, 92, 4, 7399, 37, 8, 75—8), Marinescu Mihaela (2474, 6, 8, 7382, 418, 23 30, 7, 42, 4, 76, 7, 80, 90, 1, 4—6, 502, 9, 54), Mircea Eugen (2460—3, 74, 6, 8, 7385, 99, 401, 18, 37, 75, 7, 94—6, 7, 502), Moisescu Valeria (2475, 6, 92, 4, 508, 10, 24, 7475, 7, 94—6, 514, 27, 52, 4), Moşanu Octavina (2460—3, 7418, 23, 30, 75, 7, 94—6, 8, 527), Pană Ion (2460—3, 74—8, 7385, 99, 401, 13, 8, 22, 37, 41, 44, 75—8, 80, 91, 4—7, 500, 2, 3, 5), Popovici Elena (2461—3, 74, 7, 8, 92, 4, 7382, 5, 418, 75, 7, 8, 93—7), Stan Gheorghe (2508, 9, 7476, 8, 9, 99, 514, 6, 27, 8, 54, 80, 93), Stan Stelian (2460, 2, 3, 74—8, 7385, 422, 30, 75, 7, 80, 90, 4—6, 8), Stătescu Vivan (2464—7, 9—78, 83—6, 90—2, 512, 3, 5—22). Steriu Alex. (2492—4, 75—8, 94—7, ;01, 2, 4, 5k 27), Stoica Maria (2460, 2, 74, 92, 4, 7385, 413, 23, 74, 94—6, 507, 27). Soldan Maria (2460, 2, 3, 74, 6, 8, 7422, 76—8, 91, 4—6), Tănăsescu Niculina (2460—3, 509, 10, 25, 6, 41, 3, 4, 7475—8, 91, 4—6, 502, 54, 610, 21), Teodorescu Nicolae (2491, 2, 4, 509, 7347, 75—7, 94—6), Toma Liviu (2492, 4, 509, 10, 23, 6, 7477, 91, 4—7, 502, 54, 5, 608, 10, 9, 23), Vişinescu Vasilescu (2460—2, 74, 6, 7, 7385, 99, 401, 44, 78, 502, 27), cl. X Belea Constantin (7366, 73, 4, 5, 7, 402, 24—6, 37, 42, 52, 4, 76—81, 90, 3—7, 500, 2, 4, 5, 34—8, 53, 4, 6), Copoiu Florin (7423, 5, 8, 30, 7, 8, 42, 52, 77, 9, 80, 2, 90, 4—6, 9, 501—3, 5, 11, 21, 5, 7, 9, 52—5), Georgescu Cecilia (7423—5, 37, 41, 50, 79, 90, 4—7), *Mîndrilă Dumitru* (7423—6, 8, 32, 7, 9, 41, 2, 4, 9, 50—2, 4, 70, 5, 7, 9, 80, 2, 90, 3—9, 501, 2, 5, 9—11), *Orăşanu Laurenţiu* (7325—8, 33—5, 9, 60, 4, 6, 71—9, 98—403, 21—6, 29, 30, 46, 56, 9, 60, 6, 9, 87, 507, 6, 9, 34—8, 51—6, 63—5, 608—10, 2—4, 7—22), Spiridon Maria (7476, 7, 9—82, 90, 1, 3—7, 9, 505), Vasile Rodica (7477, 90, 4—7, 9, 529, 34—6, 8, 610), cl.—XI Mazăre Alex. (7477, 9, 80k 3, 90, 1, 4—7, 9, 500) 2, 4, 5, 9, 10, 3—6, 20, 7, 8), absolventă Moisescu Ana (7323, 4, 30, 94—7, 9, 529, 32, 4—7, 617), *Stan Emil* (7423—30, 2—52. 4—61, 3—70, 4—50, 9—11, 3—20, 5—40, 51—6, 60, 2—75, 8, 81, 3—9, 606—24, 27, 63), Tudor Gheorghe (7430, 7, 47, 50, 2, 64, 77, 9, 83, 90, 5—7, 511, 4, 34, 5, 7, 48, 50, 2). *L.3* cl. X *Spiegel Wilhelmina* (7426, 30, 2, 8, 51, 6, 62, 6, 7, 70, 5—8, 81, 4, 90, 1, 4—5, 7, 8, 501, 2, 4, 9, 14, 27, 9, 34—8, 51, 4—6, 9), *L. 5* cl. X *Nicolae Florea* (7320, 1, 3, 47, 60, 6, 72—8, 82, 5, 7, 97, 8—403. 5, 6, 10, 23—6, 37, 41, 2, 7, 97, 8—403, 5, 6, 10, 23—6, 37, 41, 2, 7, 50, 2), *L. 6* cl. IX Moraru Nicolae (2492, 4, 541, 75—8, 7494—7, 502, 27, 608), cl. X Fetter Liviu (7372, 3, 5, 8, 91, 423—5, 30, 2, 50, 79, 80, 90, 4—9). Mereuţă Doru (7373, 5, 7, 82, 91, 424, 5, 30, 7, 94—6), Stan Constantin (7399, 400, 2, 13, 8, 37—42, 4, 75—9, 20, 4—8, 501—3), cl. XI Nicolae Otilia (7423, 5, 30, 8, 77, 90, 4—6, 9, 505, 29),

PODENII NOI (Ploieşti. *L.* cl. X Olaru Ion (7423—7, 54—7, 9, 80, 2, 90, 4—7).

PODURI (Bacău) *L.* cl. IX Creţa Vasile (7441, 3, 4, 75, 7, 8, 97, 500, 3, 4, 53, 4).

POGOANELE. *L.* cl. X Cazacu Aurel (7560, 612, 4, 7, 8, 20, 39—42, 3, 7, 62).

POIANA MARE (Oltenia). *L.* cl. VIII Neţoiu O0rea (2488—90, 2, 504, 5, 10, 20, 2, 5, 6), cl. IX Caragea Constantin (7360, 72, 4, 82, 5, 91, 8, 400, 5, 4, 18, 24, 32, 50, 1, 3, 74, 6, 7, 9, 84, 90, 3—7, 500—2, 11, 4, 27), Diaconu Ilarion (7360, 72—8, 80—2, 5, 7, 91, 7, 8, 400) 1, 3—5, 7, 10, 7, 22, 4, 5, 32, 42, 9, 50, 74, 8—91, 3—7,9), Olaru Mircea (7430, 7, 42, 4, 76—8, 93—6, 502, 51—4, 6, 509, 10). *Trăistaru Ion* (7372, 6, 80, 1, 5, 400, 1, 4, 13, 6—8, 22—6, 8, 30, 2, 7, 9—45, 7—54, 63, 4, 7, 70, 4, 6, 7, 9, 80, 2, 4, 90, 3—6, 500—2, 5, 7, 9, 11, 4, 25—8), cl. X *Văetiş Petru* (7364, 73, 7—9, 82, 91, 5, 7, 8, 402—4, 6, 7, 23—6, 30, 2, 7, 40—2, 50, 1, 3, 4, 76—9, 90, 1, 3—7, 505).

POLOVRAGI (Oltenia) *Ş.g.* cl. VIII Buşe Maria (2495, 502, 34, 8, 9, 15—7, 9, 202) 2).

POSADA (Ploieşti *S.g.* cl. VIII Vişan Gh. (2467, 74, 5, 82, 9, 93, 5, 8, 9, 503, 12, 3, 5, 8, 7475, 96).

PREDEAL.. *L.* cl. V Naftan Eva Dorina (2489, 90, 504, 20, 2—6), cl. VIII Popa Georgeta (2480—5, 8—92, 4, 5, 500, 1, 3, 9).

PRUNDU BÎRGĂULUI (Cluj). *S.g.* cl. V Gîvan Doina (2450, 3, 64, 5, 7, 79, 80, 3, 95). Ion Liviu (2450, 3, 64, 5, 6, 8, 79—81), Jambor Gh. (2450, 3, 64—6, 8, 79—81), Lupşe Marcel (2450, 3, 64—6, 8, 79—81), Toma Simona (2450, 3, 64—6, 79—81), cl. X Vrîncean Andrei (7423—6, 8, 30, 50, 7, 94—7, 9, 500, 29, 34—8, 52).

PUCHENII MOŞNENI (Ploieşti) *Ş. g.* cl. V Petre Vasile (2464—6, 8, 80—3, 90, 8), cl. VI Chiriţă Georgeta (2465, 7, 8, 81—3, 98, 500—2), Georgescu Gh. (2464, 7, 8, 70, 9, 81—4, 9), Ducu Steliana (2465, 7, 8, 70, 95, 8, 500—2), Paraschiv Elena (2454, 5, 64, 7, 79, 81—4, 9, 98), Paraschiv Marin (2450, 3—6, 64, 5, 7, 8), cl. VII Ion Mihai (2479, 83, 4, 6, 9, 98, 504, 12, 4, 5, 7, 9), Doniţă Maria (2490, 512, 4, 5, 7—20, 4), Stan Vasile (2479—84, 6, 9—92), cl. VIII Petre Maria (2470, 9—84, 90, 1, 501),

PUCIOASA (Ploieşti). *Ş. g.* cl. VI Căprăruş Simina (2450, 2—5, 64—72, 9—85), cl. VIII Vlad Eugenia (2465, 7, 83—5, 8, 90, 1, 4, 5) — *L.* cl. IX Popescu Cornel (2474, 6, 7, 92, 7475—7, 94—6, 507—9), cl. X Cimpoca Gheorghe (7448, 50, 76, 8, 9, 91, 500, 27, 52, 4, 5, 64, 77), Comănoiu Maria (7425, 6, 30, 44, 1, 50, 72, 3, 5, 7, 9, 80), Despa Ion (7400, 2, 23—6, 8, 30, 42, 50, 79, 80, 90, 4—6, 529, 34—7). Rotaru Silvia (7476, 7, 80, 90, 1, 3—6

99, 502, 5, 14, 29, 36—8), absolvent Mărculescu Corneliu (7475, 7, 8, 80, 90, 2, 4—7, 9, 500, 21, 32, 4—81, 6, 9, 610, 7), *Tabacu Ion* (7423—6, 30, 2, 7, 42, 4, 50, 2, 75—81, 90, 1, 4—7, 500, 1, 10, 1, 4, 27, 32, 4—8), *Vasilescu Nicolae* (7548, 65, 6, 9, 71, 4, 4, 80, 5, 90—3, 601, 8—10, 12, 4—23, 31, 4—6, 8—43, 6, 7, 9, 52, 9), Zecheru Gh. (7372, 3, 6—8, 83—5, 91, 8, 403, 24, 75, 7, 9, 80, 3, 6, 7, 90, 4—7).

PUSCUȘI (Ploiești) *Ș. g.* cl—VIII Herea Ion (2464—8, 74—6, 80—5, 8—92, 500, 1, 3—6)

RĂDĂUȚI. *L. 1* Fortună Sorin (7418, 24, 33, 50, 6, 77, 87, 90, 4, 5, 6, 7, 9, 505, 10, 20, 7).

RÎMNICU SĂRAT. *Sg. 1* cl. VIII Rogozeanu Dragoș (2479, 80, 3—5, 9, 64, 5, 7, 73, 6, 7), *L. 1* cl. XI Apostol Dumitru (7364, 6, 72, 3, 5—9, 87, 91, 7, 8, 400, 1, 2, 4, 7), *L. 2.* cl. X Flor Florinel (7423, 4, 5, 77, 9, 80, 91, 4—7, 9, 529, 34, 5), Mocanu Guță (7426, 77—9, 80, 2, 94—500, 2, 11, 36, 7, 42, 52, 4), Pîrvu Ion (7387, 99, 423—6, 77—80, 2, 94——7, 99).

RÎMNICU VÎLCEA. *L. H. Bălcescu*, cl. IX Andrei Nicolae (2474, 5, 7, 8, 93, 4, 509, 7437. 77, 94—6, 507, 53), Bobîlcă Aurel (2460—3, 74, 5, 8, 91, 7437, 75, 7, 94, 6), Brădeanu Florin (2460—3, 74—8, 7437, 77, 94—6), Cerna Gheorghe (2960—3, 74, 6, 92, 4, 7437, 77, 94——6), Cernătescu Gh. (2460—3, 74, 8—7437, 75, 7, 94—6), Iliescu Florea (2460—3, 74—8, 92, 4, 7437, 77, 94—6), Pîslaru Ion (2460—3, 74—8, 92, 4, 7437, 77, 94—6), Rizoiu Mihail (2460——3, 74—8, 92, 4, 7401, 77, 42), Stănescu Constantin (2460—3, 74—6, 92, 4, 7437, 77, 94——6), cl. X Grigorescu Florin (7372, 3, 76, 9, 423—5, 32, 7, 52, 4, 77, 9k 80, 2, 90, 4—9), cl. X : Otărășanu Ion (7359, 64, 72—5, 7—9, 98, 400, 23, 5, 37, 50, 2, 4). Tufiș Ion (7359, 72—5, 7—9, 98, 423, 5, 37, 50, 2, 60), *L. V. Roaită* cl. VI Sbîrnea Gh. (2464—1), cl. VII Ghencea Elisabeta (2429—32, 4, 5, 8—42, 50, 2, 4, 5, 63, 5, 67, 8), Fărcășanu Afrodita (2429—32, 8, 9, 41, 50, 4—5, 64—7, 71), Morăreanu Mihai (2429—32, 4, 8, 40—2, 50—5, 64, 5, 7, 70), Mănăilă Jean (2429—32, 4, 8—42, 50, 30—5, 64, 7), Negoiță Dan (2429—32, 4, 6—9, 41, 2, 50, 30—5, 9, 67, 8, 70, 3), cl. X Marinescu Silvian (7777, 80, 2, 4, 94—7, 9, 9, 514, 29, 36).

RÎU ALB. *Ș. g.* cl. VII Stoica Elena (2450—4, 5, 64, 5, 79, 83, 4, 8), Jubu Gh, (2468, 70, 3, 80, 1, 3, 4, 8, 9), Stoica Viorica (2450, 4, 5, 61, 4, 5, 7, 79, 83, 4, 8).

ROMA. *Ș. g.* cl. VIII Ciobănașu Maria (2450, 3, 5, 60, 1, 4, 71, 4, 8, 81, 3, 4, 8, 90, 4), Chițaru Elena (2450, 3, 61, 4, 72, 4, 5, 78, 84, 9, 94, 2940), Măzăreanu Aurica (2450, 3, 60—2, 4, 73, 4, 8, 1, 3, 40, 9).

ROMAN. *Șc. prof.* cl. I Apăvăloaie Vasile (2452, 4, 5, 61, 4, 71, 2, 5, 8), Chițanu Lucica (2450, 3, 61, 4, 72, 8, 83, 4, 9, 90, 4), Chira Vasile (2450, 2, 3, 61, 2, 4, 5, 7—72, 95), *Ș. g.* cl. VIII Popescu Aurelian (2450, 2, 8, 9, 60—4, 6, 7, 78—3)

ROMÎNEȘTI *Ș. g.* cl. VIII Mirică Gh. (2450, 2—5, 60, 62, 71).

ROȘIORI DE VEDE. *L. 1* cl. IX. Cristea Eugeniu (2463, 76, 92, 4, 7437, 8, 5), 76, 7, 94, 5), *L. 2* cl. IX. Goleșteanu Petre (2460—3, 76—8, 92, 4, 508—10, 7437, 502741,—8, 94—96, 502, 52, 3, 4), cl. X. Popescu Gh. (7328, 5, 97—9, 41—3. 75—8, 94—6), Ciortan Ioana (7372, 3, 5, 7—9, 402, 5, 25, 32, 7, 94, 7, 99), Dîrnă Ion (7372, 3, 75—79, 82, 5, 7, 402, 5, 37), Mateescu Emilian (7372, 8, 9, 82, 5, 7, 8, 423, 5, 32, 7, 53, 95, 536), Tudor Virgil (7424, 5, 9, 34, 6, 7, 8, 52, 3, 90, 5, 6, 7, 9, 537).

RUDARIA *Ș. g.* cl. VIII Dancea Eufemia (2434, 43—8, 50, 4, 5, 61, 3, 4, 71, 4, 5, 7, 78, 84, 90, 4)

SACUL *Ș. g.* cl. VII Radu Dumitru (2479, 80—4, 9).

SALCIA. *Ș. g.* cl. IX Neacșu Ioan (2474—8, 2492, 4, 7399, 437, 42, 77, 90, 4—7).

SATU MARE. *L. 1* cl. X *Noje Georgeta* (7372, 3, 5, 7, 9, 87, 97, 9, 7402, 23, 4, 6, 32, 7, 52, 4, 75—80, 2, 3, 90, 1, 4—9, 7505, 13, 4, 27 Taloș Gh. (7356, 9, 60, 4, 71—8, 82—5, 89, 92, 5, 740), *Ciarnău Dan* (7366, 72, 3, 5, 7, 85, 97, 8, 9, 402, 6, 17, 23—6, 8, 30, 7—9, 41, 7, 50—2, 4, 68, 76, 7, 9, 80, 2, 3, 90, 501, 2, 5, 9, 11, 31, 4, 16, 25, P). *L. 2* cl. IX Telegdy Nicolae (2474, 6, 7, 94, 509, 7385, 6, 91, 5, 97, 502, 54, 6), cl. IX Mureșan Marioara (2475, 92, 4, 7385, 430, 41, 94—7, 7502, 2), *L. 5* cl. VIII Erdei Iudith (2457, 76, 480, 1,3, 5, 8, 90, 4—6). Absolvent Ciarnău N (7395, 7, 402, 23—5, 8, 30, 7, 47, 50, 79, 80, 5, 7, 8, 50, 11, 4)

SEBEȘ. *Ș. g. 1* cl. VII Marcu Dan (2464, 5, 7, 8, 71, 3, 6, 9, 80, 3, 4,).

SEBIȘ. *Ș. g.* Codreanu Nicolae (2437, 76, 7, 92, 4, 7441, 2, 5, 7, 94—6, 7554), cl. IX Bătrîna Lenuța (2474, 6, 8, 92, 4, 7437, 42 m 75, 7, 94—6, 8, 505, 7, 54), Bădău Nicolae (2460——3, 74, 6—8, 7430, 41, 92, 4, 7494—6, 98, 502, 5), cl. IX. Dronca Mircea (2474, 6, 92, 4, 508, 9, 7437, 41, 2, 77, 490, 4—8, 554), Dragoș Gheorghe (2474, 6, 92, 4, 7437, 41, 2, 77, 94, 6, 554), Gurban Florica (2444—6, 9. 60—3, 74, 6, 8, 92, 4, 7437), Molacu Ioan (2461, 2, 73, 7, 92, 4, 7441, 2, 77, 94, 5, 6), Murelan Nicolae (2460, 2, 74, 6, 7, 92, 4, 7430, 7, 44, 94—6, 502, 5), Vrașgyak Petru (2462, 74, 6, 94, 509, 7399, 422, 37, 41, 90, 4, 6, 554), cl. X Bortiș

Trentie (7423—6, 8, 30, 2, 7, 41, 4, 50, 1, 4, 74—82, 90, 4—6, 8, 9, 501, 2, 4, 5, 510, 4, 29, 34—8, 52—6, 65), Tudose Florian (7423—6, 8, 30, 7, 41, 4, 50, 4, 5, 7, 80, 94—7, 9, 501).

SFÎNTUL GHEORGHE. *L. 1.* cl. VIII Horvath Klara) 2460—2, 74, 6, 7, 92, 4).

SIGHIŞOARA. *Ş. g.* cl. VIII Ciopec Rlena (2450, 2—6, 60—3, 2457), *L. 2* cl. IX Borhină Marcel (2460—2, 77, 8, 92, 4, 37, 77, 94, 5).

SIMERIA. Bratu Doina (7355, 6, 8, 9, 60—3, 6, 7, 71—6, 86—9).

SIBIU. *S.g. 1* cl. VIII Droc Mihai (2450—6, 65—8, 70—3, 76, 81—3, 88, 90, 5), Stîngescu Petru (2450—6, 64—76), Ş.g. 3 Bălăşoiu Mircea (2450, 2—55, 58—3), Ş.f. 5 cl. VI, Ionescu Horaţiu (2479, 81—5, 9, 90), S.*g. 8* cl. VI Borcea Ciprian (2450, 2—6, 61, 4—8), *Ş. g. 9* Solomon Ion (2471, 72, 74, 75, 83, 84, 8, 9, 90, 91), Tălmăşeanu Marcel, (2464, 5, 2455, 81, 83, 89, 98), cl. VII Codlea Corina (2455, 7 81, 4), cl. VIII Gîldea Elena (2471, 72, 83, 85, 88, 89, 90, 95, 509), Stănică Adrian (2438, 55, 63, 68, 71, 2, 8, 81, 3, 8, 9, 490—2), *Ş.g. 12* cl. VIII Bejan Radu (2465, 7, 8, 71, 2, 81—5, 8, 90—2), *Ş.g. 15* cl. VIII Bălaşa Adriana (2450, 65, 72, 81, 3—5, 9, 90), Borcaş Adriana (2450, 54, 55, 62, 71, 72, 83, 4, 8, 9, 90, 503, 4), cl. VIII Frum Dorina (2450, 55, 62, 71, 72, 83, 4, 8, 9, 90), cl. VI Gehl Liane (2452—5, 82, 4, 9, 98), Ionescu Laura (2452—5, 83, 4, 9, 98), Marcu Sergiu (2452—5, 83, 4, 9, 98). Müller Suzana (2452—5, 83, 4, 9, 98), Wultschner Ingrid (2452, 55, 80, 83, 4, 9, 98), cl. VII Hempert Gunde (2453—5, 64, 5, 83, 4, 9), Keokner Gudrun (2453—5, 65, 80, 3, 4, 9), Zank Gherhart (2453—5, 65, 70, 71, 83, 84, 89), cl. VIII Moţ Magdalena (2465, 7, 71, 2, 4, 5, 8, 91), Gligor Victor — 2471, 7, 8, 81, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 90, 1, 2), Moldovan Dan (2465—8, 70, 1, 2, 7, 9, 80, 1, 3, 7, 90), Sasu Rodica (2450, 2, 3, 4, 5, 65, 71, 90), Untaru Rodica (2450, 2, 60, 4, 5, 79, 81, 3, 4, 5, 6, 90), *L. 2* cl. IX Filip Nicolae (2430, 60, 61, 62, 74, 5, 8, 92, 3, 4, 5, 6, 509, 10. 59), Marin Vasile (2460, 2, 74, 6, 8, 93, 4, 2500, 9, 7430, 430, 95, 6, 75, 554), cl. IX Munteanu Nistor (2460, 2, 74, 6, 8, 92, 4, 6, 509, 10, 7495, 554) Munteanu Ion (2460, 2, 74, 6, 8, 92, 4, 509, 10, 7430, 94, 5, 6, 7554), cl. X Nicula Vasile (7366, 6, 72—5, 7—81, 98—400, 1, 2, 5, 7423, 6, 37—8, 44, 8, 50, 4), Sasu Ioan (7372, 3, 5, 7, 82, 5, 7, 98, 9, 402, 4, 9, 7400).

SÎNNICOLAUL MARE cl. IX Popescu Doina (2444, 5, 6, 7, 49, 60, 2, 3, 74, 5, 6, 7, 8, 7, 437).

SIGHETUL MARMAŢIEI. cl. XI Balaskö Balasz (7372—9, 81, 4, 7424, 25, 6, 30, 7, 49, 50, 1, 509).

SLATINA *L. T. Vladimirescu* cl. IX Drăghici Ion (2461—3, 71, 2—4, 5, 8, 89, 90, 12, 2, 4, 7379. 99, 423, 4, 5, 6, 30, 75, 76, 90, 94, 5, 68), *Voinea Vasile* (7399, 418, 23, 4, 5, 30, 7, 8, 44, 8, 75, 6, 7, 8, 80, 90, 4, 5. 6, 7, 8, 500, 27, 2450, 63, 71, 2, 4, 5, 6, 78, 83, 8, 90, 1, 2, 4), *L. 2* cl. X *Stăneascu Ştefan* (7364, 71—8, 82, 5, 7, 92, 5, 7, 8, 9, 400, 2, 3, 4, 5, 8, 23, 4, 5, 6, 8, 32, 7, 8, 9, 41, 2, 3, 7, 9, 50, 1, 2, 4, 70).

STEJARU *Ş.g.* Dorobanţu Ştefan (2453, 4, 5, 63, 4, 5, 6, 7, 70, 84).

SUCEAVA. c. X Olaru Radu (7423, 4, 5, 6, 30, 7, 42, 4, 8, 9, 50, 52, 4, 67, 7476, 7, 8, 9, 90, 1, 4—90, 1, 3, 4, 5, 96, 7, 9, 500, 2, 5, 10, 14, 28). Filipescu Gh. (7405, 23, 5, 7, 42, 4, 8, 50, 2, 4, 64, 76, 9, 80—3, 90, 1, 6, 8, 9, 501, 2, 5, 11).

SOMCUŢA MARE cl. IX Waiga Liviu (2461, 3, 74, 6, 7, 8, 92, 4, 7385, 630, 7, 42, 4, 75, 8, 91, 4—6), Buda Dan (2460, 2, 3, 74, 6, 92, 4, 6, 92, 4, 509, 7385, 97, 430, 37, 42, 75, 77, 94, 95).

TG. CĂRBUNEŞTI. *L.* cl. IX (2460, 1, 2, 3, 74, 7, 92, 3, 9, 7444, 75, 6, 95, 7502, 27).

TECUCI. *L. 2* cl. X Anghel Viorel (7423—5, 30, 7, 77, 94—7, 7529, 34, 5, 6, 8), cl. VIII Taşcă Eugenia (2450, 68, 71, 2, 80, 3, 5, 8, 90, 5.

NICOREŞTI (TECUCI). cl. VII Oprea Dorin (2450, 2—5, 61, 5, 7).

TELEGA. cl. VIII Palada Valerica (2432, 4, 8, 9, 41, 5, 2, 7, 50, 4, 60, 1, 2, 3).

TIMIŞOARA. *Ş.g.* 10 cl. VII Goldstein Gavril (2452, 54, 5, 64, 67, 68—71, 73)., S. g. 16 cl. VII Dobra Rodica (2452, 3, 4, 5, 61, 4, 5, 7, 73), *L. 1* cl. VII Ispas Emil (2450, 3, 4, 67, 8, 81, 3, 4, 95, 7), Negruţiu Mircea (2450, 2, 3, 6, 61, 4, 5, 7, 8, 70, 3), Topan Angela (2465, 70, 7, 9, 80, 1, 4, 90), Titulea Constantin (2450, 3, 4, 67, 8, 81, 3, 4, 9, 97), *L. 2* cl. V Ion Raţiu (2450—3, 64—7), cl. VIII Mujescu Liliana (2453, 72, 4, 81, 3, 4, 8—90, 4), Mirea Mihaela (2464, 7, 71, 2, 81, 3, 4, 8—92), Răduş Adrian (2464, 5, 7, 71, 2, 80, 1, 3, 8, 92), cl. IX Toader Elmar (2475, 5, 8, 94, 4, 5, 7494, 6, 508, 9, 7477, 80), Poleanţi Alina (2461, 3, 76, 94, 509, 7364, 409, 23, 28, 30, 95, 6), Gavrilă Emilia (2460—3, 74—8, 92, 4, 7494, 6, 7398), Diana Ciuhandu (2461—3, 74, 5, 8, 92, 4, 7477, 94—6), Fülöp Alexandru (2474, 7, 8, 91, 2, 4, 508, 9, 7494, 5, 6, 7502, 54), Gross Gabriel (2474, 509, 10, 7494, 5, 501, 2, 7475, 8, 96 550, 2, 4), Lipp Gerhart (2474—7, 8, 92, 4, 742, 75—7, 94—6, 7502). Bach Gerda (2460, 2, 74, 6, 8, 90, 2, 4, 7385, 476, 95, 7497). *L.7* cl. VI Sădean Sorin (2452, 3, 6, 64—70, 84), cl. X. Păcurariu Caius 7371—79, 87, 91, 5, 7, 8, 402—5, 7, 8, 13, 18).

TINCA cl. X Boroş Iuliu (7375, 7, 9, 82, 5, 423—8, 52, 80).

TÎRGOVIŞTE. *L. 1* cl. VI Andrei Tania (2450, 2—6, 64—8, 70, 80, 4), cl. VIII Stan Traian (2464, 5, 8, 71, 2, 4, 7, 80, 1—5, 88—95, 7—501, 3, 8, 9, 7495, 7), cl. X. Frăţiloiu Nicolae (7366, 73—7, 8, 9, 85, 91, 403, 6, 23—8, 30), cl. X Stan Nicolae (7423—6, 30, 50, 75, 7, 80, 90, 4—6, 9, 529, 34, 5—8, 52, 5). *L. 2* cl. VII Georgescu I. Ion — 2467, 73, 80, 3, 5, 9, 95, 9), cl. X Florea Ion (7437, 41, 50, 2, 4, 70, 7, 80, 90, 94—7, 9, 525, 34—8, 7555). cl. XI Pîrvu Constantin (7441, 52, 64, 5, 83, 90, 4—6, 9, 50, 14, 20, 35, 6).

TÎRNĂVENI. *S.g.* 1 cl. VIII Gruia Doina (2450 m 2—5, 61, 2, 73, 4, 6), L. 1 cl. IX Chincisan Dumitru (2460, 1, 2, 76—8, 94, 7385, 79, 494—6).

TÎRGU JIU. cl. VIII *Ş.g. 3.* Utrică Mioara (2450, 1—6, 61—3, 65, 7, 8, 70—2), *L. 1* cl. XI *Bratu Traian* (73,28, 59, 60, 2, 4, 9, 72—7, 80, 2, 5, 7, 9, 90, 4—9, 401, 2—4, 409, 10, 15, 16, 23—26, 30, 7, 8).

TÎRGU MUREŞ. *Ş.g. 2* cl. VI Székely Zoltan (2453, 4, 65, 6, 70, 81, 4, 9), *L. 1* Vamoş Călin cl. V 2451, 3, 5, 64, 81, 3, 4, 9), cl. VII Dragotă Adrian (2456, 65, 6, 8, 70, 1, 2, 80, 1), cl. IX *Coman Silviu* (2460—3, 74, 6, 8, 92, 4, 7364, 6, 78, 82, 5, 97, 8, 9, 400, 02, 04, 05, 13, 37, 38, 75—8, 94—6), cl. X *Pop Horia* (2460—3, 7408, 7364, 6, 71, 3, 5—9, 82, 5, 7, 95, 7, 8—405, 13, 18, 22, 30, 7, 8), L. băieţi cl. VIII Ceontea Dan (2452, 4, 5, 62, 5, 83, 4, 5, 90, 5, 503, 05, 06).

TITEŞTI. *Ş.g.* 1 cl. VI Bărăgan Doina (2451, 4—6, 67, 70, 83, 46), Dobrin C. Constantin (2450, 3, 65, 6, 8, 70, 9—82, 4, 91), cl. VIII Achim Gheorghe (2465, 8, 71, 2, 80, 3—5, 9, 90).

TRUSEŞTI. *L.* cl. VIII Michiu Doina (2479, 80—5, 8, 9—95, 8, 9, 503, 4, 6, 9), cl. IX Muraru Valeria (2461—3, 74, 5, 7, 8, 92, 4, 73, 97, 73, 98, 9, 401, 37, 8, 41, 2, 94, 5, 6, 502), cl. X Andriescu Mihai (7364, 72—9, 85, 97—403, 408), *Corduneanu Dumitru* (7364, 6, 71, 2, 6, 8, 91, 7—401, 3, 8, 22—6, 30, 2, 7—9, 42, 4, 5, 8—50, 2—4, 75—77, 9, 80, 90, 501, 14, 16, 27), Damian Gelu)7379, 91, 8, 9—401, 18, 23—5, 30, 7, 49, 50, 2, 4, 77, 94, 5, 6, 7, 502). Feliu Aurel (7364, 72—5, 7, 9, 91, 7—9, 400—3, 18, 23—5, 37. 41, 2, 50, 2, 4), *Livadaru Emil* (7364, 74, 68, 91, 9, 413, 18, 30, 8, 9, 418, 2, 5, 50, 2, 64, 75, 6—7, 9—83, 90, 1, 4, 5, 6, 9, 501, 2, 5, 10, 11, 14, 16, 27). *Roşu Mircea* (7364, 6, 72, 4, 6, 8, 91, 8, 9—403, 23—5, 30, 7—9, 41, 2, 8, 50, 2, 4, 75—5, 80, 90, 1, 4—7, 9, 500—5, 14). Ştefan Nicolae (7372—9, 85, 91, 7, 9, 402, 3, 23—5, 437, 41, 50, 2, 4, 77, 90, 1, 4, 5—7, 99, 500, 5).

TURNU MĂGURELE. *Ş.g. 1* Geodoiu Victoria cl. VIII 2450, 4, 5, 60, 74, 88, 90—3, 8), *L. Unirea* cl. IX Mitruş Dan (2460—2, 92, 4, 509 476, 7399, 502, 553, 4, 6).

TURNU SEVERIN. *Ş.g. 1* cl. VIII Bîcu Mircea 2450, 3—5, 61, 2, 4, 5, 8, 71—3, 5, 8, 81, 3, 4, 90, 1), Burcea Vasilica (2450, 3, 4, 64, 8, 81, 8, 9, 81, 3, 4, 90, 5, 8), Căplescu Julieta (2479—84, 9, 90—2), Grecu Doina (2450, 3, 64, 5, 8, 71, 2, 8, 81, 3, 4, 90, 1, 5, 8, 2509), Crăineanu Elena (2450, 64, 71, 2, 8, 81, 3, 9, 90, 1, 5, 8, 2509), Marghescu Georgeta (2450, 4, 64, 71, 2, 8, 81, 3, 9, 90, 5, 8, 2509) Sauer Marilic (2450, 64, 5, 8, 83, 4, 90, 5, 8, 503, 509), Sîrbulescu Ion (2450, 3—5, 61, 2, 4, 5, 8, 70—3, 5, 8, 81, 3, 4, 90, 1, 509), *L. 1* cl. X *Popescu Constantin* (7356—60, 2, 4, 6, 7, 71, 80, 2, 5, 7, 8, 91, 402, 3, 23—6, 28, 30, 2, 37, 8, 41, 2, 4, 5, 48—52, 54).

URLAŢI. cl. VIII Dăncescu Gabriela (2450, 2—6, 60—2, 65, 71—4), cl. X Vasile Ion (7372, 3, 6, 8, 83—5, 91, 8, 400, 2, 3, 5, 13, 22, 308, 30, 32, 7, 42, 7, 50, 2, 4, 79, 80, 2, 3. 91, 4—7, 9, 505. 14).

VALEA LUI MIHAI *L.* cl. XI Ioan Vesa (7359, 60, 2, 4, 9, 72—5, 7, 9, 81—6, 9—91, 8, 412, 3, 21, 21—8, 30, 2, 42, 4, 9, 50, 2, 4, 59, 60, 5—9, 74).

VALEA STANCIULUI *Ş.g.* cl. IX Cizmaru Cecilia (7454, 64, 5, 76, 7, 83, 5, 9, 93, 505, 29, 34—8).

VASLUI. *S. M. Kogălniceanu,* cl. VIII Mănescu Mariana (2450, 2, 4, 5, 60, 2, 71, 4, 8, 80, 3, 9, 95, 503, 9).

VÂLENI. *Ş.g.* cl. VII *Zălinescu Constantin* (2450—5, 60—8, 70—5, 7—85, 88—92, 94, 7426, 30, 41, 77, 90, 94—7).

VIDRA. *Ş.g.* cl. X Ciocan Nică (7377, 423 ,4, 30, 75, 7, 9, 50, 1, 4, 5, 6—9, 505, 11, 36, 37).

VIŞEU. cl. IX Stoica Ioan (7369, 76, 413, 26, 7, 9, 33, 5, 42, 52, 9, 6, 76—80, 2, 3, 7, 90, 4—7, 9, 500).

VRATA. *Ş.g.* cl. VII Băcanu Gh. (2450, 2—5, 64, 5, 7, 8, 76).

VULCAN. *Ş.g.* cl. VI Timiş Viorica (2454, 5, 64, 7, 70, 9, 83, 4, 9).

ZALĂU *L. 1* cl. X Lungu Ioan (7371, 2, 8, 82, 5, 91, 408, 23—6, 8, 30, 47, 50, 2, 4), Szöcs Coloman (7374, 99, 400, 23, 5, 52, 77, 82, 90, 2, 5—7, 99, 510).

ZARAND. *Ş.g.* cl. VIII Tamaş Gh. (2453, 5, 62, 8, 71, 2, 4, 8, 83, 4, 9).

ZIMNICEA. *Ş.g.* cl. IX Pena Vasile (2460—2, 76, 7, 8, 508, 7399, 437, 8, 41—4).

Rezolvitorii de probleme care au fost anunţaţi cu peste 180 probleme rezolvate în G. M.— B Nr. 1—12/1966 sînt rugaţi să trimită fişa cu totalizarea problemelor în vederea clasificării pe anul 1966 şi evidenţierii rezolvitorilor.

Pînă la 15 august 1966 s-au mai primit soluții bune de la.

ABRUD (Cluj). *L.1* cl. XI Bolunduț Ioan (7423. 5, 9, 33, 7, 41, 90, 4—7, 9, 500).

ADAMCLISI (Dobrogea). *L. 1* cl. VIII Ion Ion (E : 2468, 72, 91, 509, 13, 5—7, 9, 22*).

ADJUD (Bacău). *S.g. 1* cl. VII Popescu Anișoara (2479, 80, 2—5, 8—92, 4), S. g. 2 cl. VIII Vraciu Mihaella (2465, 7, 8, 71, 2, 4, 6, 80, 1, 3, 4, 8—92).

AGNITA *L. 1* cl. VIII Ceangă Mircea (2483, 9, 90, 512, 3, 5, 7—9).

AIUD (Cluj) *S.g. 1* cl.VIII Maftei Doina (2466, 71—2, 6, 80, 1), Popa E.Marian (2465—77).

ALBA IULIA *L. 1* cl. X Mircea Magda (7423—6, 37, 50, 2, 77—80, 90, 1, 4—6, 9, 502, 34—7, 52, 4, 93, 610, 12, 8, 21, 3), Oarga Gh. (7430, 42, 4, 9, 52, 4, 76—82, 90).

ALEXANDRIA *L. 1* cl. XI Lungu Gh. (7423—6, 30, 2, 52, 79, 529, 34—8, 60).

ANINA, *L. 1* cl. VII Albu Livius (2464—73).

ARAD. *S.g. 1* cl. VIII Miclăuș Călin (2480, 3—5, 8, 9, 94, 5, 9, 600, 3, 5, 8, 9, 12, 3—6, 8—25), *L. 1* cl. IX Boșcaiu Voicu (7423, 30, 42, 50, 75—9, 90—2, 4, 5, 7, 500, 5, 25, 6, 7), Pătru Ionel (2477, 92, 4 ; 7437, 8, 41, 2, 78, 90—3, 500, 2), cl. X *Balla Ion* (7427, 33, 43, 51, 6, 65, 75—80, 2, 3, 9—91, 3—6, 9, 600—2, 4, 5, 9, 11, 7, 9, 25—7, 50, 2, 5). *L. 4.* cl. IX Francz Adalbert (2474—8, 92, 4 ; 7437, 94—7, 500, 2, 8), *Gr. șc. U.V.A.* an I Oroș Dorin (2464, 8, 71—7, 8, 82—4, 9—92).

AVRIG. *L. 1* cl. XI Popica Elena (7477, 86, 7, 90, 4, 6, 9, 507, 11, 37, 55).

BACAU. Absolventă Dobrovici Maria (7423—5, 485, 520, 529, 34—7, 67, 74), *S.g. 5* cl. V Cristea Dan (2479—81, 3, 95, 7, 512—6), Luca Mircea (2464—7, 79—81, 95), cl. VIII Munteanu Radu (2465, 8, cl. VII Andreache Gabriela (2469, 73, 80—4, 8, 9). Cociorvei Victor (2454—1, 3—5, 7, 42), *S. L.* 8, *L. 1* cl. IX Geaorgescu Aurelian (2474, 6, 8, 92, 4, 508—10 ; 7477, 94—6, 7, 70, 1, 80—5, 8, 91)Fredy (2474—8, 92, 4 ; 7430 ; 7, 42, 4, 54), Knoll Raul (2474—8, 82, 4 ; 7430, 7, 42, 4, 54, 95, 6), cl. X Tarălungă Lucian (7423—6, 37, 41, 9, 50, 2, 4, 75—7, 9, 81, 3 95—7), 9, 502—5), *L. 4* cl. VIII Olteanu Mirela (2474—8, 92, 4, 509, 24, 40—3), cl. IX Filimon Liviu (2474—6, 8, 92, 4 ; 7437, 8, 41, 4, 502, 5).

BAIA MARE. *S. g. 1* cl. VIII Fried Livia (2464—9, 71—4, 6, 8, 90—2), *S.g. 3* cl. VI Pop Felicia (2464, 5, 7, 70, 80—4, 9), cl. VII Buga Adriana (2464, 80, 4, 7, 9, 517, 9, 35), Frödlich Iosif (2464—72), Jorza Gh. (2480, 1, 3, 4, 9, 515, 26, 35), *S.g. 20* cl. VII Dragomir Gh. (2464, 71, 80, 2, 91, 5, 7, 9—501, 15, 7), cl. VIII *Buteanu Aurealia* (2464—8, 71, 2, 6, 8, 82—5, 7, 8, 510, 2, 3, 5—9 ; 7494, 505, 80), *L. 1* cl. X *Trif Ioan* (7453, 4, 76, 8, 80, 93, 402, 4, 5, 7, 9—11, 4, 6, 21, 5—7, 35—8, 41, 2, 4, 8, 500, 2—5, 62, 3, 8, 80, 99, 609, 12, 4) Cl XI. *Apșan Dan* (7374, 99, 401, 3, 8, 23, 5, 30, 9, 94, 69, 75—83, 90, 3, 5, 7, 500—5, 9, 10, 2—4, 6, 9—21, 5—9, 34—8, 42, 3, 50—8, 60, 6, P, N).

BALȘ (Oltenia) *S. g.* Popescu Geta (2464—7, 860, 70, 2, 7).

BABENI. *L. 1* cl. X. Grigore Alexandru (7423, 5, 6, 8, 32, 7, 48, 50, 70, 7—9, 82, 90, 1, 1—6, 9, 509, 11, 29, 34—8, 54, 6, 65)

BAICOI (Ploiești). Absolvent Statescu Stere (7489, 90, 4—6, 9, 514, 20, 34, 6, 7, 48, 54, 80, 8, 608, 10, 5, 21), *L. 1* cl. X Donea Aurora (7423—5, 30, 3, 50, 529, 34—7, 52, 617, 21), lc .XI Mociorniță Anișoara (7437, 8, 41, 2, 4, 52, 64, 77, 8, 80, 2, 4, 9, 90, 4—7)..

BECHET ((Oltenia) *L. 1* cl. X Cojocaru Ion (7423, 4, 6, 8, 30, 2, 7—9, 41—3, 6—52, 4, 63, 4, 75—80, 3, 93—5, 7, 502, 7, 8, 511, 3, 4), *Popa Ion* (7423, 5, 6, 8, 20, 2, 7—54, 61—4, 7, 8, 70, 4—84, 90—7, 9—502, 4, 5, 7—11, 3, 4, 9—21, 3, 5—8).

fila 14

BEIUȘ (Crișana) *L. 1* cl. VIII Zare Viorica (2466, 7, 9, 71, 2, 5, 6, 8, 90),

BISTRIȚA (Cluj) *S. g. 3* cl. VIII Nicoară Radu (2465, 72, 4, 83, 5, 8—90, 4,), *L. 1* cl. V4III Petruțiu Gabriela (2464, 7, 70—2, 4, 5, 7), cl. IX Drăgan Viorica (2474—7, 92, 4 ; 747, 1, 2, 77, 94—7, 502 Fetti Adrian (2464—72, 9), Spiridon Lucia (2474—8, 94, 509 ;4 730 ; 73 42, 94, 5), Timofte Corneliu (15010, 24, 6 ; 7425, 8, 38, 514, 27, 9, 36—8, 55, 6, 80, 610, 21), cl. X Gagea Alexandru (7372, 5, 7, 91, 3, 426, 8, 30, 2, 7, 8, 41, 2, 4, 50, 2, 4, 75—80, 90, 1, 3—7, 9—503, 5,9, 28), cl. XI Cotoc Ioan (7476—80, 90, 1, 3, 5—7, 9, 502, 4), L. 2 cl. X Mreneș Teodor (7423, 5, 6, 8, 30, 2, 7, 41—3, 5, 8, 50, 2, 4, 70).

BIREA (Oltenia) *L. 1* cl. IX Popa Ștefan (2475, 7, 509, 10 ; 7438, 41, 3, 4, 75, 91, 552—4, 8), Proca Ștefan (2474, 5, 8, 94, 509 ; 7437, 8, 77, 94—6, 527, 52).

BÎRLAD. *L. 2* cl. VIII Grosman Rollanda (2483, 4, 7, 9, 90, 8, 503, 17—9). cl. IX Trifoi Doru (2476, 8, 92, 4, 508, 9 ; 7437, 8, 441, 76, 402, 52), *L. 3* l. IX Duda Doina (2474—6, 8, 92, 4, 509 ; 7437, 75, 7, 94—6, 502), *L. Gh. Gh. Dej* cl. IX Roescu Luiza (2474—6, 8, 94 ; 7437, 41, 75—8, 91, 4—7, 502, 3).

BOCȘA (Banat) *L. 1* cl. VIII Wild Iohana (2474, 5, 7, 92, 4 ; 7437, 94, 6), Cionvica Dore (7423—6, 8, 30, 2, 7, 43, 7, 8, 50, 2, 75, 7).

---

* *Evidențiații sînt scriși cu litere cursive.*

NOV 76

CĂTRE REZOLVITORII DE PROBLEME

Rezolvînd probleme pregătiţi şi Olimpiada matematică 1967.

Corespondenţii care ne trimit probleme rezolvate trebuie să redacteze fiecare problemă separat, însoţind-o de toate calculele necesare şi de figuri desenate cu îngrijire.

Nu se vor trimite soluţiile mai multor probleme pe aceeaşi foaie.

Evidenţiaţii trebuie să aibă cel puţin 30—40 soluţii bune.

Problemele care se propun de către colaboratorii revistei să fie clar alcătuite şi însoţite de soluţii, să fie personale iar nu luate din cărţi şi reviste. Elevii sînt sfătuiţi să înceapă a propune probleme numai după ce au rezolvat un număr destul de mare de exerciţii şi probleme. Problemele propuse, dar necorespunzătoare, nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse au fost publicate în cărţi sau reviste, este rugat să arate precis volumul şi pagina unde a mai apărut enunţul sau soluţia problemei respective.

Solicităm probleme interesante legate de practică.

— Problemele propuse urmînd a fi publicate ţinînd seama de predarea la clasă a materiei respective, autorii lor sînt rugaţi să trimită problemele din vreme însoţite de una sau mai multe soluţii îngrijit scrise precum şi observaţii, discuţii sau uneori generalizări, arătînd şi modul cum au fost stabilite.

— Problemele propuse (P), *note matematice* (N), *articole* (A), *materiale privind cercurile de elevi* (C), *se vor trimite redacţiei* G.M.-B. *de preferat într-un plic separat de problemele rezolvate.*

Corespondentul nostru care a citit şi a înţeles deplin multe din soluţiile publicate, a rezolvat multe din problemele propuse, poate şi este îndemnat să încerce să schiţeze cîte o notă rezultată dintr-o observaţie făcută cu ocazia rezolvării unei chestiuni mai grele. Aceste note să fie *revăzut de mai multe ori înainte de a fi trimise*, pentru ca redactarea lor să fie *cît mai clară şi concisă*. Figurile să fie făcute separat. În redactare se vor evita prescurtările

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

La publicarea problemelor rezolvate se vor menţiona rezolvitorii care au dat o bună redactare şi o soluţie interesantă sau mai multe metode de rezolvare.

Elevii claselor a IX-a pot trimite soluţii şi la problemele propuse pentru clasa VIII-a. Problemele rezolvate trebuie să fie din ultimile trei numere apărute în G.M.B. *Problemele rezolvate*, vor fi expediate în cursul unei luni şi vor fi însoţite de un borderou cu numărul problemelor, scrise în ordinea crescîndă. Pe plic se va scrie şcoala, clasa şi localitatea rezolvitorului. Problemele propuse vor fi separate, corect rezolvate şi citeţ semnate. Desenele să fie făcute îngrijit pe foi separate.

Elevii claselor V—VIII vor fi anunţaţi în rubrica rezolvitorilor de probleme dacă trimit odată cel puţin 8 probleme bine rezolvate, iar elevii claselor IX—XI, pentru cel puţin 12 probleme bine rezolvate.

Orice elev poate trimite soluţii şi la probelme din clasa precedentă.

Autorii sînt rugaţi să semneze clar la sfîrşitul lucrării personale pe care o trimit pentru publicat şi să dea adresa lor exactă.

ERATĂ — La pag. 444 rîndul 3 şi 6 de sus, în loc de $<$ se va scrie $\geqslant$

— La pag. 445 rîndul 7 şi 4 de jos se schimbă sensul inegalităţii.

— La problema E: 2561 în loc de 6600 se va scrie 600

— La problema E: 2563 în loc de 7/2 se va scrie 2/7.

— La problema E: 2583 în loc de 7 se va scrie 0,7.

În vederea clasificării rezolvitorilor de probleme şi premierea celor mai distinşi, rugăm pe fiecare rezolvitor care în nr. 1—12 din G. M.-B, 1966 a fost anunţat cu peste 180 rezolvări, să trimită redacţiei imediat după apariţia n-rului 12, o fişă cu totalizarea problemelor anunţate.

Liceele care doresc să participe la întrecere pe anul 1966 privind activitatea şcolară la matematică, sînt invitaţi să trimită pînă la 31. XII. 1966, fişa cu punctajul obţinut după modelul publicat în acest scop în G. M.-B. pag. 118, nr. 3 din martie 1966.

Şcolile generale de 8 ani pot trimite pînă la 31. XII. 1966, fişa după modelul publicat în G. M.-B, nr. 3 pag 118, răspunzînd numai la punctele a, b, c, d. g. din regulament, indicînd şi numărul de clase VI, VII, şi VIII pe care le-a avut şcoala în anul 1965—1966.

Tirajul fiind limitat. gazetele se trimit mai întîi abonaţilor şi de aceea rugăm colaboratorii noştri să se aboneze de îndată. Preţul este de 2 lei exemplarul.

Abonamentele se pot face prin oficiile poştale locale.

I. P. Informaţia" — c. 3916

INDEX 14601

Lei 2

E 1426

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE
DIN REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA

GAZETA MATEMATICĂ

SERIA B

PUBLICAȚIE LUNARA PENTRU TINERET

Anul XVII — decembrie 1966

12

GAZETA MATEMATICĂ
SERIA B
Anul XVII, nr. 12 — decembrie 1966

SUMARUL

	Pag.
1. Aplicaţii ale programării liniare în agricultură de *I. Stamate* şi *N. Ducaru*, Cluj	529
2. Note matematice de *C. Ionescu-Ţiu, Dan Voiculescu*	534
3. Probleme rezolvate (7211, 7215, 7257, 7260, 7289, 7292, E : 2405, 2406, 2407, 2408)	536
4. Chestiuni de examen (7860—7872)	541
5. Probleme propuse (7873—7901)	544
6. Exerciţii şi probleme propuse pentru clasele V—VIII (E: 2613—2630)	550
7. Cărţi noi	552
8. Rubrica rezolvitorilor de probleme	553
9. Tabla de materii a G. M.-B. pe 1966	573

ANUL XVII 12 decembrie

COMITETUL DE REDACŢIE

Dincă N., profesor; *Grosu A.*, profesoară; *Ionescu-Bujor C.*, prof. univ. emerit; *Ionescu-Ţiu C.*, profesor, redactor şef adjunct; *Kiss E.*, conf. univ. (Cluj); *Kovacs K.*, conf. univ. (Cluj); *Muşat I.*, profesor; *Ottescu C.*, profesor; *Păvăluţu M.*, profesor; *Sacter O.*, conf. univ., redactor şef; *Simionescu Gh.*, conf. univ.; *Ţene L.*, profesoară şi *Voinea R.*, prof. univ.

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 14.46.53 — Bucureşti

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică a şcolilor, precum şi orice material informativ se vor trimite pe adresa de mai sus.

GAZETA MATEMATICA

SERIA B

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XVII nr. 12 decembrie 1966

MŰSZAKI KÖNYVTÁR 1883

APLICAȚII ALE PROGRAMĂRII LINIARE ÎN AGRICULTURĂ

I. Stamate și *N. Ducaru* (Institutul Agronomic din Cluj)

Teoria programărilor liniare este bine evidențiată în literatura matematică. Vom evidenția cîteva exemple din agricultură.

1. *Rețeta de nutriție în zootehnie.* Să presupunem că trebuie să se întocmească rația optimă pentru îngrășarea porcilor care au greutatea între 50—60 kg. Sporul zilnic pe cap de porc să fie de 400—500 g. Pentru realizarea acestui spor este necesar să existe în rație cel puțin 2,5 unități nutritive și 240 g albumină digestibilă. Pentru simplificarea calculelor se presupune că rația se compune numai din furaje concentrate : turte de floarea soarelui (șroturi) și porumb boabe. Un kg de turte conține o unitate nutritivă și 400 g albumină digestibilă, iar 1 kg de porumb boabe conține 1,25 unități nutritive și 80 g albumină digestibilă. Prețul unui kg de turte este 1,30 lei, iar al unui kg de porumb boabe de 1,60 lei.

Să se calculeze cum trebuie compusă rația pentru ca prețul să fie minim.

Soluție. Dacă notăm cu x cantitatea de turte și cu y cea de porumb care intră în rație, condițiile problemei conduc la următorul sistem de inegalități liniare

$$x + 1{,}25y \geqslant 2{,}5\,;\quad 400x + 80y \geqslant 240\,; \tag{1}$$

$$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \tag{2}$$

și la o funcție de eficiență tot liniară

$$f(x,\ y) = 1{,}30x + 1{,}60y \tag{3}$$

căreia trebuie să-i determinăm minimul.

Inegalitățile (1) exprimă că rația zilnică conține cel puțin 2,5 unități nutritive și cel puțin 240 g albumină digestibilă, provenite din cantitățile de turte și porumb boabe care intră în rație, iar funcția (3) exprimă prețul de cost al rației.

Atașăm formei de mai sus sistemul de ecuații, provenite din (1) după simplificarea lor

$$(D_1)\quad 4x + 5y - 10 = 0, \qquad (D_2)\quad 5x + y - 3 = 0,$$

și

$$(\Delta_0)\quad 1{,}3x + 1{,}6y = 0$$

al căror grafic este dat în fig. 1.

Dreptele împart planul în 4 regiuni în care avem semnele

	I	II	III	IV
D_1	+	+	−	−
D^0	+	−	+	−

Regiunea soluţiilor, adică a punctelor $P(x, y)$ care satisfac (1) şi (2) este cea haşurată. Dreptele (D_1) şi (D_2) se intersectează în punctul $A\left(\frac{5}{21}, \frac{38}{21}\right)$. Valoarea minimă a funcţiei de eficienţă (3) se obţine pentru acele puncte din domeniul haşurat care realizează minimul distanţei pînă la (Δ_0). Se găseşte că punctul A satisface această condiţie.

Funcţia $f(x, y)$ pentru $x = \frac{5}{21}$ şi $y = \frac{38}{21}$ ia valoarea

$$1{,}3 \cdot \frac{5}{21} + 1{,}6 \cdot \frac{38}{21} = \frac{67{,}3}{21} = 3{,}20$$

Rezultă că raţia cu preţul de cost minim va trebui să conţină $\frac{5}{21}$ kg de turte şi $\frac{38}{21}$ kg de porumb boabe, costul ei fiind 3,20 lei.

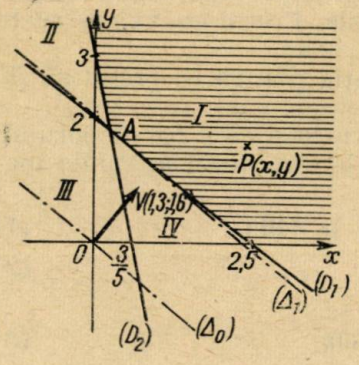


Fig. 1

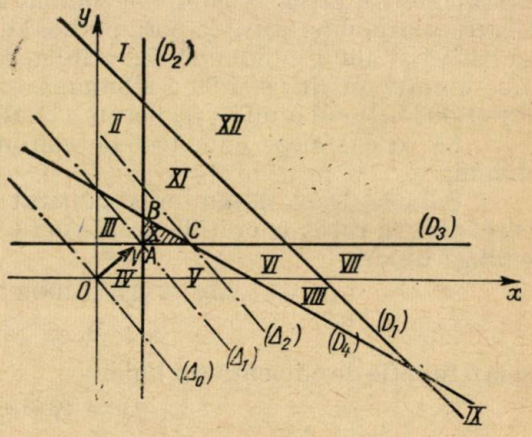


Fig. 2

2. *Problema de repartiţie a culturilor.* O cooperativă agricolă de producţie dispune de 1 000 ha teren arabil destinat culturilor de grîu şi porumb şi de un fond de rulment de 400 000 lei. Planul prevede să obţină cel puţin 400 t grîu şi 350 t porumb. Presupunem că producţia medie la hectar este de 1 800 kg /ha la grîu şi 2 400 kg/ha la porumb, iar cheltuielile se totalizează la 650 lei/ha la cultura de grîu şi la 1 000 lei/ha la cutura de porumb.

Să se stabilească ce suprafeţe trebuie însămînţate cu grîu şi porumb, astfel ca să se obţină, la vînzare, beneficiul maxim, ştiind că un kilogram de grîu se vinde cu 1,50 lei, iar de porumb cu 1,20 lei.

Soluție. Fie x și y suprafețele în ha, însămînțate, cu grîu, respectiv cu porumb. Din datele problemei rezultă sistemul de inegalități și funcția de eficiență

$$x + y \leqslant 1\,000\,;\ 1\,800\,x \geqslant 400\,000\,;\ 2\,400\,y \geqslant 350\,000\,;$$
$$650\,x + 1\,000\,y \leqslant 400\,000 \tag{1}$$

cu

$$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \tag{2}$$

și

$$f(x, y) = 1\,800.1{,}50\,x + 2\,400.1{,}20\,y - (650\,x + 1\,000\,y) \tag{3}$$

care exprimă respectiv că : suprafața însămînțată poate fi cel mult 1 000 ha ; producția de grîu, cel puțin 400 t ; producția de porumb, cel puțin 350 t ; cheltuielile, cel mult 400 000 lei ; (3) este funcția de eficiență, beneficiul obținut, care trebuie să fie maxim.

După simplificări, sistemul de mai sus se scrie

$$x + y \leqslant 1\,000\,;\ 9x \geqslant 2\,000\,;\ 6y \geqslant 875\,;\ 13x + 20y \leqslant 8\,000 \tag{4}$$
$$f(x, y) = 2050x + 1\,880y \tag{5}$$

Ataşăm acum sistemului de inegalități (4), ecuațiile

$$(D_1)\ x + y = 1\,000\,;\ (D_2)\ 9\,x = 2\,000\,;\ (D_3)\ 6\,y = 875\,;$$
$$(D_4)\ 13\,x + 20\,y = 8\,000\,;$$

și

$$(\Delta_0)\ 2050\,x + 1\,880\,y = 0,$$

al căror grafic este dat în fig. 2.

Dreptele împart planul în 12 regiuni. În tabelul următor sînt date semnele pentru fiecare regiune.

Regiunea	I	II	III	IV	V	VI	VII	VII	IX	X	XI	XII
$x+y-1000$	+	−	−	−	−	+	−	+	−	−	+	
$9\,x - 2\,000$	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+	+	
$6\,y - 875$	+	+	+	−	−	−	−	−	−	+	+	+
$13x+20y-$ $-8\,000$	+	+	−	−	−	+	+	+	−	−	+	+

Astfel regiunea soluțiilor este regiunea X, adică triunghiul ABC, iar dreptele de reper, paralele cu (Δ_0) și perpendiculare pe vectorul OV (2 050 ; 1 400) sînt (Δ_1), corespunzătoare valorii minime a lui f, și (Δ_2), corespunzătoare valorii maxime a lui f.

Coordonatele vîrfurilor triunghiului ABC sînt :

$$A\left(\frac{9002}{6}, \frac{875}{6}\right),\quad B\left(\frac{2000}{9}, \frac{2300}{9}\right),\quad C\left(\frac{15250}{39}, \frac{875}{6}\right),$$

obținîndu-se prin intersectarea dreptelor (D_3) cu (D_2), respectiv, (D_2) cu (D_4) și (D_3) cu (D_4). Deci, varianta optimă a problemei este dată de soluția :

$$x = \frac{15250}{39} \text{ ha} \approx 391 \text{ ha, însămînțate cu grîu,}$$

$$y = \frac{875}{6} \text{ ha} \approx 146 \text{ ha, însămînțate cu porumb,}$$

cu beneficiul maxim :

$$2050 . \frac{15250}{39} + 1880 . \frac{875}{6} \approx 1\,075\,769 \text{ lei.}$$

Observare. Fondul de rulment nu poate acoperi decît cheltuielile necesare pentru însămînțarea aproximativ a 537 ha (391 ha cu grîu și 146 ha cu porumb) din cele 1 000 ha disponibile.

3. O gospodărie de stat dispune de 1 000 ha și de un fond de rulment de 2 300 000 lei. Ea însămînțează trei feluri de culturi A, B, C, în condițiile date în următorul tabel :

Cultura	Producția la 1 ha	Cheltuieli de prod. la 1 ha	Prețul de vînzare a unui kg de produs
A	1 800 kg	2 000 lei	2 lei
B	2 400 kg	3 000 lei	2,50 lei
C	2 000 kg	2 500 lei	1,75 lei

Se cere să determine varianta optimă de îmbinare a culturilor, așa fel încît ca să se realizeze un beneficiu maxim.

Soluție. Notăm cu x_1, x_2 și x_3 suprafețele destinate respectiv pentru culturile A, B și C. Condițiile problemei conduc la următorul sistem de inegalități și egalități :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1\,000 \qquad (1)$$

$$2\,000\,x_1 + 3\,000\,x_2 + 2\,500\,x_3 \leqslant 2\,300\,000$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0, \qquad (2)$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = 1\,800.2x_1 + 2\,400.2{,}5x_2 + 2\,000.1{,}75x_3 - (2\,000x_1 + 3\,000x_2 + 2\,500\,x_3)$$

Ecuația din (1) exprimă că întreg terenul este însămînțat cu cele trei culturi ; inegalitatea (1) exprimă că totalul cheltuielilor făcute pentru realizarea celor trei culturi nu poate depăși fondul disponibil, iar funcția (3) exprimă beneficiul net obținut.

Relațiile (1) și (3) se scriu după simplificare

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1\,000 ; \qquad (1)$$

$$2x_1 + 3x_2 + 2{,}5\,x_3 \leqslant 2\,300 ; \qquad (4)$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0 ; \qquad (2)$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = 1\,600x_1 + 3\,000x_2 + 1\,000x_3 \qquad (5)$$

Scoțînd valoarea lui x_3 din ecuația (1) și introducînd-o în (2) și (5) obținem

$$x_3 = 1\,000 - x_1 - x_2\,; \qquad x_1 - x_2 \geqslant 400\,. \tag{6}$$

și

$$f(x_1\,,\ x_2) = 600x_1 + 2\,000x_2 + 1\,000\,000 \tag{7}$$

În fine, ținînd cont de condițiile (2), adică $x_3 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, $x_1 \geqslant 0$, sistemul ia forma

$$x_1 - x_2 \geqslant 400\,; \quad x_1 + x_2 \leqslant 1\,000 \tag{8}$$

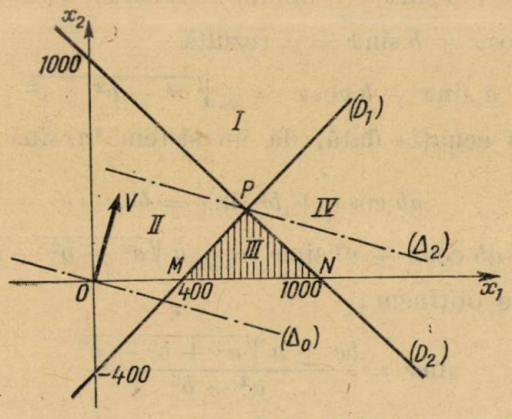


Fig. 3

cu

$$x_1 \geqslant 0, \qquad x_2 \geqslant 0, \tag{2}$$

și

$$f(x_1\,,\ x_2) = 600x_1 + 2\,000x_2 + 1\,000\,000. \tag{7}$$

Ataşăm sistemului (8), (2), (7) ecuațiile :

$$(D_1) \quad x_1 - x_2 = 400\,; \quad (D_2) \quad x_1 + x_2 = 1\,000\,;$$

$$(\Delta_0) \quad 600x_1 + 2\,000x_2 = 0$$

şi construim graficul lor într-un sistem de axe rectangulare $x_1 O\, x_2$ (fig. 3).

Dreptele (D_1) şi (D_2) împart planul în patru regiuni, ale căror semne le dăm în tabelul următor :

Regiunea	I	II	III	IV
$(D_1)\ x_1 - x_2 - 400$	−	−	+	+
$(D_2)\ x_1 + x_2 - 1\,000$	+	−	−	+

Regiunea soluțiilor pozitive este partea haşurată din regiunea III, adică triunghiul MNP, iar dreapta de reper, paralelă la (Δ_0) şi perpendiculară pe vectorul OV (600 ; 2 000), corespunzătoare maximului funcției de eficiență (7) este (Δ_2), care trece prin vîrful P. Coordonatele acestui punct sînt P (700 ; 300), obținute din intersecția dreptei (D_1) cu (D_2).

Prin urmare, varianta optimă de îmbinare a celor trei culturi este următoarea : cultura A, $x_1 = 700$ ha ; cultura B, $x_2 = 300$ ha ; cultura C, $x_3 = 1\,000 - x_1 - x_2 = 0$, realizîndu-se beneficiul maxim

$$600 \cdot 700 + 2\,000 \cdot 300 + 1\,000\,000 = 2\,020\,000 \text{ lei.}$$

32. Formule de rezolvare a ecuației $a \cos x + b \sin x = c$

Folosim relația $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, o înmulțim cu $a^2 + b^2$ și deducem identitatea

$$(a \cos x + b \sin x)^2 + (a \sin x - b \cos x)^2 = a^2 + b^2.$$

Deoarece $a \cos x + b \sin x = c$, rezultă

$$a \sin x - b \cos x = \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$$

care, împreună cu ecuația dată, dă un sistem în $\sin x$ și $\cos x$, care se mai scrie

$$ab \cos x + b^2 \sin x = bc,$$

$$-ab \cos x + a^2 \sin x = \pm a \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}.$$

Prin adunare obținem:

$$\sin x = \frac{bc \pm a \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2}. \tag{1}$$

De asemenea formăm sistemul:

$$a^2 \cos x + ab \sin x = ac$$

$$b^2 \cos x - ab \sin x = \mp b \sqrt{a^2 + b^2 - c^2},$$

de unde rezultă

$$\cos x = \frac{ac \mp b \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2}. \tag{2}$$

Discuție. a) Rădăcinile sînt reale dacă $a^2 + b^2 - c^2 \geqslant 0$.

b) Ecuația $a \cos x + b \sin x = c$, cu notația $\sqrt{a^2 + b^2 - c^2} = R$, devine relația evidentă:

$$a^2 c \mp ab R + b^2 c \pm abR = c(a^2 + b^2).$$

c)
$$\operatorname{tg} x = \frac{bc \pm aR}{ac \mp bR} = \frac{(bc \pm aR)(ac \pm bR)}{a^2 c^2 - b^2 R^2} =$$

$$= \frac{abc^2 + abR^2 \pm R(a^2 c + b^2 c)}{a^2 c^2 - a^2 b^2 - b^4 + b^2 c^2} = \frac{ab(a^2 + b^2) \pm cR(a^2 + b^2)}{(a^2 + b^2)(c^2 - b^2)},$$

deci

$$\operatorname{tg} x = \frac{ab \pm c \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{c^2 - b^2}. \tag{3}$$

d) În ipoteza

$$a^2 + b^2 - c^2 \geqslant 0.$$

$\sin x$ și $\cos x$ fiind în intervalul $[-1,1]$ rezultă, ținînd sema de (1), (2), (3) că, dacă între numerele reale a, b, c avem relația $a^2 + b^2 \geqslant c^2$, atunci

$$-1 \leqslant \frac{bc \pm a\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2} \leqslant 1, \qquad (1')$$

$$-1 \leqslant \frac{ac \pm b\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2} \leqslant 1, \qquad (2')$$

$$-\infty < \frac{ab \pm c\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{c^2 - b^2} < +\infty. \qquad (3')$$

Relațiile (1') și (2') din cauza simetriei sînt echivalente.

În formulele (1) și (2) semnele se corespund, deci la o valoare a lui $\sin x$ corespunde numai o valoare pentru $\cos x$, adică dacă în formula (1) luăm plus în fața radicalului, la formula (2) vom lua numai semnul minus, și reciproc.

Cunoscînd semnele lui $\sin x$ și $\cos x$ se deduce în ce cadran se află x și astfel x este precizat.

Formula (3) care dă $\operatorname{tg} x$, împreună cu una din formulele (1) sau (2), precizează de asemenea cadranul în care se află x, valoarea unghiului.

e) *Aplicație.* Fie ecuația $3\cos x + 5\sin x = \sqrt{2}$.

Aplicînd formulele (1), (2) și (3) obținem:

$$\sin x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \sin x_2 = -\frac{7\sqrt{2}}{34};$$

$$\cos x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\qquad \cos x_2 = \frac{23\sqrt{2}}{34};$$

$$\operatorname{tg} x_1 = -1\ ;\ \operatorname{tg} x_2 = -\frac{7}{23} = -0{,}30435.$$

Rezultă $90° < x_1 < 180°$; $270° < x_2 < 360°$.

$$x_1 = 135°\ ;\ x_2 = 360° - \operatorname{arc\,tg}\, 0{,}30435 =$$

$$= 360° - 16°54'11'' = 343°05'49''.$$

C. Ionescu-Țiu

33. În legătură cu nota „Asupra problemei 6663"

Să considerăm pentru n pozitiv următoarea propoziție: Într-un triunghi inegalitatea $a > b$ implică inegalitatea $a^n + h_a^n \geqslant b^n + h_b^n$ (1).

În nota despre problema 6663 apărută în *G.M.-B* nr. 3/1966 se arată că (1) are loc pentru $n = 2^k$ (k întreg nenegativ).

Pentru a dovedi că P_n are loc pentru orice $n>0$, să observăm că $a > b \Leftrightarrow \sin A > \sin B$ și $a^n + h_a^n \geqslant b^n + h_b^n \Leftrightarrow \sin^n A + \sin^n B \sin^n C \geqslant \sin^n B + \sin^n C \cdot \sin^n A \Leftrightarrow (\sin^n A - \sin^n B)(1 - \sin^n C) \geqslant 0$.

Ultima inegalitate este evidentă deoarece $\sin A > \sin B > 0 \Leftrightarrow \sin^n A > \sin^n B$ și $\sin^n C \leqslant 1$, $(n>0)$. Egalitate avem cînd $\sin^n C = 1$, adică $C = 90°$.

Dan Voiculescu, elev, București

PROBLEME REZOLVATE

Problema 7211

Să se calculeze

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cdots\cos nx}{x^2}$$

Szollosy Gheorghe, profesor, Sighet

Soluție dată de *Dan Voiculescu*, elev București.

Fie $E_n=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cdots\cos nx}{x^2}$. Avem:

$$E_1=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

Pe de altă parte:

$$E_n=\lim_{x\to 0}\left[\cos nx\ \frac{1-\cos x\cos 2x\cdots\cos(n-1)x}{x^2}+\frac{1-\cos nx}{x^2}\right]=$$

$$=E_{n-1}\cdot\lim_{x\to 0}\cos nx+\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos^2 nx}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos nx}\right)=$$

$$=E_{n-1}+\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin nx}{x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos nx}=E_{n-1}+\frac{n^2}{2}.$$

Din relațiile $E_1=\frac{1}{2}$ și $E_n=E_{n-1}+\dfrac{n^2}{2}$, deducem

$$E_n=\frac{1}{2}(1^2+2^2+\cdots+n^2)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}.$$

Problema 7215

Fie ABC un triunghi, $A'B'C'$ triunghiul său median și $A'X$, $B'Y$, $C'Z$ trei ceviene concurente în triunghiul median. Să se arate că AX, BY, CZ sînt de asemenea concurente (enunț generalizat).

C. Ionescu-Țiu

Soluție. Dreapta AX taie BC în X_1, BY taie CA în Y_1, CZ taie AB în Z_1; deoarece $BC\parallel B'C'$, $CA\parallel C'A'$, $AB\parallel A'B'$, avem:

$$\frac{BX_1}{X_1C}\cdot\frac{CY_1}{Y_1A}\cdot\frac{AZ_1}{Z_1B}=\frac{C'X}{XB'}\cdot\frac{A'Y}{YC'}\cdot\frac{B'Z}{ZA'}=\left(\frac{B'X}{XC'}\cdot\frac{C'Y}{YA'}\cdot\frac{A'Z}{ZB'}\right)^{-1}=1,$$

deci AX, BY, CZ sînt concurente.

Probleme 7257

Să se rezolve în numere întregi ecuația în x și y:

$$x^2 - y^2 + 2bx + b^2 - a_1^{p_1}a_2^{p_2}\ldots a_n^{p_n}.2^k = 0$$

unde b este un număr întreg, n, p_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ și k numere naturale, iar a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ numere prime distincte mai mari decît 2. Să se arate că ecuația dată admite $2(k-1)\prod_{i=1}^{n}(p_i+1)$ perechi distincte de soluții întregi.

Tudor Zamfirescu

Soluție dată de *E. Popa*, elev Lic. 3 Iași.

Ecuația se poate scrie și sub forma:

$$(x + y + b)(x - y + b) = 2^k \cdot a_1^{p_1} a_2^{p_2} \ldots a_n^{p_n}$$

Se observă că numerele $x + y + b$ și $x - y + b$ sînt de aceeași paritate și cum membrul 2 este divizibil cu 2, rezultă că $x + y + b$ și $x - y + b$ sînt pare, deci membrul 2 trebuie să fie divizibil cu 4. Deci pentru $k = 1$ ecuația nu are soluții. În cazul $k \geqslant 2$ avem:

$$x + y + b = \pm 2 \cdot 2^{k'} a_1^{p_1'} a_2^{p_2'} \cdots a_n^{p_n'}$$

$$x - y + b = \pm 2 \cdot 2^{k''} a_1^{p_1''} a_2^{p_2''} \cdots a_n^{p_n''},$$

de unde $x = b \pm 2^{k'} a_1^{p_1'} a_2^{p_2'} \cdots a_n^{p_n'} \pm 2^{k''} a_1^{p_1''} a_2^{p_2''} \cdots a_n^{p_u''}$, iar $y = \pm 2^{k'} \cdot a_1^{p_1'} a_2^{p_2'} \cdots a_n^{p_n'} \mp 2^{k''} a_1^{p_1''} a_2^{p_2''} \cdots a_n^{p_n''}$, unde: $k' + k'' = k - 2$, $p_i' + p_i'' = p_i$, iar k', k'', p_i', p_i'' $(i = 1, 2, \cdots, n)$ sînt numere naturale sau zero. Ținînd seama de aceasta, rezultă imediat că există $k - 1$ posibilități de a determina perechea (k', k'') și $p_i + 1$ posibilități de a determina perechea (p_i', p_i''). Deoarece pentru fiecare din soluțiile obținute astfel se mai poate obține o soluție prin inversarea semnelor duble, numărul total de soluții care se pot obține este de

$$2(k-1)\prod_{i=1}^{n}(p_i + 1).$$

Problema 7260

Dacă notăm cu $[a]$ partea întreagă a numărului a definită ca fiind numărul întreg ce verifică inegalitățile $[a] \leqslant a < [a] + 1$, să se demonstreze că $\frac{(x-1)(x+3)}{12}$ este pătrat perfect, unde $x = [(2+\sqrt{3})^n]$, pentru orice n natural. Generalizare.

Tomescu I. Ion, student București

Soluție dată de *E. Popa*, elev Iași.

Să arătăm că $(2+\sqrt{3})^n = p + q\sqrt{3}$, unde: $3q^2 = p^2 - 1$. Pentru $n = 1$ această relație este evident verificată. Să presupunem că $(2+\sqrt{3})^n = p + q\sqrt{3}$. Atunci:

$$(2+\sqrt{3})^{n+1} = 2p + 3q + (p + 2q)\sqrt{3}.$$

Folosind faptul că $3q^2 = p^2 - 1$ să arătăm că

$$3(p + 2q)^2 = (2p + 3q)^2 - 1. \text{ Într-adevăr,}$$

$$3p^2 + 12pq + 12q^2 = 4p^2 + 12pq + 9q^2 - 1,$$

deci afirmația făcută este adevărată. Atunci

$$(2+\sqrt{3})^n = p + \sqrt{3q^2} = p + \sqrt{p^2 - 1}.$$

Tot de aici mai rezultă că $\frac{p^2-1}{3} = q^2$ este pătrat perfect. Dar cum

$$p - 1 < \sqrt{p^2 - 1} < p,$$

avem

$$2p - 1 < p + \sqrt{p^2 - 1} = (2+\sqrt{3})^n < 2p$$

și deci $x = [(2+\sqrt{3})^n] = 2p - 1$. Expresia din enunț devine:

$$\frac{(2p-2)(2p+2)}{12} = \frac{p^2-1}{3},$$

care după cum am remarcat este pătrat perfect.

Generalizare. Fie numărul $a + \sqrt{b}$, unde b este un număr natural care nu este pătrat perfect. Se arată absolut analog că $(a+\sqrt{b})^n = p + q\sqrt{b}$, unde $bq^2 = p^2 - (a^2 - b)$. Se observă de asemenea că pentru $n \geqslant 2$ avem $p \geqslant a^2 + b$, de unde rezultă:

$$2p - 1 < p + \sqrt{p^2 - a^2 + b} = (a+\sqrt{b})^n < 2p$$

și $[(a+\sqrt{b})^n] = 2p - 1 = x$. În acest caz, pentru orice $n \geqslant 2$ expresia $\frac{(x+1+2\sqrt{a^2-b})(x+1-2\sqrt{a^2-b})}{4b}$ este pătrat perfect, demonstrația făcîndu-se pe aceleași considerente. Dacă $b > (a-1)^2$, atunci expresia este pătrat perfect și pentru $n = 1$.

Problema 7289

Fie fracția $\frac{4n+3}{5n+2}$. *Să se afle valorile lui n pentru care fracția se simplifică.*

I. Velescu, Pitești

Soluție. Fie $A = 4n + 3$, $B = 5n + 2$. Dacă d este cel mai mare divizor comun între A și B, atunci: $A = d\alpha$, $B = d\beta$, unde α și β sînt prime între ele. Dar A este prim cu 4, iar B este prim cu 5, deci c.m.m.d.c.

al numerelor $5A$, $4B$, este tot d; deci d va fi un divizor şi al diferenţei $5A - 4B = 7$. Deci d nu poate fi decît 7. Numărul $4n + 3$ este divizibil cu 7 cînd n este de forma $7k + 1$. În acest caz şi numărul $5n + 2$ este divizibil cu 7, deci pentru $n = 7k + 1$ fracţia se simplifică.

Problema 7292

Să se arate că

$$(p-1)!\cdot\frac{(2p-1)!}{p!}\cdot\frac{(3p-1)!}{(2p)!}\cdots\frac{[(n+1)p-1]!}{(np)!}\cdot p^n =$$
$$= (n+1)(n+2)\cdots[(n+1)p-1],$$

unde $p \geqslant 2$.

L. Pîrşan, Bucureşti

Soluţie. Primul membru devine:

$$\frac{p!}{p}\cdot\frac{(2p)!}{p!\cdot 2p}\cdot\frac{(3p)!}{(2p)!\cdot 3p}\cdots\frac{[(n+1)p]!}{(np)!(n+1)p}\cdot p^n = \frac{[(n+1)\cdot p]!}{(n+1)\cdot p} =$$
$$= (n+1)(n+2)\cdots[(n+1)p-1],$$

adică ce trebuia dovedit.

Problema E: 2405

Un robinet umple un bazin în 4 ore. Curgînd împreună cu un al doilea robinet bazinul se umple în 2 ore şi jumătate. La acestea a dăugîndu-se un al treilea robinet, toate trei umplu bazinul într-o oră. În cît timp umplu bazinul, primul şi al doilea robinet, fiecare în parte?

N. Manolache, elev Bucureşti

Soluţie dată de *Marian Iancău*, elev Cluj.

În cele $2\frac{1}{2}$ ore primul robinet umple $2\frac{1}{2} : 4 = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{5}{8}$ din bazin, deci al doilea robinet umple în acelaşi timp de $2\frac{1}{2}$ ore, $\frac{3}{8}$ din bazin. De aici, rezultă că al doilea robinet umple bazinul în $\frac{5}{2} : \frac{3}{8} = \frac{40}{6} = 6\frac{2}{3}$ ore.

Într-o oră primul robinet umple $1 : 4 = \frac{1}{4}$ din bazin; al doilea $1 : 6\frac{2}{3} = \frac{3}{20}$ din bazin, deci împreună:

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{20} = \frac{2}{5}$$

din bazinul respectiv. Restul de $\frac{3}{5}$ îl umple al treilea robinet într-o oră, deci acesta umple singur bazinul în $1 : \frac{3}{5} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$ ore. Al doilea robinet umple bazinul în 6 ore 40 min, iar al treilea în 1 oră şi 40 minute.

Problema E : 2406

Să se demonstreze că aria patratului care se formează în interiorul unui alt patrat cînd îi unim vîrfurile cu mijloacele laturilor următoare este egală cu $\frac{1}{5}$ *din suprafața patratului mare.*

D. Mîrzan, Bujoreni

Soluție dată de *Eva Zsido*, elevă Brașov.

În patratul $ABCD$ unim fiecare vîrf cu mijlocul laturii următoare și prin vîrfurile patratului ducem paralele la segmentele de dreaptă pe care le-am trasat. Am notat cu 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, triunghiurile care se formează și care sînt egale între ele.

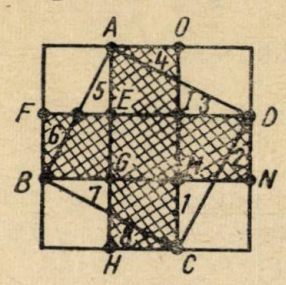


Fig. E : 2406

Triunghiurile 1, 3, 5, 7, care fac parte din patratul dat se înlocuiesc cu triunghiurile 2, 4, 6, 8 și deci patratul $EGMI$ este egal cu $\frac{1}{5}$ din patratul $ABCD$.

Problema E : 2407

Laturile unui triunghi sînt proporționale cu numerele 3, 4 și 5, iar raza cercului înscris este egală cu 6 cm. Să se calculeze raza cercului circumscris.

R. Munteanu, student București

Soluție dată de *Cezar Chirică*, elev Botoșani.

Considerăm triunghiul ABC cu $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm. Se observă că numerele 3, 4 și 5 verifică relația triunghiului dreptunghic: $BC = \sqrt{4^2+3^2} = 5$ cm.

Se duc razele OM, ON și OP în punctele de tangență ale cercului înscris cu laturile triunghiului. $OMAN$ este un patrat cu latura r; $MC = PC = 4 - r$ (ca tangente egale); $BN = BP = 3 - r$ (ca tangente egale).

Dar, $BP + PC = BC$ sau: $3 - r + 4 - r = 5$, deci $r = 1$.

Triunghiul cerut de problemă este asemenea cu triunghiul considerat ABC. Raza cercului înscris fiind de 6 ori mai mare, rezultă că ipotenuza este de $5 \cdot 6 = 30$ cm. Ipotenuza triunghiului dreptunghic este diametrul cercului circumscris. Avem deci, $R = 15$ cm.

Problema E : 2408

Să se arate că avînd dată lungimea L a unui cerc, putem calcula raza lui cu o eroare prin adaos mai mică decît o zecime de miime din această lungime, cînd luăm pentru π valoarea apropiată 3,14.

I. Teodorescu, Galați

Soluția autorului. Lungimea cercului fiind L, pentru raza lui avem $R' = \frac{L}{2 \cdot 3{,}14}$ și valoarea exactă $R = \frac{L}{2 \cdot 3{,}14\,159\ldots}$

Eroarea absolută E este prin adaos și are expresia:

$$E = R' - R = \frac{L}{2}\left[\frac{1}{3{,}14} - \frac{1}{3{,}14\,159\ldots}\right]$$

sau:

$$E = R' - R = \frac{L}{2} \cdot \frac{0{,}00159\ldots}{3{,}14 \cdot 3{,}14159\ldots}$$

Înlocuind numărătorul 0,00159 ... cu valoarea mai mare 0,0018, iar numitorul fracției cu valoarea mai mică $3 \cdot 3 = 9$, vom avea:

$$E < \frac{L}{2} \cdot \frac{0{,}0018}{9} \quad \text{sau} \quad E < \frac{1}{10000} \cdot L.$$

De exemplu, luînd lungimea meridianului pămîntesc de 40.000 km, făcînd calculul razei prin împărțirea 40 000 : 6,28, avem această rază cu o eroare prin adaos $E < 4$ km.

CHESTIUNI DE EXAMEN

Problemele date la admiterea la cursurile de zi în facultatea de matematică-mecanică a Universității București, în septembrie 1966

7860. Se consideră funcția:

$$f(x) = \arcsin \frac{1}{x} - \arccos \frac{1}{x}$$

1. Să se determine domeniul său maxim de definiție.
2. Pentru ce valori ale lui x, $f(x) \geqslant 0$?
3. Să se arate că $f(x)$ este descrescătoare.
4. Să se reprezinte graficul funcției $f(x)$.
5. Să se inverseze funcția $f(x)$ și să se verifice că:

$$\overset{-1}{f}[f(x)] = x; \quad f[\overset{-1}{f}(x)] = x,$$

pentru orice x pentru care funcțiile f respectiv $\overset{-1}{f}$ sînt definite.

6. Să se cerceteze derivabilitatea funcției $F(x) = |f(x)|$, în punctul $x = \sqrt{2}$.

7861. Se consideră ecuația:

$$x^2 - x\ln y + 3\ln y - 8 = 0,$$

y fiind un parametru pozitiv.

Să se determine valorile lui y pentru care ecuația dată îndeplinește următoarele condiții:

1. Una dintre rădăcinile sale este situată în intervalul [0,3].
2. Ecuația are rădăcină dublă în intervalul precedent.

3. Ecuația are două rădăcini diferite situate în același interval.

4. Să se reprezinte graficul funcției $y = f(x)$, definită de ecuația dată.

5. Să se verifice pe acest grafic rezultatele precedente.

7862. Fie triunghiul ABC și cercul circumscris O.

1. Să se determine pe arcul BC, care nu conține pe A, un punct A' astfel încît luînd intersecțiile A_b, A_c ale tangentei în A' la cercul O cu laturile AB și AC respectiv, triunghiul $A_b A_c A$ să fie isoscel cu vîrful în A.

2. Se consideră analog punctele B' și C' și triunghiurile isoscele BB_aB_b, $CC_a C_b$, să se calculeze unghiurile triunghiului $A'B'C'$ în funcție de unghiurile A, B, C ale triunghiului dat.

3. Să se calculeze de asemenea unghiurile triunghiului $A''B''C''$ format de intersecțiile dreptelor $A_b A_c$, $B_c B_a$, $C_a C_b$.

4. Punctele B și C fiind fixe și A mobil pe cercul O să se determine locul geometric al punctului A''.

7863. Fie punctul $P(a, b)$ în raport cu două axe rectangulare Ox și Oy.

1. Să se arate că există două drepte D_1 și D_2 care trec prin P și determină împreună cu axele triunghiuri cu aria K^2.

2. Fie A_1, B_1 punctele de interesecție ale dreptei D_1 cu Ox respectiv Oy și A_2, B_2 punctele de interesecție ale dreptei D_2 cu Ox, Oy. Să se arate că dreptele A_1B_2 și A_2B_1 nu-și schimbă direcția cînd K variază.

3. Să se determine locul geometric al punctului P astfel încît patrulaterul $A_1A_2B_1B_2$ să fie inscriptibil.

Probleme date la examenul de admitere în învățămîntul superior în Bulgaria, 1966

7864. Dacă doi călători pornesc în același timp din două orașe A și B, între care distanța este S, după 6 ore de mers distanța între ei (înainte de a se întîlni) este de 10 ori mai mică decît distanța între orașele A și B. Dacă călătorul din A pornește cu o oră și 30 minute mai devreme decît cel din B, atunci cei doi călători se vor întîlni la mijlocul drumului AB. Să se afle în cîte ore fiecare din călători parcurge distanța dintre cele două orașe.

7865. În triunghiul dreptunghic ABC ($C = 90°$) unghiul din vîrful A este α. Punctul O este interior triunghiului dreptunghic ABC astfel ales ca $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OBC = \sphericalangle OCA$.

a) Să se arate că

$$\operatorname{tg}\varphi = \sin\alpha \cdot \cos\alpha,$$

(φ este unghiul OAB).

b) Să se construiască punctul O (interior triunghiului ABC).

7866. Să se determine distanța d între două muchii opuse într-o piramidă triunghiulară regulată în funcție de lungimea b a muchiei laterale și lungimea a a muchiei de bază.

Să se determine poziția punctelor extreme ale segmentului de lungime d pe cele două muchii opuse a piramidei.

★

7867. În triunghiul ABC fie AD înălțimea și AE mediana din A. Se dă $\sphericalangle BAD = \sphericalangle DAE = \sphericalangle EAC$.

Să se calculeze unghiurile triunghiului.

Olimpiada matematică, prima etapă, Olanda 1964.

7868. Se dă în plan un sistem de axe carteziene xOy. Să se determine regiunea din plan formată de punctele ale căror coordonate satisfac simultan următoarele 3 inegalități:

$$0 < x < 4, \quad 0 < y < 4, \quad \log x + \log y < \log (x + y)$$

Olimpiada matematică, prima etapă, Olanda 1964.

7869. Fie n un număr natural mai mare ca 1 astfel încît $n^2 + n + 1$ să fie număr prim; atunci restul lui $n^2 + n + 1$ la împărțirea prin 6 este egal cu 1.

Olimpiada matematică, prima etapă, Olanda 1964.

7870. a) V este mulțimea numerelor ce pot fi scrise sub forma $3p + 7q$, unde p și q sînt numere întregi nenegative.

Care numere naturale nu aparțin lui V?

b) W este mulțimea numerelor ce pot fi scrise sub forma $6p + 14q$, unde p și q sînt numere întregi nenegative.

Care numere naturale nu aparțin lui W?

Olimpiada matematică, prima etapă, Olanda 1964

7871. Notăm cu $[a]$ cel mai mare întreg care este mai mic sau egal cu a.

Să se rezolve ecuațiile:

$$x + [x] = 4\frac{1}{2}; \qquad x + [x] = -4\frac{1}{2}$$

și să se reprezinte grafic funcția $x + [x]$, pentru $-2 \leqslant x \leqslant 2$.

Olimpiada matematică, prima etapă, Olanda 1964.

7872. Fie șirul $t_k\,(k \in N)$ cu proprietatea:

$$t_{n+2} - t_{n+1} + t_n = 0$$

pentru orice n.

a) Se dă: $t_1 = 0$ și $t_2 = 1$.

Să se arate că $t_n = \frac{2}{3}\sqrt{3}\sin(n-1)\,60°$.

b) Se dă $t_1 = a$ și $t_2 = b$.

Să se calculeze t_n.

Olimpiada matematică, prima etapă, Olanda 1964

PROBLEME PROPUSE*

7873. Se dau polinoamele: $P_1(x, y) = 2x^3 - 2x^2y + xy^2 + 7y^3$; $P_2(x, y) = 3x^3 - 6x^2y - 2xy^2 + 5y^3$; $P_3(x, y) = 2x^3 - 3x^2 - 4xy^2 - 3y^3$; $Q_1(x, y) = 2x^5 - 5x^4y + 2x^3y^2 + 4x^2y^3 - 4xy^4 + y^5$ și $Q_2(x,y) = 2x^2 - 3xy + y^2$.

Să se descompună în factori polinoamele:

a) $P(x, y) = P_1(x, y) - [P_2(x, y) - P_3(x, y)]$.

b) $Q(x, y) = Q_1(x, y) : Q_2(x, y)$

c) Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:

$$E(x, y) = \frac{xy}{x+y} : \left[\frac{x^2}{P(x,y)} - \frac{2xy^2}{x^2-2x^2+y^4} + \frac{y^2}{Q(x,y)}\right]$$

d) Să se calculeze valoarea numerică a fracției $\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ pentru $x = -\frac{2}{3}$ și $y = -\frac{1}{2}$

Concursul de matematică 1966, clasa a VIII-a reg. Ploiești

7874. O piramidă $VABC$ are ca bază un triunghi dreptunghic ABC, iar înălțimea VA cade în vîrful unghiului drept A al triunghiului ABC. Se dă: $AB = 24$ cm, $BC = 51$ cm, $VA = 6$ dm. Prin punctul D al înălțimii VA situat la 4 dm de punctul A se duce un plan paralel cu baza piramidei și se notează cu E și F punctele în care acest plan taie celelalte două muchii laterale ale piramidei.

a) Să se arate că perimetrul triunghiului DEF este egal cu $\frac{2}{3}$ din înălțimea piramidei.

b) Să se afle volumul corpului care rămîne dacă se îndepărtează piramida $VDEF$.

c) Să se arate că $\operatorname{tg} ACV + \operatorname{tg} ABV + \frac{1}{6} = 4$.

7875. Fie un paralelogram de laturi consecutive a, b și înălțimile corespunzătoare h și k. Rotind paralelogramul în jurul laturii a se obține corpul de volum V, rotind paralelogramul în jurul lui b se obține corpul de volum V_1. Se cere:

a) Să se calculeze volumul V cu ajutorul lui a și h precum și V_1 cu ajutorul lui b și k și să se interpreteze rezultatul.

b) Să se arate că există relația

$$\frac{V}{V_1} = \frac{b}{a}.$$

---

* IX (7873—7879); X (7880—7891); XI (7892—7895); S (7896—7901). Soluțiile se primesc pînă la 15 martie 1967. Fiecare elev poate trimite rezolvări și la problemele din clasa precedentă celei pe care o urmează. Problemele pentru clasa IX sînt indicate și pentru liceele de specialitate sau pedagogice.

c) Dacă notăm cu V volumul unui cilindru, cu S aria lui totală iar cu A aria laterală, să se arată că între aceste elemente există relația

$$8\pi V^2 = A^2(S - A).$$

7876. Se dă ecuația

$$\left[\left(\frac{a+2}{a-2}\right)^3 : \frac{a^3+4a^2+4a}{3a^2-12a+12} \cdot \frac{a}{3}\right] x + \left[6a + \left(\frac{a}{a-2} - \frac{a}{a+2}\right) : \frac{4a}{a^4-2a^3+8a-16}\right] x =$$

$$= a^3 + 6a^2 + 12a + \frac{a+2}{a-2}\, x$$

și se cere :

a) Fără a rezolva ecuația să se arate ce valoare are a) pentru ca $x = 0$ să fie rădăcină a ecuației.

b) Să se rezolve ecuația.

c) Să se verifice cele găsite la punctul a pe baza soluției găsite la punctul b).

d) Să se arate ce valori poate lua a pentru ca rădăcina ecuației să fie negativă.

Concursul de matematică 1966, clasa VIII, reg. Crișana

7877. Dacă $a + b = 1$, avem $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geqslant \frac{25}{2}$

Ioan V. Maftei, profesor București

7878. Se dă expresia

$$F(x) = \left(\frac{\frac{x^2-1}{x+1}}{\frac{x+1}{x+1}} + \frac{x+1}{\frac{x^2-1}{x+1}}\right) \cdot \left(\frac{2x^3+2x}{4x^2} + 1\right) \cdot \frac{2x}{2x^2+2}.$$

a) Să se aducă la forma cea mai simplă această expresie.

b) Să se afle valoarea numerică a expresiei pentru $x = \frac{3}{2}$.

c) Pentru ce valori ale lui x expresia dată inițial nu are sens?

Concursul de matematică 1966, clasa VIII, București

7879. O piramidă are vîrful în V și ca bază rombul $ABCD$ cu latura de 5 cm, și diagonala mică de 6 cm. Înălțimea piramidei este jumătate din diagonala mare a bazei și are piciorul în mijlocul ei.

a) Să se afle volumul piramidei.

b) Să se calculeze lungimile muchiilor laterale.

c) Să se arate că muchiile laterale ale piramidei care trec prin extremitățile diagonalei mari sînt perpendiculare.

Concursul de matematică 1966, clasa VIII

7880. Să se afle restul împărțirii $1966^{1968} : 17$.

I. Gh. Fătu, elev Panciu

7881. Să se demonstreze identitatea :

$$\sum_{k=1}^{n} A_{k+n}^{p+1} = (p+1)!\, C_{n+p+1}^{n+2}$$

unde n și p sînt numere naturale.

Gheorghe E. Pop student I.P.B.

7882. Împărțind produsul a două numere naturale cu suma lor, cîtul obținut este un număr prim. De asemenea împărțind produsul a două numere naturale la diferența lor, cîtul este un număr prim. Să se găsească separat, în ambele cazuri, aceste numere.

D. Costinuc, profesor Galați

7883. Să se demonstreze că :

$$\frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^5} + \ldots + \frac{n}{2^{2n-1}} = \frac{1}{9}\left(8 - \frac{3n+4}{2^{2n+1}}\right)$$

$$\frac{1}{2^1} - \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} - \frac{4}{2^4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{n}{2^n} = \frac{1}{9}\left[2 + (-1)^{n-1}\frac{3n+2}{2^n}\right]$$

Ion Candrea, Sibiu

7884. Să se arate că pentru k impar avem :

$$\cos^4 \frac{k\pi}{16} + \cos^4 \frac{3k\pi}{16} + \cos^4 \frac{5k\pi}{16} + \cos^4 \frac{7k\pi}{16} = \frac{3}{2}$$

C. Ionescu-Țiu

7885. Să se afle valoarea numerică a polinomului

$$P(x) = x^3 - 3x^2 - 3x(a-1) - (a-1)^2$$

pentru $x = 1 + \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2}$.

L. Pîrșan, student București

7886. Fie tetraedrul $VABC$. Se prelungesc în același sens (în planul ABC) muchiile : $CD = n\,BC$; $AE = n\,CA$; $BF = nAB$, iar muchia AV se prelungește de la A la V astfel ca $AG = nAV$. Să se arate că volumul $GDEF = (3n^2 + 3n + 1)n$ volumul $VABC$.

Mihail Stan, elev Ploiești

7887. Să se demonstreze că numărul 1966 ! este divizibil cu numărul 1000^{163}.

G. Ortocol, Făgăraș

7888. Să se arate că

$$E = 3865165^{491} + 21621^{982} - 2 \cdot 25^{491}$$

este divizibil cu 1966.

Perl Toma, student Cluj

7889. Considerăm un plan P şi un punct O la distanţa a de acest plan. Notăm cu A piciorul perpendicularei din O pe planul P. Ducem din O două oblice OB şi OC, care formează cu planul P un unghi de $60°$ respectiv $30°$, astfel ca triunghiul ABC din P să fie dreptunghic ($\sphericalangle B = 90°$). Notăm cu E şi H mijloacele segmentelor OC respectiv AC şi cu D piciorul bisectoarei interioare unghiului A în triunghiul ABC.

a) Să se arate că triunghiul ODC este isoscel, iar triunghiul AED este dreptunghic ($\sphericalangle D = 90°$).

Să se afle:

b) Aria triunghiului AED.

c) Mărimea unghiului diedru format de planele AED şi P.

d) Locul geometric al punctului E dacă a devine variabil, iar A rămîne fix. Dreptele AB şi AC sînt fixe.

E. Huniar, Jimbolia

7890. Fie un punct O şi trei semidrepte necoplanare Ox, Oy şi Oz care formează între ele unghiurile $xOy = \alpha$, $xOz = \beta$ şi $yOz = \gamma$ şi trei diedre ale căror mărimi să le notăm cu X, Y, Z, după muchie.

Fie C un punct pe semidreapta Oz iar M piciorul perpendicularei din C pe planul xOy; planele duse prin CM normale respectiv la Ox şi Oy, intersectează aceste drepte în A şi B.

a) Să se calculeze unghiurile dreptelor AC şi AB cu planul xOy precum şi unghiul diedru $A(MC)B$.

b) Să se arate că dacă $Y = 90°$, există relaţia

$$\sin^2\theta \sin^2\beta = \sin^2\gamma + \cos^2\beta\sin^2\alpha,$$

θ fiind unghiul dreptei AC cu semidreapta Oy.

c) Să se arate că există relaţia:

$$\sin\beta \sin X = \sin\gamma \sin Y$$

Savu Isai, Oradea

7891. La prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$, centrele feţelor $BCC'B'$ şi $ABB'A'$ sînt respectiv A_1 şi C_1, iar centrul bazei inferioare $A'B'C'$ este O. Se dă relaţia $2A_1C_1 = OA_1\sqrt{3}$. Se cere:

a) Măsura unghiului diedru format de planele OA_1C_1 şi $A'B'C'$.

b) Aria secţiunii în prismă, determinată de planul OA_1C_1, în funcţie de R, raza cercului circumscris bazei.

Să se arate că:

c) Volumul prismei = aria laterală $\cdot \frac{1}{4} OA_1$.

d) Dacă α este unghiul pe care-l face OA_1 cu planul bazei, atunci:

$$\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}^2\alpha + \operatorname{cotg}^3\alpha + \ldots + \operatorname{cotg}^n\alpha + \ldots = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

Corneliu Georgescu, Craiova

7892. Se dă şirul $\{x_n\}_{n\in N}$ definit prin relaţia de recurenţă $x_{n+1} = x_n - x_n^2$, $x_1 = a\,(0 \leqslant a \leqslant 1)$. Se cere:

a) Să se arate că acest şir este convergent.

b) Să se calculeze limita acestui şir.

c) Să se calculeze $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$.

I. M. Stancu, student Bucureşti

7893. Se cere limita şirului cu termenul general:

$$a_n = \frac{[(n^2+1)(n^2+1-n)(n^2+1-2n)]^n}{(n^2+n)^{3n}}$$

L. Mănescu, R. Vîlcea

7894. Notăm

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2\pm\sqrt{3}}}}} = A,$$

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2\pm\sqrt{3}}}}} = B$$

în total fiind cîte n radicali suprapuşi.

Să se arate că

$$(A + iB)^{3\cdot 2^n} + 2^{3\cdot 2^n} = 0.$$

C. Ionescu-Ţiu

7895. Să se reprezinte grafic, fără a calcula derivate:

$$\sqrt{x(1-x)} + \sqrt{y(1-y)} = 0\,;\sqrt{(1-x)(1-y)} + \sqrt{xy} = 1\,;$$

$$\sqrt{x(1-x)} - \sqrt{y(1-y)} = 0\,;\sqrt{(1-x)(1-y)} - \sqrt{xy} = 1.$$

C. Ionescu-Ţiu

7896. Fiind dat un tetraedru $ABCD$ oarecare, se iau simetricele A', B' a două vîrfuri (A, B de exemplu) în raport cu centralele de greutate ale triunghiurilor opuse, corespunzătoare. Să se demonstreze că segmentul $A'B'$ care uneşte aceste simetrice este paralel cu muchia AB şi că avem $A'B' = \frac{5}{3}AB$ (în legătură cu articolul de la pag. 481).

O. Sacter

7897. Să se determine coeficienţii constanţi a, b, c în aşa fel încît curba (P) reprezentînd funcţia

$$y = ax^2 + bx + c$$

să treacă prin punctele $A\,(-4,0)$, $B\,(0,2)$, $C(1,0)$.

Să se determine focarul și directoarea lui (P). Să se construiască apoi curba (P) și să se găsească ecuațiile tangentelor în A și B, de asemenea și cosinusul unghiului lor.

Admitere la Șc. exp. liceu Moulins, iunie 1965

7898. Fie un triunghi ABC, G centrul său de greutate și M un punct mobil al planului său.

a) Să se calculeze : $\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC}$.

Să se calculeze, în funcție de $\overline{MG}$, suma $\overline{MS} + \overline{MB} + \overline{MC}$.

Fie $\overline{MR} = \overline{MA} + \overline{MB}$. Care este mulțimea punctelor R cînd M descrie o dreaptă, un cerc?

b) Fie vectorul $\overline{MS}$ definit prin

$$\overline{MD} = \overline{MA} + \overline{MB} - 2\,\overline{MC}.$$

Să se calculeze $\overline{MS}$ în funcție de $\overline{GC}$. Ce se poate spune despre vectorul $\overline{MS}$?

Admitere în Mat. elem. liceul din Saint-Gaudens, iunie 1965

7899. a) Să se studieze variația funcției $y = 2\dfrac{x-2}{x^2-4x-5}$ și să se traseze graficul (C) (axe ortogonale).

b) Să se determine a și b astfel ca pentru toate valorile lui x aparținînd domeniului de definiție al funcției să avem

$$2\frac{x-2}{x^2-4x-5} \equiv \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-5}.$$

c) Să se calculeze aria S limitată de (C), axa $x'Ox$ și dreptele $x = \lambda$, $x = \lambda e$ (e fiind baza logaritmilor neperieni și $\lambda < 5$.)

d) Această arie are o limită dacă $\lambda \to \infty$?

7900. Se dă funcția $f(x) = \dfrac{3x^2+4}{4x}$.

a) Să se studieze și să se reprezinte grafic variația funcției.

b) Se consideră pe curbă un punct varaiabil M de abscisă p. Să se calculeze în funcție de p distanțele de la punctul M la dreptele $x = 0$ și $3x - 4y = 0$ și să se arate că produsul acestor distanțe este constant.

c) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției, în punctul $A(2,2)$. Să se arate că punctul A este mijlocul segmentului de pe această tangentă, cuprins între dreptele $x = 0$ și $y = \dfrac{3}{4}x$.

Examen de bacalaureat, august 1966

7901. Se dau ecuația $xy = 2$ și punctele $A(2,2)$ și $B(-2,-2)$.

a) Să se spună ce curbă reprezintă această ecuație și să se determine elementele importante.

b) Să se scrie ecuația tangentei la această curbă în punctul $C(2,1)$.

c) Se consideră pe curbă un punct mobil M de abscisă p. Să se calculeze în funcție de p distanțele MA și MB, apoi să se verifice că $MB - MA =$ constant. Să se explice acest rezultat.

d) Să se determine intervalele în care k poate lua valori, astfel ca dreptele fascicolului $y = -x + k$ să intersecteze curba $xy = 2$.

e) Dacă k este cuprins în intervalele corespunzătoare atunci o dreaptă oarecare $y = -x + k$ taie curba în două puncte P_1 și P_2. Să se afle locul geometric al punctului P, mijlocul segmentului P_1P_2, cînd k parcurge intervalele respective.

Examen de bacalaureat. august 1966

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE PENTRU CLASELE V—VIII*

E : 2613. Trei frați au împreună 37 ani. Știind că împătritul vîrstei primului este cît de 5 ori vîrsta celui de al doilea și de 6 ori vîrsta celui de al treilea, să se afle vîrsta fiecăruia.

I. Albescu, Făgăraș

E : 2614. Pentru sfîrșitul anului școlar conducerea unei școli a hotărît să organizeze două excursii : una pe Valea Oltului și una la Bicaz. Pentru excursia de la Bicaz fiecare elev trebuia să dea 265 lei, iar pentru cea de pe Valea Oltului 305 lei. Știind că suma încasată de la cei 66 elevi înscriși în cele două excursii era de lei 19 010, să se afle cîți elevi s-au înscris în excursia de pe Valea Oltului și cîți în cea de la Bicaz.

Nelu Dobre, Merei

E :2615. Doi motocicliști străbat aceeași distanță. Primul din ei parcurge într-o oră cu 9 km mai mult decît al doilea și străbate drumul în 20 ore; cel de al doilea motociclist parcurge același drum în $23\frac{9}{17}$ ore.

Să se afle :

a) Viteza pentru fiecare motociclist.

b) Distanța parcursă.

N. Baeră, Păunești, Bacău

E :2616. Se cere numărul $\overline{abcc}$, știind că dacă îl scădem din răsturnatul lui, obținem 4725.

C. V. Costăchescu, Constanța

E :2617. În vacanță au fost la odihnă în același loc elevi din orașele Bacău, Iași, Galați. Triplul numărul elevilor din Bacău reprezintă $\frac{2}{3}$ din numărul elevilor din Galați; $\frac{4}{5}$ din numărul elevilor din Iași este mai mic cu 50 decît numărul elevilor din Galați; raportul dintre numărul elevilor

* V (E : 2613—2616), VI (E : 2617—2621), VII (E :2622—2626) ; VIII (E : 2627—2630). Soluțiile se primesc pînă la 15 martie 1967. Problemele pentru clasa VIII sînt indicate și pentru liceele de specialitate sau pedagogice. Fiecare elev poate trimite rezolvări și la problemele clasei precedente celei pe care o urmează.

din Galați și Bacău este mai mare cu 2 decît raportul dintre numărul elevilor din Iași și Bacău. Să se afle cîți elevi au fost la odihnă din fiecare oraș.

I. Copaie, Sibiu

E :2618. S-a cultivat în anul 1964 o suprafață de 1940 ha astfel: 45% cu porumb, 40% cu grîu și 15% cu mei. În anul 1965 s-a desființat cultura meiului, iar prin aceasta, mărindu-se suprafața cultivată cu grîu și porumb, cît la sută din suprafața cultivată cu mei a fost destinată culturii porumbului, știind că suprafața cultivată cu grîu a fost în 1965 de 892,4 ha?

D. Preda, Topoloveni, Argeș

E :2619. Media aritmetică a trei numere direct proporționale cu numerele 0, (3); $\frac{1}{2}$ și 2 este egală cu $19\frac{5}{6}$. Să se găsească aceste numere.

A. Corlan, Gilort

E :2620. Să se calculeze expresia:

$$E = \frac{[0,20.3)^2 + (0,4 \cdot 0,5)^2] \sqrt{\frac{0,(81)}{0,(27)}}}{\sqrt{0,00001296} + \sqrt{0,0016}}$$

Filip Cornea, Caransebeș

E :2621. O echipă de 5 muncitori de la uzina „Independența" din orașul Sibiu, au primit pentru o inovație un premiu în valoare de 6224 lei.

Luîndu-se în considerare contribuția adusă de fiecare, suma a fost împărțită în cinci părți așa fel încît raportul între partea primului și a celui de al doilea să fie $\frac{1}{2}$, între al doilea și al treilea să fie $\frac{12}{10}$, între al treilea și al patrulea să fie $\frac{50}{36}$, iar între al patrulea și al cincilea să fie $\frac{216}{500}$.

Ce sumă a primit fiecare muncitor, care dintre ei a adus o contribuție mai mare la inovație?

I. Frăticiu, Sibiu

E :2622. În triunghiul ABC se duc medianele AD și BE, care se intersectează în G.

Să se arate că aria triunghiului ABG este egală cu aria patrulaterului $DCEG$.

V. Florescu, R. Vîlcea

E :2623. În triunghiul dreptunghic ABC ($A = 90°$), unghiul C are 15°, iar ipotenuza $BC = 20$ cm.

Să se afle aria triunghiului ABC.

Gh. Nistor, Buzău

E :2624. Bisectoarele interioare ale unui triunghi obtuzunghic ABC, $A > B > C$, mai întîlnesc cercul circumscris în A', B', C'. Să se demonstreze că triunghiul A'B'C' are toate unghiurile ascuțite.

C. Ionescu-Țiu

E :2625. Dacă A este medie aritmetică între B și C iar B este medie geometrică între C și A, să se arate că C este medie armonică între A și B.

G. Ortocol, elev Făgăraș

E :2626. Două mașini produc piese de schimb și au planuri diferite. Prima mașină produce 1920 piese într-un anumit număr de zile, a doua lucrînd cu 6 zile mai puțin nu produce decît 1080 piese. Dacă a doua mașină ar fi lucrat tot atîtea zile ca și prima și dacă prima mașină ar fi lucrat cu 6 zile mai puțin decît a lucrat, ar fi produs amîndouă același număr de piese. Cîte piese a produs pe zi fiecare mașină și cîte zile a lucrat fiecare?

I. Rusu, profesor Cluj

E :2627. Să se rezolve ecuația:

$$\left[\frac{x:3:0,(3)+1,(1)}{2,(5)}+1,1(2)\right]\cdot 2070 = 4033$$

Gh. N. Popescu, profesor Buzău

E :2628. Să se rezolve sistemul:

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=4;\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

știind că $a \neq 0$ și $b \neq 0$.

Gh. Grosu, Botoșani

E :2629. G.A.S. Popricani și-a mărit începînd din acest an suprafața irigată de la 513 ha la 800 ha. Anul trecut de pe această suprafață s-au strîns 3684835 kg porumb boabe. Știind că de pe un hectar irigat s-au strîns cu 1795 kg porumb boabe mai mult decît de pe un ha neirigat, să se calculeze: 1) producția de porumb boabe la hectarul irigat și la cel neirigat, 2) cît la sută se cîștigă prin irigare la producția de porumb boabe.

I. Munteanu, Vaslui

E :2630. Să se rezolve ecuația

$$(bc+ax)^2+(ac-bx)^2=(a^2+b^2)^2$$

C. Ionescu-Țiu

CĂRȚI NOI

1. *Radu Miron. Geometria configurațiilor Myller*, Biblioteca Societății de științe matematice din R. S. România nr. 74, Editura tehnică 1966. Cartea este de nivel superior.

2. *George St. Andonie. Istoria matematicii în România*, vol. II, Editura științifică, 1966. Cuprinsul: I. Generalități, II. Matematicieni români din prima jumătate a secolului al XX-lea activînd în domeniul analizei și teoriei funcțiilor, III. Matematicieni români din

prima jumătate a secolului al XX-lea activînd în domeniul geometriei şi topologiei, IV. Matematicieni români din prima jumătate a secoolului al XX-lea activînd în domeniul teoriei numerelor şi algebrei, V. Matematicieni români din prima jumătate a secolului al XX-lea activînd simultant în domeninl matematicilor pure şi aplicate.

3. *I. Marinescu, C. Moineagu. P. Niculescu, N. Rancu, V. Urseanu. Elemente de statistică matematică şi aplicaţiile ei.* Editura ştiinţifică, 1966. Cuprinsul: I. Obiectul şi blemele de bază ale statisticii matematice, II. Variabile aleatoare şi legile lor de repartiţie, III. Repartiţii empirice cu o singură caracteristică, IV. Ajustarea repartiţiilor empirice. Criserii de concordanţă, V. Repartiţii multidimensionale, VI. Repartiţii empirice multidimentionale. Metoda corelaţiei, VII. Corelaţia multiplă. Ecuaţia regresiei multiple, VIII. Corelaţia rangurilor.

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

Pînă la 15 august 1966 s-au mai primit soluţii bune de la:

BOLINTINUL DIN VALE (Bucureşti) Absolvent Băieţel Niculae (2495, 9, 502, 3, 5—9), L. 1 cl.X Cristescu Cornel (7423—6, 48, 50, 79—81, 529, 34, 5), Grigore Nicolae (7476, 8—80, 90, 4—6, 9, 520, 9, 34—8, 52, 4, 612), Mustăţea Stancu (7423, 5, 42, 8, 50, 2, 78, 9, 99, 529, 35, 6), Niculae Pavel (7423, 5, 6, 8, 37, 48, 50, 79, 80, 529, 34, 5).

BOROAIA (Suceava) *L. 1* cl. VIII Butnaru Ionel (2471, 2, 83, 5, 8—91), Petrescu Viorica (2467—9, 71, 2, 4, 5, 8).

fila 15

BOTOŞANI *S. g.* 4 cl. VIII Tinichigiu Aurel (2467, 70, 4, 8, 81, 3, 4, 9, 95, 7, 500).

BOZOVICI (Banat) *S. g.* cl. V Voverca Maria (2464, 5, 7, 79, 81, 3, 4, 9), cl. VIII Ignea Ana (2464—72, 4—7). *L. 1* cl. VIII Craşovan Mariţa (2464, 70—2, 4, 5, 7, 8, 80, 3—5, 8—94; 7494, 5), Piescu Călina (2476, 9, 80—5, 8—92, 4—501, 3—6, 8, 9; 7444, 502, 54), cl. X Doncea Ion (7425, 80, 95, 7, 534, 6, 8, 54, 5, 64, 512, 21, 3).

BRAD (Hunedoara). *S. g. 2* cl. VII Trufaşu Dan (2464—7, 72, 3, 9—85, 9—91, 5, 7, 9, 500, 5, 8, 10; 7438, 42, 92, 5).

BRAŞOV. *S. g.* 6 cl. VI Zsido Eva (2479, 80, 2, 3, 5, 6, 95, 9, 500 1, 5), cl. VIII Munteanu Adrian (2480—4, 6, 9, 512—4, 7, 9), Runcanu Elena (2482, 9, 506, 12, 3, 5—8, 22), *S. g. 12* cl. V. Ştefănescu Dan (2465—8, 801, 3, 5), *L. 1* cl. X *Bătătorescu Anton* (7423—6, 8, 30, 2, 7, 42—4, 7—50, 2, 4, 5, 64, 74—83, 5, 90, 1, 3, 5, 6, 9, 501, 2, 4, 11, 4, 29, 34, —8, 43, 51, 3—5, 7) *L. 4* cl. VIII Barbu Gabriela (2495, 7—9, 501, 3 9, 12—8). Stan Adriana

BRAILA. *S. g. 4* cl. VIII Ciocla Valeriu (2465, 7, 9, 71, 2, 81—5, 8, 90—2), Dumitru Gh. (2464—6, 71, 2, 9, 81, 3, 4), *S. g. 10* cl. VI Florescu Liliana (2464—6, 70, 81—4, 6, 90), *S. g. 18* cl. VII Vintilă Tiberiu (2467, 71, 2, 80, 1, 3, 8, 9). *S. g. 22* cl. VII Mihalaşcu Cornelia (2480, 1, 3, 4, 9, 95, 7, 9—501, 8), cl. VIII Dragomir Gh. (2480, 1, 3—5, 8—92, 5, 8, 503), Strîmbeanu Fani (2471, 2, 4, 5, 80, 2, 3, 5), *L. 3* cl. X Enciu Dan (7430, 41, 90, 4—7, 9, 535, 35—8), Lemnaru Liana (7475—80, 2, 4, 90, 1, 3—5, 7, 9, 500, 2, 5, 6, 27, 9, 35, 6, 8, 52, 4, 610, 2, 4, 8, 9, 23), cl. XI Bucur Camelia (7479, 90, 7, 9, 529, 34, 6—8, 54, 612, 21)

BREAZA (Ploieşti) *L. 1* cl. IX Apostol Ion (2474—8, 92, 4, 508, 9; 7502, 52, 4, 6), cl. X Aldescu Constantin (7423—5, 37, 47—50, 2, 4, 90, 4—6, 9, 534—54), Bunghez Ion (7423—6, 30, 2, 7—9, 42, 5, 50, 2, 3, 95, 6, A, Iermuţan Eugen (7426, 42, 8, 64, 80, 3, 90, 5, 7, 9, 520, 35, 6, 54), *L. militar* cl. X Rizea Ion (7423—5, 30, 7, 41, 50, 2, 80, 2, 90, 5, 6, 9, 514, 29, 34—8).

BRUSTURI (Crişana). *S. g.* cl. VII Demian Ion (2464, 5, 80—3, 90, 500, 4), Popovici Ana (2464, 5, 70, 80, 1, 4, 95, 500), cl. CIII Ciuciu Maria (2464—7, 70, 80—4, 9, 95, 504).

BUCUREŞTI. *S. g. 3* cl. V *Grigore Elena* (2465—96, , 503, 6, 9; 7551—6), S. g. 5 cl. VI Streja Dan (2465, 7—9, 81, 3—5), cl. VII Apa Tiberiu (2471, 6, 95, 9, 508, 20, 3, 4, 6, 7; 7623, 4), Rotaru Cristina (2465, 6, 8, 70—2, 512, 3), *S. g. 26* cl. VI Rostol Raluca (2464—8, 70, 81—4, 9), cl. VIII *Rovenţa Daniela* (2465, 7, 8, 70—2, 4, 5—8, 80—5, 8—92, 4, 512—20, 22, 27; 7494, 5), *S. g. 28* cl. VIII Saraga Mircea (2474, 5, 7, 92—4; 7494—6), *S. g. 50* cl.VII Ianuş Gh. (2466, 70, 95, 7, 500, 1, 5, 9, 16, 7, 20, 2), *S. g. 21* cl. VII Petrache Adrian (2464—8, 70, 1, 3, 6, 7), *S. g. 73* cl. VI Dumitrescu Dan (2468—70, 82—6, 99—501), *S. g. 75* cl. VII Zanea Luminiţa (2465—8, 71—3, 6, 81—3, 95, 500, 1, 5, 12, 3—6, 20, 3), cl. VIII Zirimis Mihail (2464—8, 71—8, 80, 1, 3ă5, 8—90), *S. g. 97* cl. VI Georgescu Cristian (2483—6, 517, 9, 24, 5), *S. g. 121* cl. VIII Donescu Florin (2485, 8—92, 4, 8, 8, 503, 4), *S. g. 145* cl. VI Micherian Mariana (2479, 80, 4, 9, 512, 3, 5, 20), cl. VIII Crivei Mihaela (2470, 80, 4, 9, 500, 13—8, 23), *S. g. 150* cl. VII Alimescu Brînduşa (2473, 7, 520, 2—4; 7444, 54, 6), *S. g. 151* cl. VIII Muscalu Doru (2480, 2—5, 8—90, 2, 4; 7480, 91, 4—7, 9, 501), *S. g. 156* cl. VIII Ştefănescu Dan (7439, 42, 3, 5, 76. 7, 91, 4—7, 501, 2), *S. g. 166* Constantinescu Viorel (2479—81, 97, 512, 3, 5, 6), cl. VIII *S. g.*

169 cl. VII Florescu Cristina (2476, 88, 9, 505, 9, 20, 3, 5, 6), Ivanier Lucia (2480—5, 8—90), cl. VIII Vijelie Luminița (2464, 5, 7, 8, 70—3, 5—8; 7438, 42, 4, 8, 54), *S. g. 173* cl.VI Andrie, vici Bogdan (2466—8, 70—2, 9, 80), absolvent Georgescu Mihai (7424, 6—8, 30, 2—8, 41—4, 9—52, 4, 6, 60, 4—7), →. *1* cl. IX Năstase Adrian (2475—8, 94, 509, 10, 24, 7, 401, 4; 7552), *Varadi Petre* (2474—8, 92, 4, 508, 9, 24—7; 7423, 6, 37, 8, 41, 2, 4, 5, 7, 91, 4, 5, 7, 502, 21, 52, 4, 608—90, 7—20, 3), cl. X Andrei Aurel (7444, 42, 4, 76, 7, 9, 60, 3, 90, 505, 36 36, 54, 6, 60), Brăileanu Ana (7423, 5, 7, 49, 50, 4, 77, 82, 90, 4-6, 9), Georgescu Dan (7423, 5, 6, 8, 33, 7, 41, 4, 50, 2, 4, 75—82, 90, 4-6, 9, 502), Georgescu Mihaela (7475, 8—80, 91, 3—7, 502, 56, 8), Hahn Radu (7423—6, 8, 32, 7, 47, 8, 50, 2—4, 70, 6—83, 90, 1, 4—7, 9—501, 11, 4, 27, 9, 36, 7), Ionescu George (7477, 9, 80, 90, 2, 4—7, 9, 500, 5, 29, 34, 8, 54), Popa Cornel (7423—5, 79, 80, 2, 90, 4—7, 9, 500, 2, 5, 11, 4, 28), Tronaru Aurelian (7423—69, 50, 2, 4, 80, 534—81), cl. XI Teișanu Cornel (7423, 4, 6, 8, 54, 77, 9, 80, 2, 90, 3—7), *L. 4.* cl. X Lincă Gh. (7423—6, 8, 37, 41, 9, 50, 2, 77, 9, 82, 510, 34—8, 52, 62), *L. 6* cl. VI Dumitrescu Gabriela (2464—70, 512, 7), cl. X Staffel Pavel (7426, 48, 50, 4, 2, 79, 80, 4, 529, 34—8, 612, 4, 23, 4), *Manolache Nicolae* (7311, 5, 30, 4, 5, 8, 40, 2, 3, 6, 56-60, 2, 71—6, 8, 9, 87, 91-3, 5, 6, 8, 400, 3, 4, 7, 10, 3, 6, 8, 21—5, 30, 2, 5, 7, 59, 62, 70, P) *L. 6.* cl. VIII *Weiner Irina* (2464—78), *L.7* cl. VI Cutoiu Dan (2482—4, 9, 500, 1, 16, 7, 20), cl. VIII Niculescu Irina (2464—75, 7—86, 8—92, 4), Redlinger Daria (2464—75, 7—86, 8—92, 4), *L. 8.* cl. VIII Floreanu Ilinca (2464, 7, 9, 81, 3, 4, 9, 99, 500), *L. 10* cl. VIII Brateș Nanu (2464, 6, 8, 71—3, 80, 3, 5, 501; 7495), Gafița Gabriel (2466, 7, 9, 70, 83, 4, 9, 95, 7, 502; 7495, 550, 1, 4), clasa X (Mihăileanu Nicoleta (7423, 37, 9, 77, 552, 5, E: 2475, 92, 508, 50, 2) Pătrîngenaru Victor (2464, 5, 7, 73, 80—5, 8—90, 95, 9, 501), cl. X Apostolescu Anca (7423, 5, 49, 50, 2, 4, 529, 36—8, 60, 3), *Popescu Anca* (7432, 5, 6, 47, 9—52, 4, 72, 80, 2—4, 509—12, 4, 6, 28, 9, 34—8, 60—7, 80, 612—4, 8, 22) *L. 11* cl. IX Alexandru Ion (2492, 4, 509; 7428, 41, 75—8, 91, 4—6, 502), Anton Paul (2474, 5, 92, 4; 7475—8, 90, 4—6, 502, 3, 5), cl. X Vlăduțescu Radu (7423—6, 8—30, 2, 45, 78—81, 3, 90, 4—500, 11, 29, 34—7, 8, 608, 17, 9, 20, 1, 3, 4). cl. XI Bădescu Constantin (7423—6, 30, 7, 41, 50, 2, 75, 7, 90, 4—6), Lutașu Marius (7423—30, 5, 7, 42, 7, 50, 2, 4,510), *L. 12* cl. VI Rizescu Marieta (2461, 8, 7, 79, 80, 2—4, 9, 512—7, 9; 7495, 502), cl. X Chiribou Cristian (7423— 6, 8, 30, 7, 44, 50, 2, 75, 7, 9, 80, 2, 90, 3, 6, 7, 9, 500, 2, 10, 38, 56), Livianu Ervin (7425, 6, 48, 50, 2, 77, 9, 80, 90, 1, 4, 5, 514), Petrescu Cătălin (7423—5, 49, 50, 77, 96, 7, 500, 34, 54, 612, 323) *Ralescu Dan* (7317, 8, 20—3,5, 6, 8, 30—3,5 ,9, 42, 7, 8, 51, 4, 8, 64, 73—5, 7, —9,95 7, 401, 2, 7, 0, 3, 6, 8, 20, 2, 3—5, 30, 2, 3, 7, 9, 41—4, 6, 9, 50, 2, 4 8, 65, P). Cl XI. Cartianu Dan (7699, 700, 2, 4, 6, 8, 10, 23, 42, 57, 62, 3, 5, 7, P, N), *Bărcănescu Șerban* (7629, 32, 4—8, 32, 3, 8, 50—6, 63—5, 7, 70, 7, 80, 90, 1, 3, 7—9, 601, 9, 10, 2—4, 7—24, 35, 7, 8, 40—3, 5, 6, 60, 1, 3, P). *L. 13* cl. IX *Mahalischi Andrei* (2464—9, 71—8, 80—5, 8, 90—5. 8, 90—5, 9—501, 3, 4, 8, 9), cl. X *Petrescu Andrei* (7475—83, 90, 1, 3—502, 5, 7, 9—11, 27—9, 34—8, 40, 41, 4—6, 8, 62, 4, 5, 80, 93, 601, 8, 9, 12—4, 7—24), lc. XI Turja Horațiu (7450, 91, 6, 7, 506, 8, 12, 4, 29, 59, 63), *L. 15* cl. V Cernica Ruxandra (2464—9, 72, 80, 1, 3), cl. IX Antonescu Bogdan (2474—8, 92—3; 7437, 41, 75, 90, 4—6, 502, 5), cl. XI Duțescu Gabi (7477, 8, 83, 7, 90, 3—9, 502, 5, 27, 9, 34—8, 54, 71, 4, 610, 5, 7—21, 3), *L. 16* lc. VIII Drăgușin Alex. (2464—8, 70—6, 8; 7423, 38, 52, 4, 80), *L. 17* cl. X Avrămoiu Valentin ((7493, 503, 13, 28, 9, 34—8, 42, 50, 1, 3—6, 8, 60, 2, 4—7, 77, 90, 8, 9, 605, 8—14, 7—23), *L. 18* cl. XI Musceleanu Ion (7427, 9, 35, 7, 41, 2, 7—9, 51, 3, 4, 65, 70, 8, 501, 9, 10, 29, 34—6, 54), *L. 22* cl. IX Alimescu Andrei (2492, 4, 509, 24, 7; 7441, 4, 77, 94—7, 502, 50, 2, 4—6), Atanasiu Dragu (2475; 7425, 30, 2, 7, 45, 8, 50—2, 4, 70), cl. X *Strujan Vladimir* (7423—6, 40, 7, 41, 2, 4, 8, 50—4, 62, 4, 75—8, 82—4, 90, 1, 3, 5—7, 505, 9—11. 4, 25, 7—9, 34—8, 51, 3—6, 60, 3—7), cl. XI *Cristaloveanu Sorin* (7423—6, 40, 7, 8, 47—52, 4, 75, 7, 9—83, 5, 90—502, 5, 9—11, 4, 27—9, 34 8, 52, 4, 5, 60, 5, 85, 605, 10, 2—4, 7—23, 5), *L. 24* cl. VIII Weintraub Andrei 2464—8, 71—6), *L. 26* cl. X Cotariu Roland (7425, 37, 42, 8, 52, 4, 77, 9, 80, 2, 94—7, 9, 511, 25), *L. 28* cl. VIII Alexandrescu Puiu (2528, 33, 4, 7, 8, 42—4), Constantin Petre (2512—27), Mariotti Alexandru (2512—27), Petcu Vasile (2495, 502, 3, 5, 9, 10, 3, 5 8—20 2, 4), l. IX Gortner Ion (2494, 506, 9, 22; 7477, 94—6, 502, 3, 5, 52), cl. X Teodorescu Daniela (7423—6, 47, 8, 50, 4, 97—92, 94—7, 9, 510, 1), *L. 30* cl. IX Platz Alexandru (2493, 4; 7437, 8, 40, 2, 4, 52, 4, 76, 7, 80, 90, 6, 502, 5, 8, 27. *L. 32* cl. VIII. Celenti Dan (E = 2495, 7,—501, 3, 9, 12,—20,2—7) *L. 33* cl. VII Niță Mariana (2479—84, 8, 9), *L. 35* cl. VIII Delangelo Florin (2464, 6, 7, 70—5, 8; 7438), *L. 36* cl. VI Carabineanu Adrian (2470, 2, 80—5, 9), cl. VIII Logofătu Anca (2464—73, 6—85, 8—92, 4—501, 3—9), *L. 37* cl. X Biro Lucian (7426, 77, 90, 1, 90, 1, 4—7, 9, 505, 29, 34—8), Stan Elena (7450, 4, 94—7, 9, 536, 7, 48, 55), *L. 40* cl. VII Constantin Radu (2464, 7, 72, 3, 7, 82, 9, 90), cl. IX Constantin Cornel (2476, 8, 94, 509; 7442, 4, 502, 4, 6, 52, 5 4,).

BUHUȘI (Bacău) *L.* 1 cl. VI Aciobăniței Maria (2414-8, 70, 9, 80, 2—5).

BUȘTENI (Ploiești) *Ș. g.* 1 cl. VII Manolescu Horia (2467—9, 81, 3, 4, 9, 95, 7, 500)

BUZĂU. Absolvent Popa Marcel (7425, 9, 30, 7, 82, 3, 90, 4—7, 9, 505, 7, 27, 36), *L.* 1 cl. VIII Burloi Maria (2476, 92, 5, 8—500, 3, 13), Constantinescu Ștefania (2482, 95, 8, 501, 12, 3, 5—8), Grigorescu Adriana (2495, 8, 503, 4, 12, 3, 5—20, 2, 8, 9, 31, 2, 4, 5, 8, 42),

Trifu Mioara (2467, 8, 72, 80—5, 8, 90, 2, 5, 8, 9, 503, 9), cl. IX Alexe Dan (2492, 4, 509, 24; 7494, 5, 5502, 4, 29, 53, 4, 6, 609), cl. X *Gavrilă Șerban* (7444, 51, 62, 78, 84, 99—505, 9—11, 3, 4, 6, 25—9, 34—8, 42, 3, 6, 50—2, 4—6, 60,1, 3—5, 7, 8), Mihăilescu Tiberiu (7423—6 30, 7, 8, 41, 2, 4, 5, 7—54, 70), cl. XI *Marinescu Marian* (7423—5, 30, 2, 7, 44, 8, 50, 2—4, 9, 69, 70, 9, 80, 501, 2, 4, 10, 1, 4, 6, 20, 1, 5—7, 9, 32, 6—8, 54, 5), Săraru Aurel (7423, 48, 50, 75—9, 81, 2, 4, 90, 1, 4—7, 9, 502, 5), *L.* 2 cl. IX Constantin Nicolae (2492, 4; 7438, 75—8, 91, 4—7, 500, 2), Casa de copii cl. VIII Vester Gherda (2464, 6—8, 71, 2, 4, 99, 500).

BUZIAȘ. *L.* 2 cl. VI Drăgan Viorel (2465, 8, 9, 71, 80—5, 9, 90), Molnar Alexandru (2465, 8, 9, 81, 3, 5, 90), cl. VII Micșa Rodica (2464—8, 71, 81, 3, 9).

CALAFAT. *L.* 2 cl. IX Diaconu Rodica (7439, 40, 2, 74, 5, 6, 8, 94—6, 502, 5, 7—9, 8k 52, 4, 5).

CARACAL. *L.* 2 cl. IX Alexandru Alexandru (2509, 10; 7534, 48, 51, 2, 4—6, 93, 608, 10, 8—22), cl. X Geambașu Ion (7423, 5, 6, 41, 50, 77, 8, 80, 90, 5—7, 588, 35, 6, 8), cl. XI Vîrtosu Mihail (7423—5, 30, 2, 7—9, 41, 2, 4, 6, 7, 9—54, 70, 4, 7, 9, 80, 2, 90, 4—6, 9, 507, 9, 10, 4, 6, 27).

CARANSEBEȘ. *L.* 2 cl. VI Poiană Dinu (2473, 95—7, 9—501, 12, 4—6, 20), cl. VII Poiană Zoe (2464, 5, 7, 70—3, 81, 3, 4, 9), Romanescu Adrian (2464—7, 9, 70, 82—4), *L.* 2 cl. V Stan Margareta (2480, 2, 3, 94, 512, 3, 6, 25), cl. X *Bortolf Fred* (7423, 5, 6, 8, 37, 8, 41, 4, 8—50, 2, 4, 75—82, 4, 90, 1, 3—7, 9, 500, 2, 3, 5, 7, 34—8, 50, 2, 4—6, 60, 5).

CALAN (Hunedoara) Absolvent Cubineț Ioan (7426, 8, 9, 42, 8—50, 3, 6, 66, 8, 75—7, 9, 80, 2, 3, 7, 94, 6, 9, 501, 5, 9, 11, 3, 4, 6, 20, 5, 7, 54, 6, 60, 4, 7), *L.* s cl. VII Bal Corneliu (2464—8, 70—2, 5, 6, 8), cl. VIII Tataridis Gheorghița (2480, 1, 3, 4, 8—90, 4), cl. IX Anghel Tamara (2476, 8, 92, 4, 509, 41, 2, 441, 78, 94—6), cl. X Stanciu Alexandru (7423—5, 37, 42, 7, 9, 50, 2, 4, 79, 80, 504, 14, 25, 7).

CĂLĂRAȘI (București) *L.* 1 cl. X Mihăescu Tudor (7423, 6, 8, 38, 77, 9, 82, 3, 502, 11, 27, 8).

CEICA (Crișana). *Ș. g.* cl. VII Coița Vasile (2495, 7, 9, 512—7, 20, 4).

CELARU (Oltenia) *Ș. g.* s cl. VIII Andrei Cormena (2467, 88, 91, 515—20, 2, 4, 8, 38).

CIOCIRLA (București) *Ș. g.* cl. VII Coloianu Angela (2465, 7, 9—71, 3, 6, 80—4, 174, 95).

CÎMPENI (Cluj) *L.* s cl. IX Mucea Ioan (2474, 5, 7, 92—4; 7438, 41—4, 76, 7, 503, 55), cl. XI Mateș Ilie (7423, 5—9, 92, 3, 8, 50, 2, 69).

CÎMPIA TURZII *L.* 3 cl. V Cîmpean Maria (2480, 1, 3, 95, 7, 512, 4, 5), cl. XI Selegean Horia (7426, 36, 8, 50, 4, 7, 80, 91, 5, 501, 29, 35).

CÎMPINA (Ploiești) *Ș. g.* E cl. VI Stoican Aurel (2464—7, 84, 513, 5, 7, 20), cl. VIII Butnaru Sorin (2512, 3, 5—7, 9, 20, 4), *L.* s cl. VIII Romașcanu Rodica (2471, 2, 4, 8, 83, 4, 8, 9, 513, 5—7, 9, 22), cl. IX Grădinescu Victor (2460—3, 74—6, 92, 4, 508, 9; 7399, 437, 4276, 95, 6, 505, 56), Vlad Lucian (2474—6, 92—5, 509, 10; 7477, 8, 94—6, 554), cl. X *Alexandriu Doru* (7423—6, 8, 30, 2, 5, 7, 8, 42—4, 8, 50, 2, 4, 62, 4, 7, 75—84, 90, 1, 3—502, 4, 5, 9, 11, 3—5, 21, 5—8), Dumitrescu Ruxandra (7423, 5, 6, 8, 9, 37, 70, 7, 94—7, 9), Dumitru Rodica (7477, 82, 3, 90, 4—7, 9, 534—8), Stoian Luminița (7477, 80, 2, 90, 1, 4—7, 9, 529, 34—8), Văcăroiu Toana (7475, 8, 80, 93, 529, 34—8, 53, 4, 6, 608, 12, 9). *L.* T cl. IX Căpraru Marian (7475—8, 94—6, 502, 50, 2—4, 608, 9; 2492, 4, 509, 10, 24—7), Muscaliuc Valeria (2475, 7, 8, 92, 508, 9; 7494—6, 529, 50, 4), Vișa Florian (2492—4, 509, 7477, 8, 91, 2, 4—6, 502, 4, 608, 9, 10), cl. X Irimescu Nicolae (7425, 80, 3, 90, 4—7, 9, 529, 34—8), Surugiu Dan (7336, 480, 3, 90, 4—6, 9, 527, 9, 35, 7, 8).

CÎMPULUNG MOLDOVENESC. *L.* 2 cl. XI *Popescu Ovidiu* (7442—4, 6, 8—50, 2—4, 62—4, 7, 8, 70, 5—9, 82—4, 90, 1, 3—7, 9—502, 4, 5, 14, 6, 21, 7), *L. militar* cl. X Ababei Mihai (7426, 50, 77, 80, 90, 4—6, 8—500, 2, 36). *Absolvent. Lău Gheorghe* (7423—5, 8—30, 2, 5, 7, 9, 41, 7, 9, 51, 2, 6, 60, 2, 4—6, 9, 75, 7, 80, 2, 5, 7—90, 509, 10, 4, 6, 20, 7, 8, P).

CÎMPULUNG MUSCEL. *Ș. g.* 1 cl. VII Tudose Florin (2466, 8, 71, 9, 81, 3, 4, 9), *L.* 1 cl. X Balaban Ion (7476—81, 90, 1, 5—7, 9, 529).

CLUJ. *Ș. g.* T cl. VIII Comănescu Sorin (2465—74, 6—8), *Ș. g.* 7 cl. VIII Zglobiu Nicolae (2466, 7, 9—73, 9—83), *L. M. Eminescu* cl. X Pop Maria (7425, 37, 52, 4, 77, 80, 2, 94, 6, 9, 502, 35, 6, 8, 52, 4), *L.* 4 cl. VI Țintea D. (2465—7, 71, 81—3, 500), *L.* 5 cl. VII Pușcă Mircea (2481, 3, 95, 504, 13, 5, 6, 25), cl. VIII Comșa Doru (2513, 5—9, 22, 3), Iancic Bubu (2477, 92, 513, 5—8, 20, 4, 6), Ardentlich Ana (2480—5, 8, 90—2, 5, 9, 500, 9, 12—6, 8, 20—2), *L.* 8 cl. VII Juga Doina (2466, 82, 95, 502, 7, 16, 7, 9), Oargă Horea (2464, 70, 81—4, 95, 512, 3, 6, 7), cl. VIII Kaytor Maria (2464—78), cl. XI Tudoran Tudor (2474—6, 8, 92, 4; 7437, 8, 41, 50, 75—8, 80, 91, 4—6, 500, 27), cl. XI Oroș Lucian (7423, 4, 32, 7, 9, 44, 7, 50—2, 4, 68, 70), *L.* 10 cl. VII Melnițchi Elisabeta (2470, 3, 84, 9, 5, 8—501, 8), *L.* 15 cl VI Iancic Pepinella (2481, 5, 8, 517, 9, 20, 6, 8, 31), cl. VII Olteanu Doina (2465—7, 76, 9, 80 1, 3, 9), Șchiopu Ninela (2464, 70, 81, 3, 4, 9, 91, 2, 500, 8, 13), Topîrdău Georgeta (2464—7. 9, 81—4, 9) *Grupul școlar Construcții* An I Sava Petru (*E*: 2471—4, 6—8, 87—90, 2, 7437, 41).

COCĂREȘTI-MISLII (Ploiești), Absolvent Cimpoiașu Gh. (2464—8, 70—5, 7, 8).

COMARNIC (Ploiești) *L.* s cl. IX Buzatu Constantin (7423—6, 42, 44, 50, 2, 4, 78, 90, 3—8, 502, 11, 4, 29, 34—8, 52, 4, 65).

COMĂNEȘTI (Bacău) *L.* 1 cl. IX Sova Viorel (2492, 509, 7423, 6, 30, 77, 8, 90, 1, 7, 9, 554).

CONSTANȚA. *Ș. g.* 12 cl. VIII Contanu Mihai (2464, 5, 8, 71, 2, 4, 80, 1, 3—5, 8—91), *L.* 2 cl. VIII *Petrășescu A.* (2464, 5, 7—72, 4, 7, 8, 81, 3—5, 8—92, 4, 5, 9—501, 3, 4, 6, 7, 9, 12—22, 4, 7), cl. IX Ionică Ștefan (2477, 92; 7423, 42, 75—7, 90, 3, 4, 6, 500, 2, 7, 10, 20), cl. X Nițu Nicolae (7423, 5, 6, 8, 37, 41, 2, 7, 8, 50, 2, 4).

CORABIA (Oltenia) *L.* 2 c. X Mihai Gh. (7423, 5, 6, 43, 7, 8, 50, 529, 34, 6, 8, 51, 3—6, 65), Vijdea Nicolae (7423, 5, 32, 7, 47, 50, 77, 94—6, 502, 54, 608), cl. XI Orzață Petre (7423, 5, 77, 80, 90, 4, 6, 503, 14, 35—8, 62).

CORBENI (Argeș) *L.* cl. X Vlaicu Ileana (7509, 10, 4, 29, 34, 6, 7, 42, 3, 8, 50, 60, 1, 4—6, 8).

CORBU (Argeș) *Ș. g.* Voiculeț Eugenia (2464, 5, 7, 8, 70, 9, 82, 3, 8, 512, 5, 6, 20, 2).

COSTEȘTI (Argeș) Absolvent *Negurescu Nicolae* (2423—5, 30, 2, 7, 42, 4, 8, 50, 4, 62, 5, 6, 9, 75, 80, 3—97, 9—511, 5, 29, 32, 4, 8, 44, 8, 52, 4—7, 70, 3, 609, 10, 2, 4, 6, 7, 9, 21, 62).

COTATCU (Ploiești) *Ș. g.* cl. VII Iorga Gh. (2465, 6, 9, 70, 2, 6, 80, 1, 3—5, 8—91, 2, 5, 9, 503, 8).

CRAIOVA. Absolventă Paveliu Florica (7423, 5, 7, 33, 7, 52, 6, 7, 66—77, 87, 90, 501, 5, 7, 11, 20, 1, 34, 5), Teodorescu Liliana (7444, 52, 75—7, 90, 1, 3, 529, 1, 3, 529, 34, 7, 8, 52, 4), *Ș. g.* 7 cl. 7 Posoiu Paul (2466, 7, 70, 83, 4, 9, 501, 8), *Ș. g.* 8 cl. VI Marcu Nicolae (2481, 2, 3, 500, 8, 12, 6, 7, 26), *Ș. g.* 9 cl. VIII Voicu Eugen (2464—8, 70, 83, 4, 9), *Ș. g.* 10 cl. VI Săndulescu Rodica (2464—7, 80, 1, 95, 7, 8), *L.* E cl. VIII Panovescu Cristina (2481—5, 9—91, 4), cl. X Dumitru Gh. (7423—5, 52, 80, 2, 96, 7, 9, 529, 34—8, 48, 60, 2, 612, 4, 23, 39, 40, 2, 59, 62, 3), Gavrilescu Elvira (7478, 9, 80, 502, 29, 34—8, 52, 4), Turcu Ilie (7423—6, 32, 7—41, 4, 5, 7—50, 2, 4, 67, 8, 75, 7, 9, 80, 2, 3, 90, 4, 5, 9, 502, 5, 11, 4, 6), cl. XI Pătra Cristian (7438, 9, 44, 55, 67, 75, 6, 8, 81, 4, 93, 5, 7, 8, 500, 1, 5, 11, 3, 25—9, 34—8, 42, 8, 50, 2, 4—6, 60, 8), Tepuș Nicolae (7423, 5, 6, 8, 30, 2, 8, 41—4, 8—52, 4, 6, 64, 7), *L.* 2 cl. IX Aștefanei Ion (2477, 92, 4, 509; 7438, 42, 3, 502, 5, 52—4), Dumitrana Irina (2492, 4, 509, 10; 7444, 76, 91, 4—6, 502, 4, 5, 54), Mitrică Stelian (2493, 4, 509; 7438, 44, 76, 95, 6, 502, 5, 54, 608), Păducel Nicușor (2492, 4, 509; 7438, 44, 76, 95, 6, 502, 5, 54, 608), Vicol Dan (2474—7, 509; 7437, 42, 75, 8, 94—6, 554), cl. X Alexandru Decebal (7423—6, 37, 49, 50, 2, 77, 94, 5, 9, 527, 9, 35, 8), Circiumărescu Dan (7423—6, 37, 49, 50, 2, 529, 35, 8, 54), Croitoru Adrian (7423—6, 30, 2, 64, 77—80, 3, 90, 1, 4—9), Duicu Alexandru (7423, 5, 6, 30, 2, 7, 8, 41, 7, 50, 2, 4, 75, 7, 9, 80, 2, 3, 90, 3—7, 9, 500, 2, 5, 9—11, 25, 7, 8), Nigrini Adrian (7438, 44, 54, 76, 9, 80, 2, 90, 1, 4—6, 502, 5, 54), Sarivan Ion (7423—5, 37, 50, 72, 9, 80, 90, 9, 505, 10, 22, 8), Turturică Elena (7477, 9, 82, 90, 4—6, 9, 529, 34—8, 54, 6), cl. XI Guran Tiberiu (7423—5, 30, 2, 7, 8, 41, 7, 50, 2, 4, 75, 7, 9, 80, 2, 3, 90, 1, 3—7, 9—501, 5, 27—9, 34—7), *L.* 3 cl. IX Neagoe Iuliana (2480—5, 8—92, 512—20), cl. X Paveliu Amorelia (7423—5, 37, 52, 90, 505, 11, 35—7), Vancico Oprea (7490, 4—6, 7, 9, 511, 4, 6,29, 36—8, 54), cl. XI Popa Ion (7479, 90, 2, 4—9, 511, 4, 34—8, 617, 21), Teodorescu D.(7494—6, 500, 37, 41, 4, 50, 2, 4, 77, 90, 9), *L.* o cl. XI Ionică Alexandru (7423, 5—8, 30, 69, a (7423—6, 29, 34—6, 55, 64, 608, 10, 5, 7, 23), Georgescu Sergiu (2467, 8, 71, 2, 4—6, 8), cl. XI Teodorescu Dobă (7448, 75, 6, 9—81, 4—7, 502, 14), Ciociltea Elisabeta (7429, 80, 2, 3, 90, 4—7, 9, 502, 5).

CUDALBI (Galați). *Ș. g. 1* cl. VI Pojoga Constanța (2464, 6, 82, 4, 5, 8, 9, 97, 500), Pojoga Elena (2464, 6, 72, 4, 5, 82, 5, 8, 9, 95, 7, 500), cl. VII Barbu Gherghina (2466, 72, 4, 82, 9, 95, 7, 500, 2, 8), Lungu Georgeta (2464, 6, 82, 5, 8, 9, 95, 7, 500).

CURTEA DE ARGEȘ. *Ș. g. 5* cl. VIII Soare Elena (2471, 9, 83, 4, 8, 513, 5—9, 22), *L. 1* cl. IX ... Gheorghe (2474—8, 92, 4, 508—10, 7475—8, 502, 44), cl. X Mircescu Gheorghe (7423, 4, 6, 37, 42, 82, 90, 1, 4—7, 9, 529, 34—6, 8, 54, 6), Nițulescu Gh.. (7423—6, 8, 30, 2, 50, 64, 76, 7, 9—81, 3, 90, 3—7, 9, 500, 14).

DĂBULENI (Oltenia). *L. 1* cl. IX Negriţoiu Mișu (2474, 6, 7, 94, 509; 7423, 40, 76, 7, 91, 4, 5, 7, 502, 7).

DĂRMĂNEȘTI (Argeș). *Ș. g.* cl. VI *Dumitrache Aneta* (2464—505).

DEDULEȘTI (Argeș) *Ș. g.* cl. VIII Popescu Marilena (2465, 71, 2, 5, 80, 3, 4, 90—2, 5, 503).

DEJ (Cluj). *L. 1* cl. IX Petre Dan (2474, 7, 92, 4; 7437, 8, 41, 75—7, 94—6, 554), *L. 2* cl. VIII Morariu Marcel (2464—8, 70—2, 2, 5, 8—92), cl. IX Galiș Dumitru (2474, 6, 92, 4, 509; 7437, 41, 77, 94—6, 502), Lerțoiu Bogdan (2476, 7, 94, 509, 10; 7437, 41, 2, 75—7, 502, 52), cl. X Filip Ion (7425, 52, 4, 77, 80, 94—7, 9, 534—8), Giurgea Laurențiu (7424, 5, 8, 32, 52, 78—80, 2, 94—6, 9, 502, 29, 36, 8, 58), Iacob Remus (7424—6, 37, 50, 77, 80, 94—7, 9, 514, 35—7, 54).

DETA (Banat). *L. 1* cl. VI Diomici Corina (2479—86, 8—92), cl. VII Microfan Cornelia (2495—502, 4, 6, 8).

DEVA (Hunedoara). Absolvent Herban Virgil (7423—6, 8, 9, 37, 50, 2, 4, 77, 90, 4—7, 9, 20, 9, 35—8, 54, 717, 21), *L. 1* cl. IX Mihăiță Nicolae (2474—8, 92, 4; 7423, 5, 8, 37—9, 41, 2,4, 50, 2, 75, 7, 80, 90, 4—6, 9, 501, 3, 5, 14, 25, 6).

DOLHASCA (Suceava). *L. 1* cl. X Iosubescu Dan (7426, 50, 77, 9, 81, 90, 5—7, 9, 505, 11, 29, 34—8, 52, 5, 64), cl. XI Alexandrescu Clement (7443, 7, 50, 2, 70, 6—80, 2, 91, 4—7, 9, 502, 7, 11).

DOROHOI. *Ș. g. 1* cl. V Avram Sorin, Brînzei Lucia, Coroi Virginia, Leizerovici Lăzărică (2464—7, 80, 1, 3, 5), cl. VI Grădinaru Vasile (2464, 70, 9, 84, 6, 500, 2), cl. VII Moravei Teodor, Nicorici Constantin, Turcu Laurențiu (2464—7, 80, 1, 3, 4), *Ș. g. 2* cl. VIII Hania Fania (2495, 500, 2, 16—20), *L. 2* cl. VIII Avram Ghidi (2465—7, 71, 2, 8, 81, 3—5, 9), cl. X Avram Iancu (7423, 5, 6, 50, 2, 4, 77, 9, 80, 90, 4—9, 505, 14).

DRĂCȘANI (București) *Ș. g. 1* cl. VIII Dorobanțu Petrică (2464—8, 70—8).

DRĂGĂNEȘTI (Olt). *L. 1.* cl. X Rotaru Dan (7423, 30, 42, 76—83, 94—7, 9, 502).

DRĂGĂȘANI (Argeș). Absolvent Stelea Constantin (7475, 7, 80, 2, 7, 8, 90, 1, 4—7, 9, 500, 5, 7, 14, 20, 7, 9, 34—8, 48, 55, 62, 72, 8, 80, 60, 10, 10, 2, 7, 9, 21), *L. 1* cl. IX Palaghia Tudorin (2474, 6, 8, 92, 4, 509; 7437, 41, 75—7, 94—6, 52, 4), Popa Nicolae (2474, 6, 8, 92, 4, 509; 7476, 7, 94—6, 502, 52, 4), cl. XI Croitoru Toma (7423, 5, 6, 42, 52, 4, 70, 94—6, 9, 554), *Țițu Gh.* (7423—6, 8, 37, 42, 4, 9—52, 4, 7, 66, 77—80, 96, 7, 9, 502, 57,7, 16, 25, 9, 35—8, 65, 612, 4, 7, 9, 21—32). Absolvent *Ortocol Gheorghe* (7397, 401, 4, 15, 47, 9, 6—9, 88, 90, 3—9, 502, 5, 7, 9, 14, 9, 32, 4—8, 44, 50, 4—6, 60, 3, 5, 7, 70, 2, 630, 8, 9. 42, 6, 7, 9, 50, 2, 3, 63, P, N).

FĂGĂRAȘ. *Ș. g. 5* cl. VII Gherasimov Adrian (2514—21, 3), L. 1 cl. VIII Laschescu Doru (2464—72, 4—8), cl. X Sajin Gh. (7425, 6, 32, 42, 8, 60, 4, 77, 9, 80, 90, 1, 3, 4).

FĂLTICENI (Suceava), Gorovei Sorin (2465, 4, 5, 7, 8, 70—4, 65; 7423—7, 52, 6).

FĂUREI (Galați), *Ș. g.* cl. VIII Panait Angheluță (2464—7, 70, 3, 9, 80, 3, 94).

FĂUREȘTI (Oltenia) *Ș. g.* Vișoiu Cornel (2479—85, 8—92).

FETEȘTI GARĂ — Absolventă Stănescu Matilda (7477, 85—7, 9, 91, 4, 8, 502, 5, 7, 16, 29, 35, 6, 54—6), Tudor Victor (7477, 90, 4—6, 9, 503, 5, 14, 21, 9, 34—7, 52, 4, 62).

FIENI (Ploiești) *Ș. g.* cl. VI Jipescu Liliana (2464—7, 9, 71, 80, 1, 3), *L. 1* cl. IX *Mirscu Gh.* (2491, 2, 4, 508—10, 24—7, 40—4; 7430, 7, 8, 41—4, 75—8, 91, 501, 2, 41, 51, 2 4, 62, 609, 10, 23—5), cl. IX Popescu Florin (2522, 4—7;, 7426, 37, 8, 41, 2, 75—7, 94—7, 503, 52, 5, 6, 1), cl. X *Zarioiu Gh.* (7423—0, 8, 37, 42, 8, 50, 2, 4, 70, 9, 81—4, 90, 1, 4—7, 9, 200, 5, 10, 1, 4, 29, 35—8, 52, 4, 5, 8, 71).

FILEGD (Crișana). S.g. cl. VII Pardi Ecaterina (2480, 1, 3, 4, 9, 95, 560, 1). Focșani. *S.g.* cl. VI Iacob Dan (2516, 2, 9, 20, 5, 35—5).

FRINCEȘTI (Argeș) *S.g.* cl. VIII Paraschiv Eumitru (2469—73 9, 9, 84, 9).

FUNDUL MOLDOVEI (Suceava) *S.g.* cl. 1 Alveresc Lotar (2469—9, 21, 1, 9, 81, 2, 5, 8, 9), cl. VI Icanciuc Rozalia (2464—8, 79, 83, 51, cl. VII Leţu Vasile (2465—71, 3, 6, 9—86, 8—90).

FILIAȘI (Oltenia) Liceu. Clasa X-a. *Băluță Constantin* (7355—72, 4 6, 71—8' 82, 5, 7, 91, 5, 7—408, 10, 3, 6—20, 22—6, 8, 30, 2, 9—41, 3—6, 8—54, 62, 6, 7, 70, 2, 4.) Absolvent Păunescu Viorel (7423—1, 30, 7, 9, 41, 2, 52, 4)

GĂEȘTI. *L.* cl. VIII Sava Teofil (2495 501, 3 — 6, 9).

GALAȚI. *S.g.*7 cl. VII Mîrșescu Doina (2528 — 34, 6, 7, 45, 7 — 9), *S.g.* 21 cl. VIII Vezeteu Anișoara (2497, 500 — 4, 12 — 20), *S.g.*24 cl. VII Savin Gabriela (2495 9 — 501. 14, 6, 7, 20, 3, 6), cl. VIII Costinuiuc Florin (2508, 12 6 — 20, 3, 6), *S.g.* 25 cl. VIII Chiriac Constantin (2512, 4, 5, 28, 9, 31, 4, 5, 45), *S.g.* 27 cl. VII Biueas Monica (2495 — 503), *L.*1 cl. XI Katz Carmi (7479 — 81, 90, 1, 4 — 500), *L.* 3 cl. VIII Tușnea Svetlana (2481, 3 — 5, 3 — 5 8 — 92), cl. IX Carabogdan Elena (2508 - 10, 25, 53, 5, 8, 62, 605, 8, 10, 24), *L.*o. cl. VIII Ariton Petrică (2495, 7 — 500, 2, 9, 15, 7), cl. XI Tiribegea Maricel (7529, 34 — 8, 52 — 5, 9, 62, 612, 21, 3), *L.* 5. cl. VIII Grimberg A ton (2495, 7, 9 — 501, 3 — 6, 8, 9, 12 — 28, 33— 41 — 3), Spiridon Vernoica (2495, 7, 8, 503, 20, 8 — 31, 3, 8), cl. X Vasiliu Iilie (7423, 5, 6, 8, 37, 79, 80, 3, 90, 4 — 6, 9).

GERLA (Cluj). *L.* 2 cl. X Molnar Iosif (7502, 14, 6, 25, 7 — 9, 34 — 8, 52, 5).

GHIRDOVENI (Ploiești) *S.g.* cl. V Vîlcereanu Cristian *c*(2496, 8 — 500, 12 — 4, 6, 9, 24).

GIURGIU *S.g.* 4 cl. VII Măcăneață Cristian (2512, 3, 8, 22, 8, 32, 45, 7691). *S.g.* 7 cl. VII Ghelmer Mihaela (2495, 501, 2, 15, 8, 9, 24, 6, 8, 31 3, 6), cl. VIII Popscu Dragoș (2506, 30, 5 — 40, 3, 5, 6 — 9, 51 — 3, 4, 5, 7 — 9, 7552, 6, 609, 80), *L.* 1 cl. IX Popescu Ionel (2508 — 10, 24 — 7, 52, 4, 6, 10, 9) *L.*2 cl. 2 cl. IX Tena Ion (7529, 41, 93, 4, 9, 605, 10, 31, 5, 8). cl. X Patîrcă Georgeta (7529, 32, 4 — 8, 44, 6, 8, 50, 8),

GHIMBOCA (Banat) *S.g.* cl. VIII Simeria Rusalin (2495, 7, 501, 2, 4, 7, 10, 3, 5 — 22, 22, 6).

GLODENI (Ploiești) *S.g.* cl. VIII Catrina Gheorghe (2483 — 6, 9 — 92, 4).

GURA HUMORULUI (Suceava). *S.g.* cl. VIII Petcu Nicoleta (2422 — 6, 8, 28 — 31).

HALEȘ (Buzău) *S.g.* 1 cl. VI Dogaru Anghel (2499, 504, 13, 5 — 7, 9, 31 — 3, 5). cl. VIII Dogaru Vasilica (2504, 9, 15 — 9 m 22, 8, 31, 2, 5), Voicilă Ioana (2495, 8, 503, 9, 15 — 9, 22, 8, 31, 2).

HÎRLAU (Iași) *L.* cl. VII Iohan Burăh 62512, 2, 3, 5 — 7, 9, 24, 6, 8, 31, 4, 5), cl. XI Solomon Ady (7529, 34 — 8, 52 — 6, 8, 60 — 2, 4, 5, 93, 607 — 01, 2, 4, 9 — 23, 5, 30, 5, 8, 9 — 44).

HLIPICENI (Suceava) *S.g.* cl. VIII Romaniuc Ștefan (2515 — 7, 22, 6, 9, 30 — 33).

HOMOROD (Brașov) *S.g.* cl. VIII Matei Gh. (24 — 5, 8, 90 — 2),

HOREZU (Argeș). *S.g.* cl. VI Robeci Octavian (2495, 7, 9, 500, 1, 4, 5, 8, 17), cl. Terteci Ion (7529, 34, 6 0 8, 50, 1, 3 — 6, 65).

HUNEDOARA. *S.g.* 4, cl. VI Pitea Constantin (2516, 7, 9, 23, 9, 31, 3, 45). Pitea Mihai (2509 m 12, 3, 5 — 20, 2, 3, 7), *L.*1 cl. VI Rașcă Radu (2499, 5, 2, 4, 5, 8 — 31, 3, 5), cl. VIII Jula Angela (2500, 1, 24 — 6, 8 — 34, 7), cl. IX Nedelcu Violeta (2495, 504, 6, 8, 9, 13 — 6, 22, 8, 30, 1), cl. X Mogoșan Valeria (7529, 34 — 8, 51, 2, 4 — 6, 60) cl. XI Lup Iosif (7423 — 6, 8, 30, 2, 7, 50, 2, 4, 70, 9, 80, 3, 90, 4 — 9, 502, 7, 15, 6, 27, 9, 34, 6 — 9, 50, 3 — 6), Retegan Aurel (7487, 9, 90, 1, 4 — 501, 3, 5, 11, 4, 6, 20, 1).

HUȘI. *L.* cl. X Dolteanu Temistocle (7632, 6, 8 — 40, 2 — 5, 50, 2, 3, 7, 60, 2, 3).

IANCA (Galați). *L.* cl. IX Grăjdan Vasile 2483 — 5, 7, 90, 513, 5, 7, 9, 22, 4).

IAȘI. *S.g.* 1 absolvent Rotștein Mari (2503, 4, 6, 9, 22, 4, 38, 42), *S.g.* 7 cl. VII Bălan Carmen (2512 — 7, 9, 26, 8, 31, 2, 5), *S.g.* o cl. VIII Poroșnicu Gabriela (2495, 7 — 501, 3 — 10, 2 — 7), *L.*1 cl. VI Colibaba Ștefan (2495, 8, 517, 9, 28 — 32, 5, Deleanu Dan (2495, 8, 9, 504, 12, 5, 7, 24), Rimer Matia (2495, 8 — 500, 13, 4, 6, 7, 9, 20), cl. VIII Radu Dănilă (2468, 71, 81 — 3, 5, 6, 8, 90 4), Roteștein Iani (2503, 4, 6, 9, 22, 4, 38, 42), *L.* т cl. VI Davideanu Cătălina (2495, 7, 8, 500, 0, 4, 12 — 9), *L.* 3 cl. V Iacob Georgică (2512, 3, 5, 6, 9, 31, 3, 45), cl. VII Lupașcu Silviu (2495, 7 — 501, 3, 4, 7, 9), Burlacu Călin (2495, 7, 9, 500, 8, 12, 9), Ville Cristian (2483, 4, 6, 502, 15, 7, 9, 24, 9), cl. VIII Pletea Dan(2495, 512 4, 6, 7, 9, 20, 31, 3, 4), Teodorescu Horia (2512 — 20, 2 — 31, 3 — 5, 7, 8, 42, 5, 52, 8, 9), cl. Gîmeanu Valeriu (7366, 72 — 9, 91, 402, 4, 6, 30, 7, 54, 90, 5), *Iacob Florin* (7475 — 84, 80, 1, 3 — 7, 9, 500, 2, 4 — 6, 9 — 11, 6, 22, — 5, 3 — 7, 9, 500, 2, 4 — 6, 9 — 11, 6, 9, 22 — 5, 7 — 9, 34 — 8, 42, 3, 42, 50 — 6, 9 — 61, 3 — 7), cl. XI Achelăriței Radu (752934 —8, 52, 618, 39, 42, 3, 75, 97), *L.* 4 cl. IX Săveanu Sandu (2509, 24 — 6, 40 — 4, 59, 610, 39), *L.* 6 cl. X Gavril Magda (7432, 5, 52, 72, 7 — 9, 82, 94 — 6, 9), *L.* 7 cl. VIII Băsescu Luminița (2495, 7, 50, 4, 12, 3, 5 — 9, 28 —31, 3 — 5, 7). Bîrleanu Dorel (2512 — 23, 5) Mardare Corneliu (2500, 3, 7, 9, 20, 2, 9, 31, 5), *L.* G cl. VIII Mogea Valentin (2513, 5, 7, 9, 28, 42, 5, 6), *L.*9 cl. IX Topor Vasile (2508, 9, 24 — 7, 40 — 2, 4, 51, 2, 4, 618), cl. XI Gogoi Mihai (7534, 8, 54, 617, 20 1, 38 —40, 2— 4), *L. de muzică și ată plastică.* Grimberg Bianca (2497, 513, 5 — 9, 26, 9).

IZVORU (Oltenia) S.g. cl. V Melega Elena (2465, 7, 79 — 83, 95, 501, 12, 4, 5).

IZVORU (Argeș) *S.g.* cl. VII Rățoi Ionuț (2498, 505, 6, 9, 12, 3, 7, 9, 20, 2, 3).

LĂPUȘATA (Argeș) *S.g.* cl. VIII Voineanu Radu (2495, 7, 8, 500, 1, 8, 9, 17, 9).

LIPOVA (Banat) *L.* cl. XI Bătuțan Iosif (7534 — 8, 52, 4, 6, 62, 3, 5, 6, 80, 612, 4,

LONEA (Hunedoara) *S.g.* 2 cl. VII Lincă Ion (2495, 7, 8, 500, 13, 5 — 7, 9, 24).

LUCĂCEȘTI (Bacău) *S.g.* cl. VII Andrei Ludmila (2512 — 24, 6, 7, 95, 7, 8).

LUDUȘ (Mureș A.M.) *L.* 2 c. VIII Becinksi Petru (2495, 7 — 501, 4, 7, 7, 8).

LUGOJ. *S.g.* 4 cl. VI Duncescu Sorin (2512, 5 — 7, 9, 29 — 34), L. 1 cl. VIII Cristea Rodica (2528 — 35, 7, 41 — 3), cl. IX Bolck Ivan (2510, 25, 6, 40 — 2, 57 — 8, 34, 5, 41, 2, 52 — 5, 5, 64, 608, 10, 1, 7 — 9, 21, 63, 76, 81), *L.* 2 cl. VI Costea Mihai (2483, 4, 95, 515, 6, 9, 20, 31).

MĂCIN. L. cl. IX Iordache Ion (2508 — 10, 25 — 7, 40 — 4, 7551, 2, 4 — 6).

MĂRĂȘEȘTI. (Galați) *L.* cl. XI Apostol Ovidiu (7534 — 8, 51, 3 — 5, 65, 610, 2, 7, 8, 20, 1).

MEDGIDIA *S.g.* cl. VIII Ionus Forida (2512, 23, 5, 6, 34, 5, 8, 40, 3, 5, 6, 7, 57), *L.* 1 cl. XI Pelican Gheorghe (7475 — 80, 90, 4 — 7, 9, 502, 7, 34 — 8, 48, 52, 4, 5).

MEDIAȘ, *L.* 1 cl. X Andreescu Emanuel (7529, 34 — 8, 50, 8, 608, 10, 7, 9, 21), cl. XI Brădișteanu Smaranda (7529, 34 — 8, 48, 51, 2, 5, 80, 608, 10, 2, 7, 21, 4). Dumitru Gh. (7464, 50, 72, 7, 91, 623, 30, 6, 58, 50, 6, 60, 3).

MIERCUREA (Hunedoara)*L.* cl. IX Ludoșan Ioan (2540 — 2, 4, 59, 7610, 23, 64, 5, 74, 6, 84, 6, 92).

MIZIL (Ploiești) *L.* cl. VIII Jercan Cornelia (2528, 9, 31 — 5, 7, 41, 2), Mateescu Maria (2528, 9, 31 — 3, 5, 41, 2), Vasilescu Steliana (2512, 3, 5, 7, 9, 22, 8 — 31, 4, 5, 42).

MÎRȘANI (Oltenia)*S.g.* 1 cl. VIII Diaconu Ion (2479, 84, 9, 500, 1, 16 — 9, 26).

MOGOȘANI (Argeș) *S.g.* cl. VII *Badea Gheorghe* (2463, 75, 81 — 4, 6, 93, 5 — 8, 501, 3, 4, 6, 7, 9, 14, 23, 8 — 35, 7, 8, 40 — 2, 5 — 9, 58, 9, 619, 74, 5, 8), cl. VIII Postelnicu Ion (2498, 511 — 49, 52, 3, 7551, 620),

MORENI *S.g.* 2 cl. V Bîrsan Timotei (2464 — 6, 80 — 3, 512 —4), L. cl. X Ene Anca (7477, 94 — 6, 9, 536 — 8, 52, 4, 608, 17, 38, 42), Selaru Corneliu (7592, 5 — 8, 55, 612, 4, 38, 42, 3, 63, 76, 90, 2, 704), cl. XI Ștefan Vasile (7534 — 8, 50 — 2, 4, 60, 5, 640, 2, 62, 3).

MURFATLAR *S.g.* cl. VIII Grosu Viorel (2513, 5 — 9, 21, 3).

MUȘETEȘTI (Oltenia) *S.g.* cl. VIII Tătaru Doiche (2468, 71, 2, 83, 9 — 92, 4, 515, 6, 8, 22).

NĂSĂUD (Cluj) *L.* 1. cl. VIII Rusu Gheorghe (2501, 3, 4, 12 — 9, 22), cl X Tîmbulea Leon (7586, 93, 610, 7, 8, 21, 2, 5, 38, 40 — 2, 61).

NEGREȘTI — OAȘ. *L.* cl. IX Ciocan Gheorghe (2506, 9, 22, 4, 5, 7, 7551 — 3, 6, 608 — 10).

NEHOIAȘI (Ploiești) *S.g.* cl. VIII Posea D. Ion (2495, 9, 503, 9, 13, 5, 6, 22, 8, 31, 2,42)

NICOREȘTI (Galați) *S.g.* cl. VIII Oprea Dorin (2425, 8 — 50, 4, 8, 12, 4, 6, 7, 9, 20 6).

NOVACI *L.* cl. X Rusu Nicolae (7529, 34 — 8, 56, 61, 612, 7, 21, 3, 38, 9, 41, 62, 3).

OLANU (Argeș) *S.g.* cl. VIII Agapescu Traian (2528 — 34, 7, 40).

ORADEA. *L.* 1 cl. IX Negrăun Mircea (2524, 6, 41, 2, 4, 608, 9, 18, 9, 22, 3, 39, 9). *L.* 2 cl. IX Manole George (2510, 27, 41, 2, 4, 7529, 34, 48, 56, 80, 93, 620), *L.* 4 cl. X Brădan Florica (7491 8, 501 — 3, 5, 6, 36, 40, 2, 7, 59, 60, 2), Crăciun Radu (7529, 34 — 8, 52, 4, 80, 601, 12, 4, 4, 7), Mănucu Dumitru (7529, 48, 56, 64, 93, 614, 20, 40, 50, 2, 3, 90, 7, 703), Negruțiu Radu (07529, 34 — 8, 50, 2, 4, 601, 12, 4), cl. XI Pop Romel (7534 — 7, 93, 612, 4, 7, 21, 39, 40, 4).

ORAȘ DOCTOR PETRU GROZA *L.* cl. VII Inăsel Dalina (2464, 7, 70, 3, 9, 80, 3,)).

ORĂȘTIE (Hunedoara) *L.* cl. VI Cociorvă Rodica (2495, 7, 500, 12 — 4 m 6, 7, 9, 26), cl. IX Meza Dan (2508 — 10, 25, 6, 40 — 4, 7529, 34, 5, 42, 51 — 4, 6, 8, 608 — 10, 7, 36, 8).

ORȘOVA (Banat) *L.* cl. VII Crostescu Răzvan (2495, 7, 500, 1 2 — 6, 26), cl. VIII Schimek Beatice (2495, 7, 8, 500, 12, 4 — 6).

OȚELUL ROȘU. *S.g.* cl. V Pop Sandu (2480 — 4, 95, 7, 9, 512 — 7, 9), cl. VI Căpăț Cristina (2507, 16, 7, 9, 26, 31 — 3), cl. VII Bazac Daniel (2517, 9, 20, 4 — 6, 45, 33, 89, 502), Jula Gheorghe (2495, 7, 500, 1, 4, 8, 33, 4), cl. VIII Neicu Victorian (2528 — 35, 7), Totoi Ionel (2528, 9, 31, 3, 5, 40, 2, 4), Tuican Stela (2513, 5 — 9, 20, 2, 5 — 9, 31, 2).

OVESELU (Oltenia) *L.* cl. XI Preda Ion (7529, 34 — 8, 50, 2, 4, 5, 80, 93, 608, 12, 4).

PALONCA (București) *S.g.* cl. VII Andreescu Mihai (2480 — 4, 9, 95, 7, 500, 1, 12), Năchilă Ioana (2480 — 4, 9, 95, 7, 500, 1, 12), absolvent cl. VIII Năchilă Petre (2468, 71, 8, 80, 2, 4, 8, 9, 91, 2).

PATIRLAGELE (Ploiești) *L.* cl. IX Podoreanu Aurel (24, 7, 8, 92, 510, 7477, 91 91, 2, 6, 7), cl. X *Toma Veronel* (7529 — 8, 20, 2 — 9, 62 — 7, 77, 8, 80, 608, 10, 2 — 4, 7 — 23, 42, 7, 59, 62)

PĂUNEȘTI (Adjud). *S.g.* cl. VI Birlă Magdalena (2465, 9, 79, 80, 3 — 6 9). Nica Marcica (2450, 5, 65, 7, 70, 9, 80, 4, 5), Novac Virginica (2469, 80, 3, 4, 6, 90, 8 — 501, 4, 13, 6 — , 29), cll. VII Neagu Viorica (2506, 12 — 9, 4, 6, 7), Nica Lucica (2501, 123, 9, 24 — 8, 32), cl. VIII Gheorghiu Gabriela (2498 — 502, 4, 6, 12 — 7), Herescu HMaria (2495, 6, 8 — 51, 3, 6, 8, 9), Novac Maria (2495 7 — 7 5—1012 — 7), Rizuc Rodica (2495, 7 — 501, 3, 5, 8, 13 — 9)

PECIUL NOU (Banat). Absolvent liceu. Stoianovici Rrodislav (7423 — 7, 30, 52, 77 — 9, 82, 94 — 7, 9, 520, 32, 4 — 8 52, 5).

PETROȘANI *S.g.* cl. VI Siclovan Codruța (2495, 7, 9 — 503, 8, 9).

PIATRA NEAMȚ. *L.* cl. VIII Zilberdrat Bernarda (2495, 503, 4, 12, 3, 24, 8, 30), cl. X Zilberdrat Ica (7529, 34 — 8, 55, 6, 62, 5,, 8, 612, 4, 7, 21).

PITEȘTI. *S.g.* 4 cl. VIII Ruse Lilion (2496, 502, 5, 7, 25, 6, 30 — 5, 7 — 48, 58 — 7554, 6, 609), *S.g.* 5 cl. VIII Iliescu Andrei (2495, 9, 513, 5, 6, 8, 28, 34), *S.g,* 10 cl. V Ionescu Radu (2495, 500, 4, 15, 28 — 35), cl. VIII *Pașavel Romana* (2479 — 90 B12 — 36), *L.* 1 cl. IX Mîndruțeanu Georg e (2508 — 10, 24 — 7, 40 — 4, 57 — 9, 7551 — 6, 93, 608 — 10, 17 — 25), Popescu Georgel (7475 — 8, 94 — 6, 502, 3, 5, 4, 608, 10), cl. XI Lazăr Mircea (7575, 34 — 8, 54 — 6, 617, 20 — 2), *Stoica Vasile* (7529, 34 — 8, 46, 9, 51 — 5, 60, 1, 3 — 6, 90 2 — 4, 601, 5, 9, 12 — 4, 17 20 — 4, 32, 3, 5, 40 — 4, 6, 61 — 3), *L.*2 cl. X Zimnicaru Victoria (7529, 34 — 8 52, 4, 5, 621, 42, 3) L. 3 absolvent Gheorghe Ion (7475 — 81, 90, 1, 7 — 600, 5, 13, 7).

PLOIEȘTI. *S. g.* 23 cl. VIII Stoica Valentin (2495, 7—501, 3—5), *L.* 1 cl. V Rednic Cristina (2485, 7—501, 8, 12, 3), Stoianovici Cristina (2512—5, 28—32, 45), cl. VII Munteanuu Dinu (2517, 9—22, 4, 6, 7, 35, 7), Solomon Ernest (2495, 7, 500, 2, 4, 12—7, 9, 20, 6), Sonta Gheorghe (2595, 500, 1, 12—4, 6, 7, 9, 20, 4), cl. VIII Florescu Radu (2495, 7, 9—502, 12—7), Necula Luiza (2495, 9, 503, 4, 6, 9, 43, 5—9, 22, 4, 8, 30, 1, 5, 7), Nicolescu Ruxandra (2495, 7, 500, 2, 12—7, 9), Olteanu Gheorghe (2516—20, 2—6), Roibu Constantin (2512, 3, 5—9, 22, 8), cl. IX Iordache Sorin (7554, 509, 508, 18, 8, 9, 24, 7, 40—2), Mărgăritescu Rodica (2495, 509, 3, 5—20, 2, 8), cl. X Dragomir Maria (7529, 40, 50, 2, 60, 9, 71, 3, 80, 5, 91, 4, 6, 36, 40, 50, 8), Grigore Ecaterina (7529, 35—8, 52—6, 610), *Neguț Gh.* (7529, 34—8, 41, 8, 51—6, 8, 62—5, 608—14, 17—22, 3, 36, 8, 40—5, 59—63), *Popescu Mariana* (7529, 40, 50—2, 60, 2, 5, 9, 71, 3, 4, 91, 8, 601, 9, 19, 2, 4—8, 20—3, 34—6, 8—43, 6, 9, 53, 8, 62), Tulinecu A.

(7480, 90, 4—6, 501, 2, 28, 9, 36, 51—6, 93), cl. XI Olaru Ion (7529, 34—8, 52, 4—6, 60, 5), *L.* 2 cl. VI Fulga Cristian (2495—7, 500, 1, 5, 12—6, 7, 9), Ioniță Gabriel (2515—7, 9, 29, 31, 3, 5), cl. VII Mazăre Valentin (2497, 9, 529, 31, 5, 45, 9, 56), Popescu Teodor (2495, 500, 12, 4, 6, 9, 20, 3, 6, 7), Simionescu Mihai (2495, 500, 1, 12—7, 9, 20, 2—4, 8—34), Tiprigen Carmen (2499—50q1, 12—4, 16—20), cl. VIII Grigore Elena (2495, 500, 8, 16, 7, 9, 20, 9, 31, 3), Lupulenev Livia (2495, 7—501, 4, 12—5), Miron Alexa ndru (2495, 8—501, 4, 5, 7, 8, 12), Petroșanu Grigore 2480—5, 8, 90, 1, 4), Rîpeanu Victorina (2495, 508, 13, 5, 6, 22, 6, 8), cl. IX Bivolaru Mariana (2508—10, 25, 7, 42, 4, 8, 2, 4), Brenner Mircea (2508—10, 24—6, 7551—6, 8, 608, 9), Duțescu Constantin (2508—10, 24—6, 7552—4, 6, 631, 6), Iancu Filofteia (2509, 24, 41, 2, 4, 7534, 52, 4, 6, 608, 10, 36), Pană Ion (2524—7, 40—4, 7548, 51, 5, 6, 9, 65, 93, 8, 608 —10, 2, 7—9, 632, 5—42), Sorena Gabriela (2508, 24—7, 7553, 5, 610, 8, 2, 3), Stan Gheorghe (7529, 35, 6, 42, 50—3, 5, 63, 612, 7), cl. X Carabasan Gg. (7534, 5, 50, 2—4, 77, 93, 601, 8, 10, 7—9, 20, 1, 59), Gepgescu Alina (7529, 34—8, 52, 612, 4, 7, 40, 2, 3, 63), Spiridon Maria (7529, 34—8, 54—6, 60m 608, 10, 2, 4, 7), Saeremet Rodica (2423—5), 30, 48, 50, 2, 94, 5, 9, 505), cl. XI Mazăre Alex. (7529, 34—8, 51—57, 60, 1, 4, 7, 77), Spiridon Maria (7529, 34—8, 54—6, 60, 608, 10, 2, 4, 7), Seremet Rodica (2423—5, 30, 48, 50, 2, 94, 5, 9, 505), cl. XI Mazăre Alex. (7529, 34—8, 51—57, 60, 1, 4, 7, 77), *Mîndrilă Dumitru* (7529, 34—8, 42, 50, 3—6, 60, 1, 5, 93, 712, 4, 7, 9, 21, 2, 5, 38—44, 61—3, 75—7). *L.* 3 absolvent Gheorghiu Victor (7423—30, 2—9, 41—4, 6—8), *L.* 5 cl. XI *Neguriță Paul* (7356, 9, 62, 4, 72, 3, 5, 7, 9, 84, 91, 402, 23—5, 30, 2, 7, 41, 9, 50m 2, 7, 74, 5, 7, 80, 80, 2, 6, 2, 6, 90, 4—7, 505, 7, 13, 4, 34—8, 55). *L.* P cl. VI Eftimie Mihaela (2495, 7, 8 12—5, 7, 9, 24), L. 6 cl. X Fetter Livia (7529, 34—8, 48, 54, 608, 10, 7, 21), Mihăilescu Florin (7503, 5, 29, 35—8, 610, 2, 7, 9, 23), Moisescu Adrian (7529, 34—8, 48, 54, 608, 10, 7, 29, 39)

PLOSCA (București) *Ș. g.* cl. VII Nelu Radian (2495, 7, 9—502, 4, 10).

PLOȘCUTENI (Adjud) *Ș.g.* cl. VIII Ceauşoglu N. (7423, 69, 77, 9, 90, 4—9, 527, 9).

PODUL TURCULUI (Adjud) *L.* cl. XI Rotaru Nicolae (7423—6, 48, 52m 4 m 79—81, 514, 29, 35, 6).

POGOANELE (Ploiești) *L.* cl. X Cazacu Aurel (7644, 6, 61, 3, 71, 83—5, 94, 5., 7, 9, 701, 3).

POIANA MARE (Oltenia) *L.* cl. X Trăistaru Enea (7438, 56, 61, 2, 68, 78, 82, 92, 504, 10, 3, 76, 9, 34—8, 41, 6, 51, 3, 4—6, 60).

PINCOTA (Banat). *L.* cl. VVIII Cosma Alex. 2512—3).

POTCOAVA (Argeș) *L.* cl. IX Ciucu Ion (2490, 1, 4, 509, 10, 22, 6, 30, 9, 94—6, 503, 5, 7, 20, 1).

PUCHENII MOȘNENI *Ș.g.* cl. VII S. g. cl. VIII Paraschiv Elena (2512, 5, 7, 9,20 30, 1, 3, 4). cl. VIII Vasilescu Veronica (2498, 512, 4, 5, 7, 9, 28—31, 4, 5).

PUCIOASA *Ș. g.* 1 cl. VI Vasile cu Albina (2505, 7, 28, 9, 32, 3, 5, 41). cl. VIII Rotaru Sorin (2495, 509 m 13, 5, 6, 8, 20—3). Ș. g. 4 cl. VIII Coloianu Cornelia (2495, 506, 9, 13, 5—20, 2), Vlad Eugenia (2515—20, 1, 3, 4, 5, 8), L. 1 cl. IX Aldea Constantin (2495, 8—501, 12—9, 22), cl. X *Diaconu Gh.* (8364, 72—5, 7, 8, 82, 5, 7, 8, 82, 5, 7, 403, 5, 23——6, 32, 7, 42, 4, 50, 2, 4, 75—80, 2, 90, 4, 6, 9, 529, 34—8), cl. XI Vasilescu Nicolae (7450, 60, 75—80, 2, 3, 76, 8, 90, 1, 4—6, 502, 5, 7, 10, 1, 3—6, 20, 6—9, 32, 4—8, 54—6).

RADNA (Banat) cl. VIII Drăgănescu Gheorghe (2465, 71, 81, 1, 3—5, 8, 9, 90, 513, 15, 6, 9, 9, 20, 2, 4, 7).

RĂCARI (București) *L.* cl. XI Dincă Gheorghe (7514, 26, 9, 34—8, 50, 60, 5, 7635, 9, 412).

RĂDĂUȚI *L.* E cl. IX Maciuc Constantin (2476, 8, 92, 4, 75—7), *L.* T cl. VII Weinstein Bertha (2452, 6, 64—9, 81—4, 9, 90), cl. X Călăraşu Doru (7372—5, 7, 9, 91, 404, 5, 23——25, 30, 2, 7, 8, 41, 50, 77—83, 93, 91—500; 534—7, 608—12, 4, 7, 8, 21), cl. XI Fortună Sorin (7437, 80, 500, 29, 32—8, 57, 72, 608, 10, 17), *Guşeru Dorin* (7364, 71—5, 7, 87, 95, 7, 9, 402—5, 7, 23—6, 32, 44, 17—50, 52, 4, 70, 75—84, 490—502, 527—29, 35—47).

REGHIN *Ș. g.* 1 cl. VII Chiciudean Anton (2466, 7, 81—4, 9, 95, 7, 9—502, 4), *L*2. Cl. VIII Costea Vasile (2479, 80—5, 89).

REȘIȚA. *L.* 1 cl. XI *Toiart Ioana* (7529, 32—42, 8, 51, 2, 4, 5, 64, 9, 70, 2, 3, 8, 80—3, 89, 93, 9, 608, 10, 12, 5—7, 21).

R-SĂRAT. *Ș. g.* 1 cl.VIII Apostol Mariana (2479—85, 89, 92, 4), L. 1. cl. IX George Pațurcă (2478, 92, 4, 508, 10, 25—7, 7430, 94—5, 593, 610), Roşca Adrian (2474, 6, 8, 92, 4, 509, 10, 430, 44, 75, 7477, 548, 52, 4, 6), cl. X Dragu Dorin (7372, 3, 5, 7, 87, 91, 5, 9, 402, 18, 23—5), *Ghiță Mircea* (7327 m 71—3, 75, 7, 91, 5, 402, 15, 23, 6, 430—2, 7, 8, 40, 47, 50, 52, 62, 4, 70, 4, 9, 80, 2, 3, 9, 90, 4, 6, 9, 507, 14)), Gloria Spînu (7423, 4, 30, 2, 80, 99, 529, 32, 4, 6—8, 80, 93), cl. XI Apostol Ovidiu (7423—5, 30, 8, 9, 40, 1, 5, 7, 50, 3—5),*L.* 1 cl. X Anghel Vasile (7477—9, 80, 90, 4—7 8, 9, 50), Calcan Ivan (7478, 80, 2, 90, 1, 4, 5, 7, 5, 500, 50, 4), Ciupercă Ioan (7423—6, 8, 30, 50, 77, 9, 80, 2, 90, 4, 6, 7, 9), Mocanu Guță (7424, 32, 52, 76, 90, 91, 3, 593, 14, 29, 34, 5, 8, 55, 65, 75. 83, 501 580, 608, 10—2, 17—23), Neagoe (7360, 75, 7, 85, 92, 3, 404, 23, 4, 6, 8, 42, 8. 95—7, 9,

500, 11, 29, 35—6, 66), Popescu Ion (7423—6, 37, 450, 52, 4, 76—82, 90, 4—97, 9, 502, 14, 29, 34—8, 54), Teşilă Vasile (7476, 7, 9—82, 90, 4—9, 501, 2, 4, 14, 25, 9, 34—7, 552, 4, 62, 86, 93, 8, 608, 10, 4, 7—23), cl. XI Alexandrescu Vasile (7479, 80, 90, 6, 8, 9, 505, 7, 11, 4, 27—9) 52, 99), Panait Tănase (7423—6, 8, 32, 7, 52, 4, 77, 9—82, 90, 1, 4—7, 99, 501, 24, 9, 34—6, 8, 54, 60).

RÎMNICU VÎLCEA *Ş. g. 4* cl. VII Botocan Mircea (2465—8, 2480—6, 9), cl. VIII Chera Mariana 2479—85, 88—92, 5, 7—500, 3—5, 8, 9), *L. 1* cl. IX Brădeanu Florica (2492, 4, 52, 6, 7, 7475, 6, 8, 97, 500, 7, 8, 9, 10, 54), *Isbăşescu Georgel* (2480, 1—5, 88—92, 4—6, 9, 509, 12, 3, 15—22, 4, 8, 9, 30—5, 7, 8), Vşadu Paul (2492, 4, 508, 10, 7475—5, 94—6, 505, 54), Popian Crişan (2478, 92—4, 509, 10, 7426, 30, 5, 41, 75, 7, 91, 4—7, 501, 2, 5, 21, 7), Stoenescu Dorel (2492—4, 519, 10, 7475, 94—6, 502, 51, 4), Vintilescu Mihail (2460—3, 74, 8, 92, 4, 7437, 77, 94—6, 502), cl. X Bădescu Adrian (7426, 32, 7, 50, 4, 77, 9, 80, 2, 90, 4—7, 9, 505, 27, 9, 36, 7, 42 , 8), Defta Mihail (7432—6, 30, 7, 44, 8—50, 2, 4, 64), Duţă Grigoriţă (7534—8, 612, 17, 28, 40, 2—4, 62), Piloiu Radu (7529, 34—8, 42—5, 56—8), cl. XI Bădulescu Dan (7423, 5, 30, 7, 8, 41, 52, 4, 77, 92, 4—7, 502, 5, 37), *L. 2* cl. VI Alexandridis Ioana (2482—6, 89, 97, 501), Eliescu O. (2464—72, 82—4, 9, 95, 502, 8, 12, 16——19), Găman Doina (2465, 7, 80, 3, 4, 95, 500, 508), Nadolu Mircea (2465—8, 79—84, 9, 500), Pistol Cristian (2464—70, 79—85, 95, 500, 1), cl. VII Oaie Adriana (2465—8, 79, 83—5, 99), Tintorescu Rodica (2465—8), 79, 81—3, 4, 5, 99), cl. XI Dina Maria (7425—38, 75, 7, 9, 90, 2, 94, 6, 535—8, 612, 4), *Popescu Constantin* (7423—5. 30, 2, 7, 47, 50, 65, 6, 75, 7, 9, 80, 2, 23, 56—8, 90, 4—6, 99, 501, 9, 14, 21, 5, 6, 29, 32, 4—8, 52, 62). Rădulescu Gr. (7529, 34—8, 48, 52, 64, 6, 617, 21, 3, 40, 63), Roman Traian (7423—30, 7, 8, 41, 44, 5).

RÎŞNOV. *L.* cl. IX Lupu Nicolae (7511, 29, 34—8, 48, 608, 10, 2, 7, 9, 21—3).

RÎUL ALB. (Tîrgovişte). cl. VII Milea Emilia (2450, 3—5, 61, 4, 5, 7, 88), Tincu Elena (2468, 73, 9, 83, 4, 8, 9, 98, 502),

RÎURENI (Rm. Vîlcea) *S. g.* cl. VI Grigorescu Carmen (2465, 6, 8, 70, 89—81, 3, 4, 9, 500, 1).

ROMA (Botoşani) *Ş. g.* cl. VIII Burac Elena (2450, 3, 6, 4, 72, 83, 4, 9, 90, 4).

ROMAN *Şc. prof. an I* Galu Vasile (2450, 2, 3, 61, 2, 4,,7, 8, 79, 80, 1 3), L. cl. IX Casu B. Vasile (2460, 90, 1, 508—10, 7437, 77, 91, 4, 502, 54), hl. XI *Bercovici Nelu* (7477, 9, 82, 7, 97, 500, 5, 10, 12, 4, 6, 29, 34, 5—8, 41, 48, 50, 2—5, 50, 70, 608, 10, 4, 7, 20, 1, 36 38—43, 7, 62, 3), Blumenfeld Mirel (7423—8, 30, 21, 3, 5, 7, 8, 41, 47, 54, 60, 69m 70, 6, 7. 9, 80, 2, 3, 90, 4—7, 9, 500, 2, 7, 11, 4, 20, 5, 9, 34—8, 44, 55m 74, 89, 608, 10, 2, 21 3), *Căpăţînă Valeriu* (7423—30, 2, 5—41, 5, 8, 50—3, 64, 6., 7, 9, 74, 7—9, 7501, 2, 5, 9, 13—6, 27, 9. 30, 2, 4—9, 46, 50—6, 63—70, 72—4, 81, 5, 7, 610, 12, 4, 7, 21, 2, 3), Cornea Vasile (7423, 5—9, 37, 50, 4, 94, 5, 529), *Rugină Andrei* (7423—30, 2, 5—8, 41—5, 54—7, 65—8, 75—80, 85—99, 500, 2, 3, 45, 7—9, 25—932, 4—8, 43, 8—56, 8, 60, 2, 3, 5, 6, 9, 72, 80, 90—3, 7, 60,6 8 10, 2, 4, 6 — 24, 32, 4, 6 — 9,42, 6, 7,50, 2,9, 61—3, 76, 80, 3 6, 8, 9, 91, 2, 4, 6, 7, 9, 700, 4, 8, P).

ROMÂNEŞTI (Titu) *Ş. g.* cl. VIII Văduva Petre (2498, 513, 5—9,28, 9,

ROŞIORI DE VEDE. *Ş. g.* cl. VII Popescu Ştefan (2481), 3, 4, 9, 515, 7, 9, 20), cl. VIII Chiva Gabriela (2483, 4, 8, 90, 91, 2, 506, 22, 4), Nedelea Hancu (2467, 8, 8u1, 2, 4, 5, 8, 83—5, 8—90, 2. 4), *L. 1* cl. X Cîmpeanu Gheorghiţă (7482, 90, 4—7, 9, 534—8, 48, 62), *Nagea Ştefan* (7424—6, 37, 77, 9, 80—3, 90, 4—7, 99, 500, 2, 13, 4, 29, 34—8, 50, 1, 65, 80, 93, 608, 10, 2—4, 7, 8, 9—23), cl. XI Simion Paul (7423—6, 30, 7, 8, 41, 50, 2, 4, 75—80, 2, 3, 9—, 1, 4—500, 502, 5, 29, 34—8, 51—2, 4—6), *L. 2* cl. IX Golesteanu Dan (2524, 6, 40—2, 4, 7493, 7, 558, 608, 10, 8, 9, 21, 3), Popescu Aurelian (2475—8, 92, 4, 509, 7437, 4, 7493, 7, 558, 608, 10, 8, 9, 21, 3), Popescu Aurelian (2475—8, 92, 4, 509, 7337, 44, 77, 94, 6). zl. X Ciuvbuc Adriana (7377, 424, 5, 79, 80, 94—6, 9, 514, 35—6), Iorga Ionel (7423, 4, 8, 30, 52, 77, 9, 90, 94, 5, 9, 511, 12, 7434—8, 80, 93, 608, 10, 2, 7, 9, 20, 21), *Mărgărit Iulian* (7423—5, 41, 77, 91, 4—6, 8, 9, 505, 34, 6, 8), *Popescu T. Dan* (7423—6, 28—30, 7, 7, 41, 2, 7, 8, 51, 2. 4, 75—81, 90, 1, 3—9, 505, 9, 29, 34—8, 50—4), Saru Dumitru (7373, 7, 82, 5, 7, 423—5, 94, 5, 534—6, 29, 52), cl. XI Dîrnă Ion (7423—5, 37, 47, 50, 2, 3, 77, 94—7, 99, 507, 10, 11, 41, 52), Popeşcu Liliana (7423—5, 8, 30, 52, 90, 94—7, 534—8, 50, 54), Sandu Marin (7423—6, 28—30, 37, 77, 80, 82, 87, 90, 95, 6, 9, 501, 2, 5, 14),

RUDĂRIA (Banat), cl.VIII Dancea Eugenia (2489, 91, 2, 7, 517, 8, 9, 24, 6).

SALCIA (Turnu Măgurele) *L. 1* cl. VIII Matei I. Pavel 2495—7, 9, 50, 2, 3, 7, 44, 48, 51, 3, 4, 6, 93, 619), cl. IX Neşu Ionel (2509), 10, 26, 7475, 500, 2, 3, 7, 44, 48, 5, 3, 4, 4, 6, 93, 619).

SATU MARE. *Ş. g.* cl. VII Pişmus Rodica (2467, 70, 500, 16, 18, 19, 25, 6, 9), cl. VIII Mitaru Angela (2481—3, 5, 8, 90, 516, 20, 23, 5—7), *Rozenhek Ivan* (2464—73, 75—8, 81—4, 88,90k 94, 5, 7, 9, 500, 1, 23—6, 9, 10, 12—4, 16—21, 2, 6), *Ş. g.* cl. VII Şerban Doina 2454, 5, 62—6, 70, 9,80—4, 98, 504), cl. VIII Bujorică Dan (2464, 5, 71, 2, 6, 80, 3, 4, 9, 90), Görbe Mihai (2450, 2, 4, 6, 60, 2, 7, 70—2, 5, 7, 9, 80—3, 90, 2, 5, 9). *L. M. Eminescu* cl. IX Göcz Elza (7426, 37, 42, 74—8, 8, 90, 4, 5). 502), Iacob Margareta (2477—

92, 4, 508—10, 24—7, 7437, 8, 42—4, 80, 94—6, 75—8, 501—10), Iordan Andrei (2460—3' 74—8, 92—4, 7364, 74, 82, 5, 95, 8, 9, 401, 2, 18, 22, 22, 5, 8, 37, 8, 41—4, 50m 80, 94—6, 502' 5, 27), Nichita Eva (2474, 5, 7, 8, 92, 4, 30, 8, 42, 94, 5, 6), cl. X. Ardelean Maria (7423— — 6, 47, 50, 2, 4, 82, 5, 95, 9), Uerk Iosif (7327, (7327, 35, 423—6, 8, 30, 7, 40, 20, 50, 2, 4), Noje Georgeta (7529, 34—8, 54—6, 62, 608, 10), Oprea Viorica (7423—6, 30, 48, 40 32, 4, 77, 57—6, 62, 608), 10), Oprea Viorica (7423—6, 48, .u 50, 2., 4, 77, 12, 7, 22, 38, 9 , 42). *Miţaru Alex.* (7601, 12, 4, 7, 21, 3, 380, 9, 40,2, 6, 59, 62, 3, 8, — 71, 6—8,80, 1,3 —5,9, — 92, 4 5. 80, 1,3—5,9, — 92, 4,5, 7, 700 , 1,3).

SĂLIŞTE *L.* cl. IX Mînzat Ioana (2592, 4, 509, 10, 24, 5, 750m 2, 3, 5, 54, 6, 608).

SĂVENI. cl. IX Grădinaru Valentina (2474—8, 92, 4, 509, 7437, 77, 94, 5, 502, 54).

SEBEŞ (Hunedoara) cl. VII Comşulea Mihaela (2479—81, 3, 4, 9, 90, 2), Marcu Dan (2495, 9, 500, 1, 12—9, 23, 4, 520, 28—35, 7, 9, 41), cl. IX Romcea Emilian (2474—8, 92—4 508—10, 7438, 44, 502, 5, 51, 3, 4, 5).

SEBIŞ (Crişana) cl. VIII Marta Floare (2479—83, 88, 90, 1, 7494), cl. IX Cofan Nicolae (2509, 40—4, 52—6, 608, 9, 18), Gurban Florica (2477, 92, 4, 509, 7430, 42, 4, 75, 77, 94, 5,6 54), Murelan Nicolae (2509, 40—4, 75, 52—6, 608, 9, 10), Moţică Ioan (2476, 92, 509— 7437, 42 42, 4, 77, 94—6), Resch Hilda (2474, 6, 94, 509, 7430, 42, 75, 94—6) 554 Zapoţa Nicolae (2477, 7437, 41, 2, 44, 92, 4—7, 91, 91, 4, 5, 6, 502, 9), cl. X Floruţiu Marius (7475, 7, 9, 80, 2, 90, 4—6, 98, 99, 502, 4, 5, 7, 10), Mihuţ Ioana (7423, 5, 8, 30, 7, 44, 50, 50, 4. 75. 6, 78, 80, 2, 95, 6, 9, 502, 4, 5, 10, 14), cl. XI Hurcă Ştefan (7424, 25, 8, 30, 7,, 41, 50, 4, 77, 8, 90, 4, 9, 502), *Pantazi MNicolae* (7423—6, 24, 30, 2, 7, 41, 4, 9, 50, 2, 4, 75 80, 2, 90, 1, 3—502, 4, 5, 10, 4, 29).

50—7), Tudor Constantin (7423—6, 8, 30, 7—9, 41—54, 64, 7, 70).

SIBIU. *S. g. 8 ani 1* cl. VII Donc Mihai (2495, 7, 9, 500, 1, 4, 12—20, 23, 5, 8, 9, 31—34, 7, 7554), Stîngescu Petre (2479—85, 8—92, 5, 7, 9—501, 4, 12—20, 3, 5, 6, 7495, 554), S. g. 2. cl. VII Boca Ioan (2516, 17, 8, 9, 20—3, 27), *Ş. g — 7* cl. VIII Marinuş Mihai 22479—2494, 7494—7497), *S. g. 8* cl. V Vasilescu Maria (2479, 83, 512—16), cl. VIII Vasilescu Gheorghe (2479—85, 88—92, 99—501, 12—20), *Ş. g. 9* cl. VIII Bodescu Mighaela (2481, 3, 90, 5, 8, 508, 13, 16, 17, 19), Trif. Mihai (2466, 83— , 8, 90—2, 5), Ş. g. 12 cl. VIII Severin Nicoleta (2482, 92, 5, 512, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 22), *Ş. g. 15* cl. VI Opriş Carmen (2483), 4, 9, 512, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 26), cl. VIII Gligor Victor (2512—22), Mantescu Minerva (2483, 4, 9, 515, 7, 9, 28, 9, 31), Raşiu Tudor (2450, 2—6, 60, 1, 2), *Ş. g. 19* cl. VI Ocheşel Elena (2479—85, 9), *L. 1* cl. X Bucurescu Iooan (7423—5. 77, 94—9, 503), Pompilian Alex. (7423, 5, 6, 7, 52, 90, 5, 6, 529, 34, 5, 6, 7), Turcu Emil (7423, 4, 5, 37, 48, 9, 50, 2, 3, 4, 68, 70), *L. 2* cl. X Hodor Lifiu (7423, 4, 6, 30, 7, 8, 48, 52, 76, 90, 9, 503, 38. 617, 9, 23), *L. 3* cl. IX Bucur Ioan (2461, 74, 8, 92, 4, 7400, 37, 8, 42, 94, 6, 501, 2, 5), Buzoianu Mureş (7475—83, 90—500, 501—514), Iliescu Marilena (2494, 508, 9, 24, 6, 7), 7477, 94, 5, 6, 501, 2, 5, 41, 9, 93), Isailă Dana (2494, 7394, 5, 6, 50, 1, 4, 8, 502, 5, 8, 10), Atacu Ana (2474, 6, 7, 8, 92, 509, 7364, 87, 502, 30, 2, 7, 41, 2, 4, 75, 6, 7, 8, 90, 4, 5, 6, 501, 2, 5, 52, 96).

SIMIENI. *L. Haşdeu* cl. VIII Mirea Vasile (2481—90),

SLATINA. *L. T. Vladimirescu* cl. IX Drăghici I9on (2484—2510, 7448, 7535, 7527, 7553), Efodie Paula (2482, 3, 88, 9, 92, 5, 513, 5, 6, 7, 8, 9), Leulescu Lucian (2480—5, 88— —92, 4), Voinea Vasile (7502, 14, 34—7, 52—5, 93, 9), cl. X *Stăncescu Ştefan* (7445—83, 93—97, 96—511, 525—38).

SIGHETUL MARMAŢIEI. *L. 1* cl. IX Titirică Radu (2494, 509, 10, 24, 5, 6, 7, 8. 94, 95, 6, 501, 2, 4, 5, 27), cl. X Fornvald Gh. (7423—6, 30, 2, 45, 50, 82, 505, 36, 55),

SIGHIŞOARA. *Ş. g. 2* cl. VIII Moraru Cristeian (2465, 70, 8, 2, 4, 7, 8, 80, 1, 3, 4, 5, 8, 9, 90), *s. 1* cl. IX Munteanu Viorica (2474, 6, 8, 94, 7437, 75, 7, 8, 90, 4, 6, 6).

SIMERIA cl. VII Oprea Magdalena (2512—14, 16, 7, 9, 29, 31, 2, 3, 4), cl. VIII Oprea Alexandru (2512—7, 19—20, 8, 9, 31—4).

SINAIA cl. VIII Stănescu Dan (2482, 5, 8, 90, 504, 13, 4, 5, 6).

SIRET. cl. VIII Rudişteanu Nicolae (2452, 4, 5, 71, 2, 4, 5, 8), Tumac Gheorghe (2452, 62, 70, 1, 2, 4, 7, 8), cl. IX Patraş Niculuna (2474, 5, 6, 7, 8, 92, 4, 73, 97, 42, 3, 502, 5). 212, 5, 7, 9, 28, 9, 31, 4, 5), cl. VII Deaconu Mariana (2450, 2, 3, 4, 5, 65, 7, 9. 71), cl. VIII Fumar Eugenia (2464, 5, 7, 8, 70, 1, 2, 4, 5, 7, 8), Sîrbescu Eugenia (2464 5, 7, 8, 80, 1, 5, 4, 5, 7 8), cl. IX Doina Popescu (2492, 4, 7430, 41, 2, 4, 5, 7, 8, 91, 94, 5, 6 , 502).

SUCEAVA *Ş. g. 3* cl. VII Axinte Gheorghe 2499, 513, 5—7, 9, 28—33),. Toşu Paul (2515—9, 28—39, 2), *L. 2* cl. VI Berlinschi Mara (2464—5, 7, 79, 80, 3, 4, 9), Sălcescu Narcisa (2464, 7, 70, 9, 813, 4, 97, 501, Tecuceanu Radu (2484, 95, 8, 500, 12, 6, 7, 9, 20), cl. IX Ivanovici Iosif (2475, 8, 83, 4, 88, 9, 90, 8, 508, 17 ; 8, 9, 26, 8, 9, 35, 42), Zaverca Ion (7437, 8, 47, 83, 510) 3, 4, 27,9, 35—7, 41, 2, 8, 50, 62, 613, 23, 23), cl. XI *Tabarcea Petru* (7441—3, 48—52, 64, 50, 2, 62, 612, 23), cl. XI *Tabarcea Petre* (7441—3, 48—52, 64, 75—83, 90—505, 9—11, 25—8).

SIEU (Odorhei) cl. VIII Agrişan Lucia (2480, 1, 3, 5, 8, 90—2, 4, 5, 515, 6, 8, 20)

SIMAND (Crişana) cl. VIII Musca Viorel (2512, 3, 5—9, 22, 8—13, 33, 4, 8, 42).

SOMCUŢA MARE cl. IX Noghu Iulian (2492, 4, 503, 6, 8—10, 24—7, 7493—5, 8 7 500, 621), cl. X Cuceu Gheorghe (7423, 5, 6, 43, 50, 2, 4 , 75, 7, 95—7, 9, 502, 50, 4), Măriesc Doina (7423, 5, 6, 50, 2, 79, 80, 90, 4—6, 99, 50, 502, 29, 34—6, 9, 54), Mureşan Emil (7423—6, 30, 43, 9, 50, 2, 4, 75—7, 9, 980, 94—7, 502, 29, 34—37), cl. XI Hotwa Gheorghe (7423, 4, 523, 4—6, 74 , 80, 4, 608, 10, 15—7, 9, 620—22, 40, 2, 3, 56, 9, 62, 3).

SOTINGA. cl. VI Ilie Victor (2480—3, 502, 12—16).

ŞTEFAN CEL MARE (Bucureşti) cl. VIII Rodut Rociv (3482—5, 8—94). Costaş (2479—84, 6 m 8—91, 5, 9, 500, 4), cl. VIII Gheorghe Picol (2450—7, 60—78, 73, 9, 402, 37, 8), *Popescu Cristian* (2479—86, 8—501, 12—20, 22, 4, 8—35).

ŞTEFĂNEŞTI (Suceava) cl. X Budur Constantin (7475—80, 91, 3—9, 502, 34—7, 54). Sîrbu Constantin (7424—6, 30, 7, 75, 80, 91, 4—7, 502, 3, 9, 14, 34—38).

SUSCA (Banat) cl. I Ianovici Elena (7430, 75, 94, 6, 7, 519, 20, 9, 78, 608, 10, 2, 6, 21).

TASNAD (Maramureş) cl. IX Salincaş Marta (2508—10, 25, 7437, 8, 77, 551, 2, 4, 6 608).

TECUCI. *Ş. g. 2* cl. VI Popescu Dorel 2480—5, 7, 8, 9, 95, 7, 9, 500, 1, 12, 13—20, 7, 8), *Ş. g. 3* cl. VIII Nicoară Liliana (2495, 9, 503, 7, 9, 92; 3, 5, 6, 7, 8, 9, 20, 2), *Ş. g. 5* cl. VIII Budu Sorin (2512, 5, 6, 7, 8, 9, 31, 3, 4, 8, 42), Bujor Violeta (2483—5, 90, 1, 3, 15, 7, 8, 22), Giuşcă Dana (2480—5, 8, 9, 90, 1), Popescu Mirel (2512—9, 26), *Ş. g. 6* cl. VII Enache Vasile (2481—4, 9, 500, 12—319), Timofte Ioan (2481, 3, 4, 5, 9, 90—2, 500, 1, 2, 4, 12, 13, 15, 7, 8, 9, 26), *L. 2* cl. VI Cucu Sorin (2480—3, 5, 95, 6, 500—2), cl. VII Seuleanu Mircea (2495, 9, 500, 1, 13, 5, 7, 28, 30, 1, 3) cl. VIII Mîrza Eugenia (2481, 3, 4, 9, 516, 7, 9, 26), cl. IX Lazea Alin (7475, 6, 4, 5, 6, 7, 8, 502).

TIMIŞOARA. *Ş. g. 16* cl. VII Dobra Rodica (2479—84, 8, 9, 95, 512, 4, 5), *L. 1* cl. VII Boţan Rodica (2483—5, 9, 516, 7, 8, 9, 20), cl. VIII Ispas Emil (2484, 515, 6, 20, 3, 6, 9, 30, 1, 3), Titerlea Constantin (2515—17, 9, 20, 3, 9, 30, 1), L. 2 cl. VII Nisipeanu Ion (2483, 95, 500, 17, 28, 9, 31, 3, 7), Tufan Adriana (2497, 7, 500, 16—19, 533), cl. X Boldea Elena (7535, 8, 52, 4, 6, 65, 608, 12, 4, 8, 41, 2), *L. 4* cl. VII Popescu Rodica (2495, 7, 9, 500, 2, 8, 12, 5, 7, 9, 23, 8), *L. 10* cl. X Păcuraru Caius (7478, 80, 2, 3, 94, 6, 9, 501, 10, 4, 6, 27).

TINCA. cl. XI Boroş Iuliu (7529, 35—8, 50, 2, 4, 62, 98, 608, 21, 4).

TITEŞTI (Rm. Vîlcea) Feţeanu Mihai (2495, 7, 8—501, 3, 6, 8, 9, 12—22, 24—26, 28—35).

TITU. cl. IX Sandu Dumitru (2498, 503, 4, 6, 8, 9, 10, 7, 8, 9, 20—3, 6).

TÎRGOVIŞTE. *Ş. g. 2* cl. V Gheorghiu Paula (2500, 2, 10, 8, 28—31, 3, 4, 5, 6), cl. VII Duduleanu Mihaela (2479—89, 98, 512, 6, 7, 9, 26, 9, 31), cl. VIII Chivăreanu Laura (2480—5, 8—92, 4, 7—477, 91, 3—6, 500, 2, 3), *L. 1* cl. IX Andrei Aurelian (7432, 41, 50, 75, 7, 9, 80, 1, 90, 4, 6, 9), Mircescu Vasilica (2460—5, 7, 8, 92, 3, 4, 909, 7418, 47, 5, 7, 94, 5, 6, 502, 2, 4, 27), Păunescu Nicolae (7529, 53—6, 80, 618, 19, 22, 3, 4, 5), cl. VIII Burduşel Călin (2483—5, 8, 9, 90, 2, 4, 503, 6, 7, 9, 16, 7, 8, 9, 20, 1, 2, 3, 4, 6, 7), cl. IX Buşneag Dumitru (2476, 8, 92, 3, 4, 509, 24, 7437, 41, 2, 502, 52, 3, 4), cl. XI Gica Dorin (7423, 5, 6, 7, 8, 9, 30, 2, 3, 7, 42, 52, 4), Pîrvu Constantin (7477, 505, 27, 34, 7, 8, 10, 612, 7, 21, 40, 2, 3, 60), *L. 2* cl. X Rădulescu Petre (7445, 50, 52, 4, 70, 80, 94, 5, 6, 9, 505, 14), *Soare Nicolae-Dobre* (7475, 6, 78, 81, 3, 4, 91, 3, 500, 1, 2, 3, 10, 11, 3, 25, 27; 9, 34—8, 52, 4, 5, 62, 617, 18, 21, 23, 7, 38, 42, 7, 62, 3), cl. XI Bănică Aurel (7428, 41, 65, 80, 93, 502, 3, 3, 13, 4, 28, 80, 99, 608, 9, 10, 11, 12, 7, 8), *Stanciu Virgil* (7476, 7, 8, 9, 80, 2, 90, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 502, 5, 9, 10, 11, 4, 6, 20, 7, 9, 34, 5, 6, 7, 8, 41, 2, 4, 8, 50,23).

TG. JIU. cl. VIII Buga Viorica (2479, 80, 1, 3, 4, 8, 9, 90—2), *L. 1* cl. IX *Ciocîrlie Valeriu* (7475, 6, 7, 8, 9, 80, 1, 3, 90, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 501, 5, 14, 28), 34, 5, 6, 7, 8, 42, 52, 80, 608, 10, 12, 4, 7, 9, 21, 3), cl. XI Bardan Viorel (7475, 6, 7, 8, 9, 80, 1, 2, 90, 4, 5, 6, 9, 529, 34, 5, 6, 7, 8, 54, 612), cl. X Drugă M. Florea (7477, 9, 80, 2, 3, 90, 4—501, 5, 9, 10—14, 17, 32, 34—38).

TG. LĂPUŞ. cl. X Pojar Ioan (7475—80, 2, 90, 1, 4, 5, 6, 7, 9, 80—2, 4, 90, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 500, 3, 5, 25), cl. XI Sigartău Grigore (7477, 90, 4, 5, 6, 7, 502, 10, 29, 35, 6,8, 50 55).

TG. MUREŞ. *L. 1* cl. V Vamaş Călin (2495, 7, 8, 500, 13, 5, 6, 7, 8, 9, 24), cl. VII Sonnenfeld Gabriel (2464, 7, 8, 9, 70, 3, 6, 7, 9, 81, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 79, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 90). cl. IX Pop Adrian (7475, 6, 7, 8, 80, 2, 3, 7, 8, 90, 2, 4, 5,6, 7, 8, 90, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 501, 2, 3, 4, 5, 10, 13, 4, 9, 25, 6, 7). *L. 2* cl. VII Moldovan Rodica (2480, 1, 3, 505, 8, 12, 13, 15, 17, 19), *L. 4* cl. X Trifan Ioan (7475, 7, 9, 80, 90, 1, 4, 5, 6, 7, 9, 501, 5, 14).

TÎRNĂVENI. *Ş. g. 4* cl. VIII Gruia Doina (2464, 83, 4, 5, 8, 9, 90, 1, 2, 4, 7494, 5, 6). *L. 1* cl. IX Popa Tiberiu (2492, 4, 508, 9, 7475, 6, 7, 8, 90, 3, 4, 5, 6, 505, 27, 52, 3, 4, 99, 608, 9, 10, 17, 18, 23), Todoran Gh. (7475—8, 90, 3, 4, 5, 6, 7, 500, 2, 5, 92, 4, 552, 3, 8, 9,

10), cl. X Gruia Doina (7477, 9, 90, 1, 3, 4, 5, 6, 501, 2, 5, 10, 4, 9, 35, 6, 7, 8, 51, 2, 4, 5, 6, 62, 6).

TOPLIȚA. cl. VII Iman Radu (2479, 80, 2, 3, 4, 9, 95, 8, 500, 4, 17).

TORMAC. cl. VIII Nagy Iuliana (2465, 6, 7, 72, 80, 1, 2, 3, 5, 9, 90, 4).

TRUSEȘTI. cl. IX Michiu Doina (2501, 12, 3, 45, 6, 7, 8, 9, 21, 4), cl. X Andreiescu Mihai (7475, 6, 7, 9, 80, 90, 1, 4, 5, 6, 503, 505, 10, 11, 4), Breșug Teodor (7475, 7, 9, 80, 3, 90, 4, 5, 6, 7, 9, 501, 3, 5, 11, 4, 27, 28, 9, 34, 5, 6, 7, 8, 42, 54), Corduneanu Dumitru (7478, 81, 2, 3, 4, 90, 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 500, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 25, 8, 9, 34, 5, 6, 7, 8, 42, 8, 54, 5, 68), Damian Gelu (7475, 6, 8, 9, 80, 3, 90, 1, 9, 500, 1, 5, 7, 14, 28, 9, 34, 6, 7, 8, 42, 54), Livardaru Emil (7529, 34, 5, 6, 7, 8, 42, 52, 4, 5, 6, 60, 1, 608, 12, 4, 8, 9, 20, 1, 38, 9, 40, 1, 2, 3, 6, 7, 60, 3), Roșu Mircea (7478, 9, 82, 3, 97, 510, 11, 16, 27, 9, 34, 5, 6, 7, 8, 42, 52, 4, 6, 9, 60), Ștefan Neculai (7475, 8, 9, 80, 2, 3, 99, 501, 2, 33, 11, 4, 29, 34, 5, 6, 7, 8, 42, 52, 4, 6).

TURDA. *Ș. g. 2* cl. VIII Toma Adela (2479, 80, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 90, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 500, 6, 12, 13), S. g. 6 cl. VII Nicoară Adela (2464, 5, 7, 9, 83, 4, 9).

TURNU SEVERIN. *Ș. g. 1* cl. VII Bădescu Iulian (2476—9, 81—5, 9—22, 5, 7—501, 3, 4, 7, 8, 9, 503), Grigoraș Alexandru (2464, 5, 8, 9, 71, 2, 7, 8, 81, 3, 4, 5, 8, 9, 90, 1, 2, 5, 9, 509), L. 1 cl. VII Popescu Mihaela (2480, 1, 2, 3, 5, 6, 9, 95, 502), cl. VIII Tontain Dorin (2484, 6—92, 94, 5, 7—501, 5; 7, 8, 12, 7, 9, 20, 2, 7), cl. X Cristescu Sorin (2476, 7, 8, 92, 4, 7476, 7, 94, 5, 7, 502), Giuhat Rodica (7477, 9, 80, 90, 4, 6, 9, 505, 27, 9, 34, 5, 636, 8, 40, 2, 3, 4, 9, 62), Sevici Constantin (7423, 6, 35, 47, 8, 50, 80, 90, 4, 5, 6, 9), Sitaru Grigore (7477, 90, 4, 5, 6, 7, 9, 505, 20, 35, 6, 7, 52, 5), *L. 2* cl. IV Biban Nicolae (2456, 68, 79, 1 2, 3, 90), cl. VII Graure Ileana (2479, 80, 1, 3, 512, 6, 9, 25, 6), cl. VIII Biban Irina (2464—77, 70—86, 88—90, 92, 5, 7, 8, 500, 1, 7, 7478, 95, 502, 54), Gîtan Aurica (2479, 80, 1, 3, 9, 512, 5, 6, 7, 9, 26), cl. X Egher Liviu (7423, 4, 5, 30, 7, 41, 50, 2, 4, 75, 9, 80, 90, 4, 5, 6, 7, 14, 34, 5, 6, 7), cl. XI Ionescu Mihai (7475, 6, 7, 9, 80, 1, 2, 5, 7, 9, 90, 4, 5, 6, 7, 9, 501, 2, 5, 14, 5), Zinita Viorel (7534, 5, 6, 7, 8, 51, 4, 6, 60, 1, 5, 67), *L. 3* cl. XI Grecu Petre (2474, 6, 7, 8, 92, 4, 76, 7, 94, 5, 7, 502).

ȚĂNDĂREI. *L.* cl. X Nedelcu Nicolae (7364, 72—8, 87, 91, 5, 8, 9, 400, 3, 13, 22, 4, 5, 30, 2, 7, 8, 41, 50, 2, 4, 7, 80, 3, 90, 4, 5—9, 527, 9, 34—7, 55, 93, 608, 17, 21, 42, 3, 4, 59, 60, 2, 3).

URSOAIA (Argeș) *Ș. g.* cl. VIII (2490, 4, 509, 15—8, 22,6).

URZICENI *L.* cl. VIII Chițu Doinița (2488, 913, 503, 9, 22—3, 8, 31, 3, 37—8, 42, 4, 54), cl. X Cuncev Alexandru (7477, 8, 94—7, 502, 4, 5, 7, 52, 4, 618, 9, 23).

VALEA LUI MIHAI (Crișana) *L.* cl. X Bodea Gheorghe (7478, 91, 4—7, 9, 500, 2, 5, 14, 29, 34—8, 52, 4), Pop Ioan (7423—6, 8, 30, 2, 7, 8, 41—4, 8, 50, 2, 4, 75—9, 80, 2, 4, 90—4, 7—9, 502, 4, 5, 14).

cl. IX Abramovici Buma (2492, 4, 509, 10, 4, 24, 6, 7, 40—3, 7437, 8, 41—3, 75, 7, 8, 534, 52—57, 80, 93, 9, 7608—10, 35, 8).

VATRA DORNEI *L.* cl. VII Juga Doina (2497, 500, 1, 4, 12, 4, 5, 6, 8), cl. VIII Doru Zaguleac (2481—3, 88—92).

VADASTRIȚA (Corabia) *Ș. g.* cl. VII Sălcianu Ștefana (2454, 5, 64, 5, 7, 77, 9, 81, 3, 4, 9), cl. VIII Cismaru Opriță (2450—5, 60, 2, 4, 5, 7, 8, 74, 7, 9, 81, 3, 4, 9, 90).

VĂLENI (Drăgănești-Olt) *L.* cl. VII Iliescu Mihai (2465—9, 80—4, 9, 95, 8), cl. VIII Fieraru Ioana (2474—8, 92, 4, 509, 7437, 94, 5, 554).

VĂLENI (Lăpuș) *Ș. g.* cl. VIII (2464, 73, 4, 8, 84, 5, 8—90, 4, 8, 506, 9, 12, 5, 7, 9, 22).

VĂLENII DE MUNTE. *L.* cl. XI Bocan Ion (7476—80, 2, 3, 5, 7, 90, 4, 6, 9, 509, 10, 14).

VERGULEASA (Argeș) *Ș. g.* cl. VIII Vieru Gh. (2464, 5, 7, 8, 71, 2, 4, 81, 3, 8, 9, 90, 1).

VIȘEU DE SUS (Maramureș) cl. X *Trifoi Vasile* (7423—6, 30, 2, 7, 40, 1, 5—8, 50, 2—4, 70, 4, 75—84, 90, 494—505, 7, 8, 10—12, 4, 6, 25—7, 9, 32—9, 41, 2, 6, 8, 50—2, 5. 8, 60, 2, 6, 8), cl. XI Titirugă Ion (7432, 3, 41, 52, 6, 69, 77, 80, 3, 5, 7, 90, 2, 4, 9, 520)

ZALĂU. *L. 1* cl. X Lungu Ion (7432, 45, 51, 3, 70, 75—84, 90—7, 9, 500), Szöcs Coloman (7437, 41, 9, 50, 79, 505, 13, 4, 29, 34—7).

ZIMNICEA. *L.* cl. XI Marcu Iulian (7480, 3, 90, 4—6, 505, 20, 9, 34—8, 608, 12, 4, 7, 21).

ZLATNA *L.* cl. X Perța Vladimir (7364, 75, 7—9, 87, 95, 8, 418, 23—5, 30, 2, 50 2, 77 94—7.

ZORLENI (Iași) *Ș. g.* cl. VII Ulinic Sofia (2479, 82—4, 9, 90, 7, 8, 500, 1, 5, 8, 5, 7, 8, 9, 20).

ZOVLETU MARE. *Ș. g.* cl. VI Tripon Nicolae (2479, 81, 3, 4, 9, 95, 500, 1).

Pînă la 1 octombrie 1966 s-au primit soluții bune de la:

ADJUD (Bacău). *Ş. g. 1* cl. VII Popescu Anişoara (2495—501, 3—9, 12, 4—24, 6, 9—41, 3, 5—52, 4, 6—9), cl. VIII Creţu Dumitru (2513—7, 20, 45, 6, 8), *Ş. g. 2* cl. VII Maftei Gheorghe (2528—35, 7, 45, 6), absolventă Vraciu Mihaella (2445, 503, 4, 9, 13, 5—7, 9, 22), *L. 1* cl. VIII Petrache Melania (2513—20), cl. IX Apostol Constantin (2525, 7, 42, 4; 7610, 1, 8, 38, 76, 81, 9, 728, 30, 3), Miroslav Gheorghe (2508, 9, 40—2, 59, 7529, 36—8, 44, 56, 65, 77, 80, 93, 610, 7, 9, 21, 36, 42, 6, 63, 90, 3, 726, 33, 5, 6), cl. X Ganu Anghelache (7590, 93, 610, 36, 8, 76, 7, 809, 89, 93, 730, 3, 75, Georgescu Florica (7608, 10, 21 76, 7, 89, 92, 3, 726, 30, 2, 5), Rusu Nelu (7580, 93, 610, 9, 21, 4, 31, 6, 43, 76, 92, 3), Oviţă Constantin (7530, 43, 609, 10, 21, 36, 8, 74—6, 89, 90, 3, 726, 30, 6), cl. XI Blănaru Eugenia (7580, 93, 608, 10, 2, 7, 9, 23, 40, 2, 76, 93, 730, 6), Cauteş Gh. (7559, 81, 80, 612, 4, 7, 9, 21, 3, 36, 8—40, 2—4, 59), Gorgoş Constantin (7598, 608, 10, 2, 4, 7, 9, 21, 40, 2, 63), Gurămultă Dan (7580, 91, 3, 610, 20, 31, 6, 43, 76, 92, 3, 726), Ignat Ion (7591, 3, 608, 12, 8—21, 3, 31, 6, 9, 43, 9), Oviţă Ion (7580, 93, 610, 36, 8, 74, 6, 89, 60, 2, 3, 727, 30, 6), Panaite Constantin (7591, 3, 608 m 10, 2, 4, 7, 9, 23, 62, 4, 76, 850) Stan Costel (7580, 93, 608, 10, 2, 4, 9, 21, 3, 40, 2, 62, 3, 76, 80), Ştiucă Romulus (7608, 10, 2, 7, 9, 23, 40, 2, 76, 93, 730, 6), Vasiloiu Nelu (7580, 93, 608, 10, 2, 7—9, 21, 3, 62, 76, 90, 1, 3).

AIUD (Cluj) *Ş. g. 1* cl. VII Popa Vasile (2495, 8, 515—7, 20, 4, 9, 45), cl. VIII Maftei Doina (2499, 502, 8, 10, 2—20, 3—5, 8), Popa Emil (2512—25), Sima Doina (2515—7, 9—22, 9, 31, 3, 7, 56).

ALBA IULIA. *L. 1* cl. X Miclea Cornel (7497, 9, 502, 29, 34—7, 48, 50, 4, 6).

ARAD. *Ş. g. 1* cl. VII Bota Monica (2512—5, 6—9), cl. VIII Neagrău Cornelia (2512—7, 10, 22), cl. VIII Comănescu Călin (2512, 3, 5—9, 25—9, 34), *L. 1* cl. IX Boşcaiu Voicu (2508—10, 24—7, 40—4, 7529, 34, 5, 42, 51—5, 8, 52, 4, 80, 4, 90, 9, 601, 8, 9, 17—21, 3), *L. 4.* cl. IX Francz Adalbert (2510, 24, 7, 40—4, 57—9; 755—5, 5), cl. X Aciocîrlănoaie Florin (7534—8, 50, 5, 68, 614, 42, 76, 700, 4, 6).

AVRIG. *L. 1* cl. X Berghea Vasile (7534—7, 41, 2, 50, 2—6, 60).

BACĂU. *Ş. g. 5* cl. VII Iliescu Dan (2512, 4—6, 28, 9, 33, 5), *Ş. g. 8* cl. VI Cociorvei Victor (2405, 7, 9—501, 41, 12—7), cl. VII Mocanu Alexandru (2517, 28—34), cl. VIII Andarache Gabriela (1512—20, 5, 8—31, 3, 4, 7, 40), Cîrlan Carmen (2512, 5, 7, 9, 20, 8, 30—4), *L. 1* cl. VII Wenger David (2495, 9, 501, 4, 5, 7, 8, 12—20), 3—5, 7; 7623), cl. VIII Măzăreanu Ştefan (2512—20, 2—7), cl. IX Anorghioalei Gelu (2508—10, 24—7, 4—04; 7551, 5, 6), cl. X Băncilă Costel (7617, 23, 39, 42, 3, 62, 74—7, 81, 4, 90), *L. 2* cl. X Iurea Vasile (7535, 51, 5, 12, 4, 7—9, 21, 39, 40, 2, 3, 76), cl. XI Popovici Magda (7534—8, 608, 39, 40, 2, 3, 62, 75), *L. 3* cl. VII Grigore Valeriu (2495—501, 3—9, 11—24, 6, 8, 9, 31—5, 8, 44; 7593, 619, 23), cl. IX Vladimirescu Ana (2512—4, 6—20, 2, 8, 31, 3, 45, 57, 9), *L. 4* cl. X Filimon Liviu (7552, 4—6, 60, 8—10, 37, 8, 41, 2, 4), cl. X I Macovei Costică (7610, 4, 8—23, 39, 42, 3, 62), Tioc Alexandru (2513, 5—20, 2).

BAIA MARE. *Student* an I Fiţigău Ion (7610, 4, 5, 7, 21, 42, 59—61, 3, 7, 75, 6, 95, 7, 71, 9), *Ş. g. 3* cl. VII Cernăştean Tiberiu (2495, 512—7, 9, 20, 6), Walter Viorica (2512—5, 7—20), *Ş. g. 8* cl. VI Papp Constantin (2512—5, 7, 8, 32; 7623), *L. 1.* cl. VIII Pop Viorel (2497, 500, , 7, 9, 13, 5—7, 9, 20, 2, 4, 6), L. 3 cl. X *Grosfeld Mihai* (7538, 42, 8, 51, 3—5, 8, 60, 1, 3—8, 87, 30, 6, 7, 94, 608, 9, 11—4, 7—9, 21—4, 30—3, 6—42, 5—7, 58, 60—3, 7—9, 71, 4—91), cl. XI Apşan Dan (7580, 601, 8, 10, 2, 4, 7, 21, 3, 4, 32, 6, 8, 42).

BALŞ (Oltenia). *Ş. g. 1* cl. VII Popescu Geta (2512—9), *Ş. g. 2* cl. VII Voiculescu Luminiţa (2500, 1, 28—33, 5), *L. 1* cl. IX. Pătru Georgică (2508, 10, 23—6, 41, 2, 4; 7554, 5, 609).

BĂBENI (Argeş). *Ş. g.* cl. VII Mija Gelu (2528, 30, 1, 4, 5, 7, 47, 8).

BĂCEŞTI (Iaşi). *Ş. g.* cl. VIII Leonte Doina (2499—501, 12—4, 6, 9).

BĂILE GOVORA. *Ş. g.* cl. VII Circiumărescu Janeta (2504, 7, 19—23 m, 37, 9).

BĂLCEŞTI (Oltenia) *L. 1* cl. X Zidăroiu Nistor (7529, 36, 8, 48, 94, 9, 605—7, 10, 12, 7).

BĂRBĂTEŞTI (Oltenia) *Ş. g.* cl. VIII Ciungu Stelian (2495, 504, 12, 3, 5—20, 2, 8—31, 3, 4 m 8, 42, 44—7, 57—9).

BECHET (Oltenia) *L. 1* cl. X Cojocaru Ion (7529, 34—8, 40—2, 9—56, 60—2, 5, 7, 78, 83, 4, 93, 610, 2, 4, 7—23), Popa Ion (7529, 34—8, 40—2, 6, 9—56, 60—2, 5, 8).

BEIUŞ (Crişana). *L. 1* cl. VI Toma Aurel (2512—6, 8, 28, 30, 1, 3, 4, 45), cl. VIII Covaci Iosif (2514—9, 22, 9, 31, 3), Zare Viorica (2512—9, 22, 8, 9, 31, 8), cl. X Popovici Ion (7529, 34—7, 42, 3, 50, 4—6, 61).

---

* Evidenţiaţii ca rezolvitori de probleme sînt scrişi cu litere cursive.

BELCEȘTI (Iași) *L. 2* cl. XI Olaru Aurel (7551, 4, 60, 1, 12, 9, 21, 39, 40, 2, 75, 6, 80, 95, 7).

BICAZ (Bacău). *L. 1* cl. XI David Dumitru (7608—10, 2, 7—22, 38, 75).

BILED (Sînnicolaul mare). *L. 1* cl. XI Holtz Iosif (7608, 18, 9, 42, 59, 62, 74—6, 87, 92, 726).

BISTRIȚA. Absolvent Mihăilaș Liana (7529, 32, 4—8, 60, 70, 612, 7, 21, 3, 34, 63), Verneagă T. (7529, 34, 5, 7, 8, 41, 56, 62, 93, 610, 7—21), *Ș. g. 2* cl. VIII Fucă Romescu Mihai (2495, 7, 9—501, 3, 4, 6—9, 12—6, 8—26; 7555, 608, 10, 23), *L. 1* cl. VIII Mureșan Virgil (2512—25), cl. IX Timofte Corneliu (2540—4; 6717—20, 3, 38—40, 2, 58, 9), cl. XI, Cotoc Ioan (7529, 34—8, 51—5, 60, 5, 618, 9, 21—4, 35, 8—40, 2, 3, 63), Gagea Alexandru (7629, 34—8, 352, 4, 60, 4, 610, 2, 7, 8, 21, 38—43, 59—63, 75, 6).

BÎRCA (Oltenia). *L. 1* cl. IX Popa Ștefan (2524, 7, 40, 2—4; 7524, 93—4, 608 10, 9, 36).

BÎRLAD. *L. 2* cl. VIII Groasman Rollanda (2512, 22, 6, 9, 31, 3, 4, 42, 7), cl. XI Crostea Bogdan (7529, 34—9, 59, 612, 23, 32, 9, 40, 2, 63, *L. 3* cl. VI Bichir Ionel (2505, 12, 4, 6, 7, 9, 20, 4, 5), cl. XI Cinepă Victor (7494; 80, 90, 4, 9, 500, 27, 9, 7535, 6, 7, 48, 50, 4, 612, 19, 21, 42, 46, 62, 69, 70).

BLAJ (Brașov). *L. 1* cl. IX Olaru Mihai (2509, 24—6; 7502, 52—6, 609, 11, 8, 9),

BOCȘA (Banat). *L. 1* cl. IX Piroi Ion (2525, 41—4, 7552, 4, 5, 609, 18, 22), cl. X, Cionvică Dorel (7429, 80, 2, 3, 90, 1, 4—7, 9, 514, 36, 54).

BOLDEȘTI. *Ș. g. 1* cl. VIII Bilciurescu Olga (2515—20, 3).

BOLINTINUL DIN VALE (București). *Ș. g.* cl. VIII Băiețel Nicolae (2528, 31, 3, 4, 46, 7, 58, 8, 9), Chiva Mioara (2503, 5, 13, 5, 7, 8, 28, 31, 3, 42), cl. X Chiva Voicu, 7529, 37, 8, 42, 8, 50, 64—6, 80, 612, 4, 7, 9—21, 3), Grigore Nicolae (7562, 80, 6, 608) 14, 7, 8, 21, 30, 9, 40, 4, 62, 74—6, 92, 7, 711).

BOROAIA *Ș. g.* cl. VIII Petrescu Viorica (2528—35, 7, 8, 42), .

BOTOȘANI. *Ș. g.* cl. VII Chițoi Viorica (2515—7, 9, 20, 2, 3, 7, 45—7, 52), *L. 1* cl. X Chițoi Maria (7610, 7, 8, 20, 38—40, 2—4, 87, 92, 5, 7), *L. 2* cl. VIII Fecioru Marian (2500, 1, 12, 6—9, 29, 31, 3, 4).

BOZOVICI. *Ș. g.* cl. VIII Ignea Ana (2495, 7—500, 3—9, 12—24, 6, 8—35, 8, 40—2-4, 52, 4, 7, 8, 9; 7618—20, 79—81), *L. 1* cl. VII Jura Ileana (2528—35), cl. VIII Orbulescu. Petre (2506, 9, 13, 5—7, 9, 22, 4, 8—31, 3, 41, 2, 6, 7, 75, 81), Piescu Călina (2515— 35, 7—40, 2—6, 58, 9; 7623, 4).

BRAD (Hunedoara). Absolvent Fornade Corneliu (7529, 34—8, 74, 610, 7, 9, 23, 31 62), *Ș. g. 1* cl. VII Fornade Cornelia (2512, 3, 5, 28, 9, 32, 46), Gruia Smaranda (2495, 8, 9, 501, 3—6, 8, 13—8, 26, 6, 7), cl. VIII Dolga Valer (2498, 8, 507, 13, 5—7, 9, 21, 2, 8, 9, 31, 3, 5, 42, 5—7, 9, 57, 9), Spînu Petru (2513, 6—9, 24, 5, 45), *Ș. g. 2* cl. VII Trufațiu Dan (2512—20, 3, 5, 8, 31—3, 6, 7, 45, 6, 9, 50, 8, 9; 7619).

BRAȘOV. *Ș. g. 2* cl. VIII Vlase Sorin (2512—8; 20, 3, 5), *Ș. g. 3* cl. VIII Danilescu Florin (2509, 13, 5—7, 9—23, 8, 31, 3, 7, 41, 2, 4; 7494, 5, 554, 639), *Ș. g. 5* cl. VIII Păun Marius (2512—7, 9, 20, 2—5), *Ș. g. 6* cl. VII Lilianu Andrei (2490, 5, 500, 13, 5, 6, 8—20, 5, 6, 8, 31, 3—5), Zsido Eva (2512—7, 28, 30—4), cl. VIII Runcanu Elena (2528, 31, 3, 4, 8, 45, 6, 58, 9), *Ș. g. 18* cl. VII Carp Nicolaie (2528—33, 45, 9), cl. IX Ionașcu Ligia (2540——4, 57—9, 70), cl. X Scheiber Ernst (7608—10, 5, 8, 21, 38, 66, 76, 89, 91), *L. 4* cl. VI Freciu Dan (2513, 5—7, 9, 20, 31, 3, 52), cl. VIII Badiu Gabriela (2528, 31, 3—5, 8, 42, 5), Borgovan Emil (2515, 28—30, 5, 46, 60, 1, 9), Dandu Georgiana (2513, 5, 7—9, 29, 31, 5, 46, 59), Grigorșa Dumitru (2495, 512—6, 22, 8, 31), Grigoraș Viorica (2495, 509, 15, 6, 22, 8, 9, 31, 45, 6), Nedelca Rugenia (2513, 5—8, 22, 8, 31, 4, 5), Nistor Andrei (2495, 7, 500, 8, 10, 5, 7, 8, 20, 2, 3, 8, 31—4, 7, 45, 52, 3, 8, 9), Olteanu Valentina (6, 2512—26), Teodorescu Florin (2513, 6—9, 22, 8, 9, 45), cl. IX Bontaș Adrian (2513, 5—24, 6, 8—32, 5,7—42, 4—8, 50, 1), cl. X Bontaș Vasile (7529, 34—8, 42, 4, 8—56, 60, 4—7, 70). *Lic. 1* Bătătorescu Anton (7630—2, 5, 7—9, 42, 3, 62, 3, 737).

BRANIȘTEA (București). *Ș. g.* cl. VI Drăgănescu Florica (2495, 8, 9—501, 5, 7, 9), Giugiucă Mariana (2512, 4—20, 4), Vișan Ion (2495, 6, 8—501, 5, 7, 9).

BRĂILA. *Ș. g. 7* cl. VI Monas Pericle (2512, 5—7, 9, 31—4), cl. VII Sgîrcitu Georgeta (2495, 7—9, 501, 6, 7, 9, 32), *Ș. g. 10* cl. VII Florescu Liliana (2512, 4, 6, 7, 20, 8, 9, 31, 3—5), cl. VIII Dumitriu S. Valeriu (2512, 3, 5—9, 22, 30, 9, 3—5, 8, 1, 42, 7636), *Ș. g. 12* cl. V Toma Săndica (2479, 80, 95, 6, 8, 512, 4, 5), *Ș. g. 18* cl. VII Vintilă Tiberiu (2495, 7—501, 4, 5, 12, 20, 3, 5, 8, 9, 31, 3), *Ș. g. 22* cl. VII Mihalașcu Cornelia (2512, 4, 6—9, 28—34, 7, 45, 52), cl. VIII Dragomir Gh. (2499, 500, 9, 12, 3, 5—20, 2, 5, 8—34, 8, 42, 5—7, 58, 9), *Ș. g. 26* cl. VII Dumitrescu Tudprel (2495, 500, 1, 28, 9, 31, 3, 7, 45, 6, 8, 51, 60, 4), 8—70), *L. 1* cl. VIII Enache Marin (2512, 3, 5—8, 20—2, 8, 30, 1), Strîmbeanu Fani (2512, 3, 5, 6, 8—21, 4, 8, 34), *L. 2* cl. IX Todirică Dan Al. (7553, 5, 8, 60, 2, 99, 605, 9, 10, 2—4, 22—5).

BRĂNEŞTI (Bucureşti). *L. 1* cl. X Oprea Vasile (7612, 4, 23, 42, 62, 9, 76, 83, 92, 3, 700, 6).

BREAZA (Ploieşti). *Ş. g. 2* cl. VIII Muscalu Gh. (2512—7, 9, 20), *L. militar* cl. X Enache Victor (7529, 34—8, 54—6, 63, 610, 2, 4, 7, 9, 21, 37—9, 41, 6, 7, 59, 60, 2, 3, 76, 700), Gavriloaia Gh. (7529, 34—8, 41, 54, 5, 60, 1, 5, 7), Gurbet Gh. (7529, 34—8, 52, 4, 5, 6, 62, 614, 7, 9, 21), *L. 1* cl. XI. Fleanu Constantin (7529, 34—8, 41, 2, 6, 9, 50, 2, 4—6, 8, 60, 2, 4, 80, 3, 93, 9, 608, 10, 2—4, 7—23). Absolvent Piuaru Ion (7580, 608, 10, 2, 4—7, 21, 36, 8, 40—4, 6, 9, 59, 62, 3, 75—7, 86, 92, 3, 5, 7, 9, 700, 14, 6—8, 9).

BROŞTENI (Oltenia). *Ş. g.* cl. VII Bejan Violeta (2494, 9, 504, 12—7, 9, 20).

BRUŞTURI (Crişana) *Ş. g.* cl. VII Ciuciu Maria (2512, 4—7, 9, 20, 5, 8, 9, 31—4, 6, 7), cl. VIII Paşa Gh. (24095, 9—501, 3, 4, 9, 13—5, 7—20, 2, 4).

BUCUREŞTI. *Ş. g. 3* cl. V Grigore Elena (2498, 509, 2, 4, 7, 8, 10, 2—20, 2—5, 7—30 2—7, 9—42, 4), *Ş. g. 3* cl. VIII Paraschiv Monica (2512—20, 22), *Ş. g. 4* cl. VII Brădăţeanu Mihaela (2512—24), Udrea Bogdan Bogdan (2515, 4, 5, 7, 9, 98, 9, 32, 4), *Ş. g. 5* cl. 6 Lazăr Anca (2495, 7, 9—501, 5, 8, 12, 3—20, 3), Ştefan Carmen (2495, 8, 512—7, 9), Streja Dan (2512—7, 9, 20, 3, 6), cl. VIII Avram Mihaela (2512 m 4—7, 9, 29, 41, 4), Drăgoi Andrea (2512—7, 9, 31, 4), *Ş. g. 10* cl. VI Mărgărit D. Laurian (2512—5, 28—32, 45, 6) *Ş. g. 16* cl. VI Georgescu Matei (2512, 5, 7, 9, 20, 8—31, 4, 5), *Ş. g. 21* cl. VII Popescu Săvuleşteanu Dan (2513, 5, 6, 20, 1, 3, 8, 31—4, 7, 41, 3), *Ş. g. 23* cl. VII Badea Olga (2495, 9, 501, 4, 5, 12—20, 3, 8, 9, 31, 3—5, 7, 45), 52, 3), cl. VIII Dumbravă Bianca (2516, 8, 20, 3, 33, 7, 45, 52), *Ş. g. 30* cl. VI Drăgan Laurian (2483, 4, 95, 501, 53, 6, 7, 9), *Ş. g. 46* cl. VIII Dodu Andrei (2512, 3, 6—9, 31, 3—9), *Ş. g. 50* cl. VII Ianuş Gh. (2514, 5, 8, 9, 21, 3, 4, 8, 30—4, 6—48, 50—2, 8—60, 4, 9, 70), cl. VIII Viclea Liviu (2413——21), *Ş. g. 52* cl. VIII Focşaner R. Paul (2512—7, 9, 20), *Ş. g. 56* cl. VIII Spătaru Dan (2552—7, 9, 20, 8, 9, 31), Voinescu Radu (2512—7, 9, 20, 8, 9, 31), *Ş. g. 73* cl. VII Dumitrescu Dan (2516—20, 3, 33, 4, 48—51), *Ş. g. 75* cl. VIII Zirimis Mihail (2495, 8, 503—10, 3—21, 3, 6), *Ş. g. 77* cl. VI Grigoriu Florin (2512—7, 9, 28—34), *Ş. g. 95* cl. VIII Gâţa Mihai (2495, 8—591, 4, 5, 7, 8, 10, 2—21, 3—5, 7541; 51, 80, 623, 5), *Ş. g. 114*, cl. VI Rosturnoiu St. (2512, 3, 5, 2, 28—32), *Ş. g. 119* cl. V Oncescu Mihnea (2528—33, 5, 45—7), *Ş. g. 121* cl. VIII Donescu Florin (2508—10, 6—8, 20—3, 5—7, 37, 9, 41, 2), *Ş. g. 122* cl. VI Blitzstein Emilia (2512, 3, 6, 7, 9, 29, 31, 3—5), cl. VII Ştefănescu Donu (2500, 14, 6, 7, 20, 33, 7), cl. VIII Brătrescu Anca (E : 2499—501, 3, 4, 6, 9, 10, 5—20, 2, 4—6), *Ş. g. 128* cl. VIII Găiculescu Smaranda (2514—7, 20, 4, 5, 7), *Ş. g. 135* cl. VI Armurieru Viorel (2512—4, 8, 9, 31, 3, 4, 46, 7), *Ş. g. 142* cl. VIII Dobre Silvia (2513, 5—7, 9, 20, 2, 8, 9, 42, 6, 59), *Ş. g. 146* cl. VIII Pintilie V. Viorel (2498, 503, 9, 12—4, 7, 9, 29, 35, 8), *Ş. g. 145* cl. VI Dumitrescu Elena (2512—6, 8—30, 55, 60, 2), Dumitru Liliana (2512—6, 29, 30, 45, 60, 2). Tăbuş Mariana (2522—6, 8—30, 45, 60, 2), Tiţă Gh. (2512, 4—6, 20, 8, 45, 6, 60, 2, 4), cl. VII Dumitru Gh. (2528—34, 45—8, 60, 7), Micherin Mariana (2518, 9, 23—6, 8—35), Oprişan Cristian (2528—34, 45—8, 60, 7), Stoian Tincuţa (2528—34, 45—8, 60, 7), cl. VIII Comana Narian (2512—4, 6, 7, 9, 20, 31—3), Grivei Mihaela (2520, 4—6, 8—35), Marin Dumitru (2512—4, 6, 20, 8—33, 45—8, 60, 2), Şerban Radu (2528, 30—2, 7, 35—8, 60, 2, 7), *Ş. g. 156* cl. V Dragne Gabriela (2512—5, 28—32), *Ş. g. 169* cl. VII Florescu Cristina (2527, 37, 9, 41, 52, 3, 68—70, 7638), Ivanier Lucia (2495, 8—505, 8, 12—20, 2—6), Pamfil Virgil (2512, 4, 5, 7, 9, 28, 9, 35), cl. VIII Hila Mihaela (2495, 500, 8, 9, 12—, —4, 6, 7, 9, 20, 3, 8—31, 3, 4), Hoisescu Neculae (2495, 9, 500—2, 8, 12—9, 9, 20, 4—7), *Vijelie Luminiţa* (2495, 7, 9—501, 6, 8, 9, 12—8, 20—8, 30—5, 7, 40, 1, 3, 4, 6, 52; 7554, 5, 6—9, 17, 20, 3), 36, 40—3, 6, 7, 58, 9, 61, 3, 76). *Ş. g. 173* cl. VII Andreievici Bogdan (2500, 2, 3, 5—20, 3, 5, 8, 30, 1, 3—5, 45—9, 7623, 4), *Ş. g. 177* cl. VIII Rădulescu Dan (2512, 3; 5—22, 5, 7—35, 7, 8, 40—4), *Ş. g. V. Alecsandri* cl. VII Croitoru Olga (2512—7, 9, 29, 33, 4), *Ş. g.* Cartojani cl. V Cîrstea Ion (2495, 512, 3, 5, 28—32), student Nicolae Dan (7521, 34—8, 54, 74, 87, 616, 7, 21, 30, 42, 9, 62, 3, 76, 83, 90, 700, 1, 4, 6, 8, 26, 44), *L. 1* cl. VIII Dragoştin Cătălin (2450.7, 40—2, 57—9, 7638, 89, 90, 3), Olteanu Ştefan (2494, 509, 24, 5, 541—4; 7551, 3, 4, 609, 37), Weiner Al. (2524, 5, 7, V0—4,57—9), cl. X Adrian Sorin (7529, 34—6, 8, 53—5, 60, 2, 3, 6, 80, 6, 92, 601, 9, 12, 3, 22, 3, 36, 41—3, 7, 63), Ionescu George (7610, 7, 9, 21, 40, 2, 3, 59, 62, 3, 8, 9, 74—8, 84, 5, 92, 4, 7, 701), Tronaru Aurelian (7542, 52, 4, 5, 62, 4, 612, 3, 38, 40—4, 6, 62, 3), Udrea Mircea (7529, 34—6, 8, 48, 52, 62, 80, 608, 12, 7, 21, 3), cl. XI Croitoru Stibina (7612, 4, 7, 21, 4, 7, 59, 50, 2, 3, 75, 6, 85, 8, 9, 95, 79, 3, 26, 7, 22, 44, 8, 9), Hahn Radu (7534, 5, 8, 41, 52, 4—6, 62 4, 6, 7, 70), Geogescu Dan Michael (7593, 609, 10, 2, 3, 7—24, 42, 3, 62, 3), Georgescu, Dan Cristian (7589, 34—8, 53—6, 9, 60, 5, 80, 608, 10, 2, 3, 7—23), cl. IX. Sterian Daniela (7726, 7, 35, 9, 52, E : 2450, 2—5, 7, 9, 60—3, 7, 9). *L. 4* cl. XI. Lincă Gh. (7612, 4, 40, 2, 3, 59, 62, 3, 90, 2, 3, 5, 7), *L. 5* M. Sadoveanu cl. VI Petre Gheorghe (2495, 9, 50, 3, 5—7, 9, 28, 31, 3, 4), Bahrim Mihaela (2512—7, 9, 20), Ilea Cristina (2516, 7, 9, 20, 6, 9, 32, 3, 5, 40), Maliţa Mihaela (2517, 9, 20, 1, 32, 3, 5, 40), Nachman Adrian (2517—20, 3, 4, 33,

4, 7), Popa Mihai (2515, 7, 9, 29, 31—3, 45), cl. VIII Buiteanu Alexandru (2517—20, 8 45, 52, 9), Manicatide Ioana (2515—7, 9, 20, 3, 6, 9, 41—3, 5, 7, 40), Clasa XI. *Manolache C. Nicolae* (7426, 33, 8, 42—50, 2, 3, 7, 64, 9, 75—84, 7, 501, 2, 5, 10, 4—6, 19, 25, 7—9, 312, 4—40, 2—4, 6, 9, 51—6, 8—60, 2, 3, 5—7, 9, 70, 2, 4, 7, 80—4, 6, 90, 1, 7, 9, 99, 603——6, 8, N. P). *L. 6* cl. VII Weiner Irina (2495, 4, 9, 500—4, 6—9, 12—44), *L. 7* Strihan Vlad (2513, 5, 6, 7, 9, 20, 3, 5), cl. VIII Agent Dan (2513, 5—20, 2, 4, 5), Atănăsoaie Mihaela (2495, 7—502, 12, 3, 5, 7—20), cl. IX Mateescu Alexandru (2524—6, 40—2, 4, 59, 97, 608, 36, 7, 674, 5, 92), George Oon (7529, 34—8, 44, 60, 4, 610, 2, 4, 5, 7, 21), cl. X Moscovici Paul (7529, 34—8, 42, 65, 612, 4, 42, 59, 62), *L. 8* cl. VIII Floreanu Ilinca (2512, 4, 6, 7, 9, 24, 8, 31, 3, 46), cl. IX Cinteză Mircea (258—10; 7529, 34, 5, 50—8, 63, 5, 8, 93, 609—12, 7—9, 21—4, 30, 5, 7, 8), *L. 10* cl. IX Brateș Nanu (2495, 500, 4, 7, 8, 12, 5—23, 25, 7, 31—3, 7, 40), Călin Silvia (2512—8, 20—3, 5—8, Dumbravă Mihaela (7608——10, 86, 8, 91, E : 2524, 7, 41, 4, 59). Gafița Gabriel (2512—7, 9, 20, 9, 31, 3, 4). Pătrăngenaru Victor (2512—35, 7, 41, 45, 6, 48—9, 52—9; 7623), cl. X Mihăileanu Nicoleta (7475, 6—8, 82, 97, 818, 505, 16, 676, 726). Voicu Alina (7529, 34—8, 61, 4, 12—4, 7, 22, 40, 3, 6, 95, 647, 59, 62, 39, 95, 7, 701—6), cl. XI. Popescu Ana (7639—42, 4, 6, 7, 58—60, 2, 3, 9, 94, 5, 7, 700, 3, 4, 6, 13, 38). *L. 11* cl. IX. Alexandru Ion (2501, 25—7, 41, 2, 4; 7552—6, 608, 9, 18, 23, 35), Claiman Mișu (2540—4, 78, 9; 7610, 8, 31, 6, 74, 6). Constantinescu Dan ((2495, 524—6; 7548, 92, 3, 608—10, 18, 9, 21, 4—6), Frangulea Ștefan (2508—10, 24—7, 41, 2, 4, 57; 7554, 618, 67, 74, 6, 8, 87), Popescu Eugen (6524—7; 7608—11, 9—21, 3—5), Soica Corneliu (2508—10, 24—7, 41—4, 78, 9), Țigoiu Victor (2495, 508—10, 24, 6, 40—2, 4, 59; 7527, 51, 5, 6, 608—11, 8, 20, 37, 87), cl. X Chirilă Camelia (7529, 34, 5, 52, 4, 608, 11, 7, 21, 42, 3, 75, 6, 92), Popescu Vladimir (7608—12, 7, 9, 20, 3, 4, 38, 9), Tudorache Victoria (7529, 34, 5, 52, 4, 608, 10, 2, 7, 21, 42, 3, 75, 6, 92), cl. XI Antonescu Miron (7618, 74—9, 81, 9, 81, 9, 726, 7, 35), Bădescu Constantin (7529, 34, 8, 54—6, 8, 80, 608—10, 2, 4, 7—9, 20—4, 35, 8—42, 4, 6, 9, 50, 2, 3, 5, 9—63, 74—8, 80, 1, 5, 6, 90, 2, 7, 9—701, 3, 4, 6), Chiriac Adrian (7608, 12—4, 23, 42, 60, 93, 5, 7, 773, 63), Chiriac Cristian (7580, 91, 601, 12, 4, 7, 8, 20, 2, 38, 40, 2, 3), Constantin Elena (7541, 50, 2, 60—7, 80, 93, 8, 9, 609, 10, 2, 4, 5, 7—20, 2, 5, 38, 40), Cornea Tudor (7529, 34—8, 54, 5, 614, 39, 43, 62), Dănilă Filofteira (7608, 10, 2, 8, 30, 2, 3, 59, 60, 76, 726, 35), Roșu Dumitru (7610, 9, 9, 21, 3, 4, 8—40, 59, 60), *L. 12* cl. VI Rizescu Marieta (2502, 2512—7, 9), cl. VIII Dima Rodica (2535, 42, 4, 58, 9, 70, 2, 77, 26), cl. IX *Obedeanu Sanda* (2509, 24, 6, 7, 40, 2—4, 59; 7501, 52, 4, 8, 605, 8, 10, 8, 20, 3, 33, 6, 7, 65, 73, 6—8, 80, 7, 90, 2, 726, 7, 32, 3), cl. X Merișanu Valentin (7534—8, 612, 7, 38, 42, 4, 87, 95, 7), cl. XI Lupașcu Alexandru (7529, 32, 4—7, 41, 2, 6, 50—6, 8, 60, 5) Rogalski Mircea (7529, 32, 4, 5—8, 41, 2, 6, 8, 50—6, 60, 5—8, P. N). *Bărcănescu Șerban* (7529, 32, 4—8, 42, 3, 8, 50, 6, 63—5, 7, 70, 7, 80, 90, 1, 3, 7—9, 601, 9, 10, 2—4, 7—24, 35, 7, 8, 40—3, 5, 6, 60, 1, 3, P.). *L. 13* cl. VIII Calianu Rodica (2503, 6, 9, 10, 2—4, 7551, 4, 609), Eftimescu Ana (2527, 42, 4, 8; 7508—62, 54, 75, 6), Iacob Antoneta (2499, 513, 5, 8, 27, 8, 30, 1, 46; 7608, 9, 76), Niculescu Ileana (2512—7, 9, 20, 3, 8—31, 3—5, 7, 8, 42, 5—7, 9, 59—62, 8—70, 2; 7726, 7), cl. IX Sanca Darius (2541, 2, 4, 57—9, 70, 1; 7638, 91, 726, 7), cl. X Blitz Andrei (7608, 10, 2, 8, 9, 21, 3, 75, 6, 90, 726, 7), Lăzărescu Răducu (7529, 34—8, 42—4, 50—4, 6, 60, 3, 5, 608—14, 7—9, 23, 5), Petrescu Andrei (7475—87, 90, 1, 3—502, 5, 7, 9—11, 27—9, 34—8, 40, 51, 2, 4—6, 8, 62, 4, 5, 80, 93, 60, 8, 9, 12—4, 7—23, *L. 15* cl. V Cernica Ruxandra 2513, 8, 19, 23—5, 8, 30, 2, 4, 45), cl. VIII Dodu Laurențiu (2516—20, 2, 4, 5, 33, 7, 40, 2, 3, 57, 9), Pipera Gabriel (2512, 3, 5—20, 2, 3, 7), cl. IX Marinescu Nicolae (2509, 10, 24; 7477, 91, 4—6, 51, 2, 608, 19), *Lic. 17. Avrămoiu Valentin* (7580, 92, 633, 5—42, 4—7, 58—63, 5, 7—8, 74, 5, 7, 8, 82—5, 7, 9—91, 3, 4, 7, 9, 700, 1, 3, P). cl. VIII Drăgușin Alex. (2495, 500, 3—10, 2—25; 7529, 38, 58, 62, 80, 619, 21, 3), *L. 18* cl. IX Dinescu Florin (2557—9, 70—2; 7608—10, 38, 87, 9, 7, 26, 7), cl. XI Musceleanu Ion (7500, 2, 5, 14, 25, 8, 48, 50—2, 5, 67, 80, 93, 612, 7, 9, 21, 3, 4, 39, 40, 2, 60), Serafim Paul (7529, 34—8, 92, 4—6, 67, 78), *L. 19* cl. XI Ripeanu Violeta (7593, 4, 9, 621, 39, 42, 59, 62, 75, 7, 8, 06, 7), *L. 21* cl. VIII Popescu Gaby (2512—23), Tiwig Gerhard (2516—23, 8, 31, 5, 7, 40, 2, 4), cl. IX Pleșoianu Ioana (2524—7, 40—4, 57—9), L. 22 cl. IX Atanasiu Draga (2510; 7529, 36—8, 42, 6, 50, 6, 60, 3, 5, 6), Bădescu Smaranda (7580, 609, 18—20, 3, 38, 67, 74—9, 84), cl. X. *Sergiescu Vlad* (7534, 5, 42, 6, 50—6, 80, 5, 98, 9, 591—3, 7, 601, 8, 9, 11, 17—24, 30, 1, 5, 6, 9, 46, 9, 58, 9, 61, 3, 5, 7, 8, 74—7, 80——94, 9, 700, 4—6, 17, 26, 7, 9, 31—3, 5, 41—4, 6, 7, 52, 4, 60, 2, 3, P.) c. XI Secoșanu Mihaela (7612, 8, 9, 23, 4, 39, 41, 74—8, 84), *L. 24* cl. VI Alexandrescu Silvia (2495, 7, 9, 500, 1, 8, 12—5), Herescu Rodica (2495, 500, 1, 12, 3, 5—7, 9), cl. VIII Vrejba Ileana (2495, 6, 9, 512, 3, 5—9, 22, 8, 31, 3, 4, 8), Weintraub Andrei (2495, 501, 3, 5—10, 22 4—6, 41, 2, 4, 57—9; 7618, 9, 22—4, 39, 76, 726), *L. 26.* cl. IX Ionescu Cristian (7529 34—8, 42, 50, 63, 5, 612, 42, 63), cl. XI Ionescu Doina (7640, 2—4, 74—6, 8, 97, 726, 7, 33), *L. 26* cl. X Cotariu Roland (7529, 35—8, 50, 2, 4, 5, 60, 612, 21, 3), Stoica Valentin

(7529, 34—8, 42—4, 8, 50, 4—6, 64, 5), *L. 28* cl. VI Filip Cristian (2512—4, 6, 7, 9, 28, 31, 3—5), cl. VIII Brill Vlad (2512—24, 8—35, 7, 40—2, 4, 6—9, 52, 6—9), Chira Florentina (2513, 6—9, 28, 9, 34, 45, 58, 9), cl. IX Mureşan Mihaela (2508, 9, 25, 6; 7529, 34, 5, 48, 54, 5, 608, 10, 9, 24), L. 30 cl. IX Platz Alexandru (2508, 24, 6; 7551—6, 64, 609, 12, 7 9, 21—3, 43, 63, 9, 76, 7, 80, 6, 9—92, 4), *L. 32* cl. V Milcoveanu A. Mihai (2495, 512—4, 8, 9, 30—2, (*L. 33* cl. VI Fetcu Laurian (2512—6, 9, 20, 31, 3, 4, 45, 6, 8, 9, 59; 7681), cl. VII Negoescu Gabtiela (2495, 500, 12—7, 9, 20, 9, 31—5), *L. 34*, cl. VII Popeneciu (2512—9, 28—35), *L. 35* cl. VIII Delangela Florin (2495, 8, 9, 501, 6, 8, 9, 22, 7), *L. 36* Corabineanu Adrian (2497, 9, 500, 12—7, 9, 26, 8—31, 3—5), cl. VIII Logofătu M. Anca (2512——35, 7, 8, 40—2, 5—7, 51, 8, 9; 7610, 75, 6), *L. 37* cl. IX Gheorghe Jana (2515, 7, 9, 28, 9, 31, 8, 42, 5, 6, 59, 60), cl. X Biro Leonida (7610, 12, 38, 42, 3, 63, 7, 75—8, 80, 618), Cercel Vasile (7534, 5, 52, 617, 9, 23, 43, 3, 74—8, 84), *L. 38* cl. X Dincă Gabriel (7529, 34—8, 51, 5, 6, 612, 4, 39—44, 6, 7, 62, 3), *L. 39* cl. IX Peliman Mircea (2524, 6, 7, 40—2, 4, 58, 9; 7609, 23, 74—8), *L. 40* cl. XI Barbic Adriana (7529, 34, 5, 7, 8, 54, 610, 2 7, 9, 38, 40, 2, 4, 59, 63), *L. 42* cl. VI Ţenea Adina (2498, 500, 14, 7, 9, 24, 8, 9, 31, 3, 5) cl. VII Ţenea Carmen (2529, 31, 3, 5, 45—8), Ursache Octavian (2499—501, 4, 16—20), Ursu Dan (2516, 7, 9, 33—5, 48, 9). Student Georgescu Mihai (I.P.B) (7580, 3, 4, 8, 9, 93, 9, 605, 8, 9, 10, 2, 4, 95—25).

BUHUŞI. (Bacău) *L. 1* cl. VII Aciobăniţei Maria (252—9, 28, 9, 31, 4).

BUŞAG. *Ş. g. 20* cl. VI Mureşan Liviu (2489, 502, 12, 5, 7, 9, 29, 33), Pop Gh. (2495, 512, 5—7, 9, 24, 9, 32—4, 51, 2), cl. VII Dragomir Gh. (2512—4, 6, 9, 20, 8, 31, 3), cl. VIII Gâta Cornel (2495, 7, 9—501, 3, 4, 6, 9, 12, 3, 5, 6, 8, 22, 8, 30, 1, 3, 4, 42, 5, 6, 59).

BUZĂU. Popa Marcel (7534, 5, 7, 8, 52, 4, 64, 7, 74, 610, 4, 7, 8, 21, 2, 42, 4, 59), 60, 3), *L. 1* cl. VIII Burloi Maria (2515—7, 9—23, 5—31, 3, 5, 8, 42, 5—9), Constantinescu Florin (2495, 9, 50, 9, 12—8, 22, 3, 8, 30, 1, 4, 5, 7, 8, 42, 5—7, 9, 58, 9), Constantinescu Ştefania (2518—20, 2, 8, 9, 31, 3, 4, 42), Trifu Mioara (2512, 3, 5—20, 2, 8, 9, 31, 4, 8, 42, 5, 6, 9, 57—60, 64, 70, 2), cl. IX Daneţ Nicolae (2541—4, 7534, 5, 52, 77, 619, 35, 40, 63), Ionescu Dan (2508, 9, 24, 7; 7475—7, 94—6, 502, 54, 623), cl. X Mihăiescu Tiberiu (7529, 34—8, 42, 50—6, 60, 2, 3, 5—7, 8, 40, 6, 90, 1, 3, 7—9, 609—12, 7, 9, 20, 2), cl. XI Săraru Aurel (7608, 9, 12, 4, 7—21, 3, 30, 88), *ϕ. 2* cl. IX Constantin Nicolae (2492, 4, 501, 10, 40—2; 7438, 75—8, 91, 4—7, 500, 2, 54, 608, 9, 18, 9, 30, 1, 7), Casa de copii cl. VIII Wester Gherda (501, 3, 4, 12—22), Boiangiu Radu (2512, 3, 6—20, 8—30, 3, 4, 7, 8).

CALAFAT. absolvent Voican Dan (7529, 32—8, 48, 52, 64, 7, 74, 610).

CARACAL (Oltenia). *Ş. g. 5* cl. VIII Iliescu Maria (2517, 9—23, 8—30, 2—4, 7), *L. 1* cl. IX Stoica Tudorel (2524, 40, 1, 3, 4, 59; 7610, 9, 37, 74, 7, 8, 84), cl. X Alexandru Alex. (7636, 8, 9, 43, 74—8, 83, 4, 6, 7, 92, 3, 726, 9, 33, 5) *L. 2* cl. IX Andrei Octavian (2525—7, 40—2, 58, 9; 7587, 619, 75), cl. XI *Virtosu Mihail* (7534—8, 41, 4, 50—2, 4, 6, 8, 61, 2, 3, 6, 77, 80, 3, 4, 90, 9, 10, 2—4, 7, 9, 21—3, 36, 8, 42, 61, 2).

CARANSEBEŞ (Banat) *L. 1* cl. VII Kelner Ştefan (2512—7, 9, 23, 8—30), Poiană Dinu (2502, 4, 5, 7, 8, 13, 7—9, 23—41), Romanescu Adrian (2500, 4, 16, 7, 9, 20, 5, 6), Vonica Alexandru (2495, 7—501, 3, 4, 13—20, 8, 9, 31, 8, 46—8, 51—3, 9; 7675), cl. VIII Poiană Zoe (2495—7, 9—502, 4, 5, 7, 8, 10, 2, 3, 5, 7—20, 3—8) *L. 2* cl. V Armaş Ion (2513, 5, 7, 9, 24, 8, 9, 32, 5), cl. VII Sabău Doru (2495, 512, 3, 5, 20, 3, 8, 30, 1, 3, 4), cl. X Bartof Fred (7580, 4, 93, 9, 609, 10, 2, 4, 8, 9, 22, 3, 32, 5, 6, 8, 40, 39, 5, 63).

CARAULA (Oltenia) *Ş. g.* cl. VIII Ganea Bebe (2513, 5, 6, 8—20, 2, 4, 5).

CALAN (Hunedoara) absolvent *Cubineţ Ion* (7529, 32, 4—8, 42, 4, 50, 2, 5, 8, 9, 61, 3, 5, 8—71, 3, 4, 7, 8, 8, 80, 3, 12, 92, 601, 8, 10, 2, 4—7, 9, 21, 3, 6, 32, 6, 40, 2—4, 50, 1, 8—60, 3, 80, 8, 90, 2, 3, 7, 700, 1, 4, 6), *L. 1* cl. VIII Bal Corneliu (2495, 9, 502—4, 6, 9, 10, 2—7, 9, 20, 2—6; 7581, 93), cl. X Găşpărescu Gh. (7495—9, 501, 2, 4, 5, 9, 10, 4, 28, 9, 34—8, 52, 4, 5, 8, 60, 1, 80, 609—14, 7—9, 21, 3, 5).

CĂLĂRAŞI (Bucureşti) *L. 2* cl. X Oancea Constantin (7534—7, 54, 80, 610, 2, 7, 8, 20, 1).

CAPRENI. *Ş. g. 1* cl. VII Georgescu Ion (2495, 7, 50, 8, 12, 3, 5, 6, 20, 3).

CEICA (Oradea) *Ş. g.* cl. VII Coiţă Vasile (2528, 30, 1, 3, 4, 7, 58—60, 70), cl. VIII *Troie Valeriu* (2495, 7—501, 3—5, 8—10, 2—25, 8—31, 3—9, 41, 4—7, 9, 53, 7—60, 4, 7, 70, 2; 7550, 2, 4).

CELARU (Oltenia) *Ş.* e. cl. V Preda Marin (2495, 7, 513, 24, 9, 32, 3, 45), c l. VI Ciocîrlan Stelian (2513, 5, 24, 8, 9, 31, 2, 45) Tievaru Ioana (2512, 3, 5, 24, 8, 9, 31—4, 45) Giuca Tudorița (2513, 5, 24, 24, 8, 9, 31—3, 45), Ilie Florea (2512, 3, 5, 24, 9, 31—3, 45), Ion Marioara (2495, 7, 515, 7, 9, 24, 9, 32, 45), Neatu Rodica (2512, 3, 5, 24, 9, 31—3, 45), Petcu Marian (2497, 9, 500, 13, 6, 20, 8, 45—7), cl. VII Andrei Elena (2515, 8, 9, 20, 4, 9, 31—3, 45), Badea Petra (2515, 20, 4, 5, 31—3, 45), Dinu Floarea (2495, 7, 500, 15, 5—7,

9, 24, 9, 32—4, 45), Ilie Ilie (2512, 3, 5, 7, 20, 4, 9, 45), Iliescu Elena (2500, 2, 15, 7, 9, 24, 9, 31—4), Leoveanu Constantina (2512, 5, 7, 9, 24, 9, 31—3, 45), Marcu Elena (2495, 513—7, 9, 24, 9, 32—4, 45), Stan Gh. Maria (2495, 7, 502, 15, 7, 9, 24, 9, 23, 3, 45), Stancu Silvia (2512, 5, 7, 9, 24, 9, 31—3, 45), Tiţa Oprica (2500, 15, 7, 9, 24, 9, 32—4), cl. VIII Andrei Carmen (2495, 502, 6, 7, 9, 30, 3, 4, 42, 5, 50, 5, 7), Călăreanu Viorica (2513, 5—7, 9, 20, 4, 9, 32, 45), Ene Eugenia (2513, 5—7, 20, 8, 9, 31, 3, 45), Truţă Angela (2515, 7, 9, 20, 4, 8, 9, 31, 2), Tudor Alexandru (2513, 5—7, 9, 20, 2, 4, 8, 9, 33, 4).

CHIŞINEU CRIS (Crişana) *Ş. g.* cl. VI Marşen Liana (2512—7, 9—21, 3, 4), cl. VIII Arsu Aristiţa (2415, 9, 500, 2—4, 6, 8—10), cl. IX Puta Mircea (2508—10, 24, 6; 7496, 551, 2, 4—6, 62).

CIOCÎRLIA (Bucureşti) *Ş. g.* cl. VII Caloianu Angela (2495, 8—500, 12—7, 9, 20).

CISNĂDIE (Braşov) *L. 1* cl. X Ciobanu Mariana (7511, 34—7, 52, 9, 610, 12, 21, 42, 62).

CÎMPENI (Cluj) Ş. g. cl. VIII Joldeş Laura (2528, 31—3, 40—4) L. 1 cl. X Mucea Ioan (7580, 608—11, 7—9, 21—4, 35, 7).

CÎMPIA TURZII (Cluj) *Ş. g. 14* cl. VIII Praja Ioan (2512, 4—7, 9, 29, 32, 45, 52), *L. 3* cl. VIII Bogdan Octavian (2495, 8—500, 9, 13, 5, 7—20, 2, 4), cl. IX Cîmpian Gh. (2508—10, 24, 5, 40, 1, 4; 7553, 4, 608, 9, 19), Dolha Ana (2524, 5, 41, 2, 4, 59; 7619, 23, 74—6, 9), Ganea Marius (2540—2, 4, 58, 9, 70, 2; 7638, 76—8, 92, 726, 9), Klein Iuliana (2524, 5, 41—4, 59; 7619, 23, 74—6).

CÎMPINA (Ploieşti) *Ş g. 1* cl. IV Stoican Aurel (2495, 516, 28, 30—4), cl. VIII Ivaşcu Ciprian) 2513, 5, 7, 9, 22, 8, 9, 37, 45), Turtureanu Marian (2495, 8, 503, 6, 9, 12, 5, 22), *L. 1* cl. IX Manta Sorin (2524—7, 40—4, 58, 9; 7636, 89), Predescu Constantin (2524, 6, 40—4, 58; 7636, 89), Tănăsescu Aurel (2509, 10, 25—7, 41, 3, 4; 7554, 6, 608, 9), cl. X Ivaşcu Florin (7534—8, 50, 3, 4, 65, 609, 12, 7—21, 4, 38—40, 2, 6, 62, 3), Marin Ion (7617, 8, 21, 38—40 3, 74—81), Stoian Luminiţa (7610, 2, 3, 7—23, 40, 2, 62, 74—6), Văcăroiu Ioana (7550, 65, 609, 10, 3, 7, 21, 2, 38, 42, 6, 75—7, 84, 5, 7, 90, 2, 3, 7, 9, 703), cl. XI *Alexandriu Doru* (7529, 34—8, 46, 8—58, 61—7, 80, 4, 6, 7, 90, 9, 608, 9, 11—3, 7—9, 21—5, 7, 30—2 5, 42—, 4, 6, 7, 9, 50, 6, 8—63, 5, 7, 8, 74—91, 3—5, 7, 700, 1, 3—8, 10, 1), Constantinescu Florin (7529, 34, 6, 7, 52, 4—6, 612, 4, 7, 21, 3, 42), Stoian Luminiţa (7631, 8, 44, 63, 77, 85, 90, 2, 5, 7, 770, 3, 26, 7).

CÎMPULUNG MOLDOVENESC. *Ş. g. 3* cl. VIII Cojoc Mihail (2512—6, 9, 20, 31).

CÎMPULUNG MUSCEL, *Ş. g. 2* cl. VIII Tudose Florin (2512—7, 20, 31, 3, 4, 7), *L. 1* cl. XI *Hudrubeţiu Florin* (7552—4, 6, 609, 10, 2—4, 8, 90, 21, 35, 6, 8, 9, 41—3, 6, 63, 5, 7, 74—8, 4, 9, 90, 5, 7, 9, 700, 1), *Ş. specială 13* Pohoriu Nicolae (2540—4, 57—9; 7636—8, 87—93).

CLUJ. *Ş. g. 2* cl. VIII Comănescu Sorin (2495, 9—501, 4—10), Cotiu Neguţa Lia (2513, 5, 8, 28, 9, 31, 45, 6, 60, 70), Oancă Ion (2512—4, 6, 8, 22, 4, 5), *Ş. g. 3* cl. VII Murariu Mihaela (2513—20, 2, 5, 8—35, 45, 6, 58, 9), *Ş. g. 7* cl. VIII Zglobiu Nicolae (2495, 7, 9—502, 4—8. 12—27), *L. M. Eminescu* cl. IX Teuşan Ovidiu (259—11, 24, 40, 1, 4, 5, 7—9; 7552, 4, 609, 10, 9, 36, 74—6, 84), *L. Coşbuc* cl. VIII Marino Florin (2513—7, 9, 20, 8), *S. Em. Racoviţă* cl. V. Dragoş Fulviu (2512—6, 25, 8, 31, 3, 4), Pană Teodor (2528—31, 45, 6, 60, 4), cl. VI Constantinescu Cristina (2513, 5, 6, 28, 9, 31, 3, 45, 6, 51, 60, 4), Gavrilă Elena (2515—7, 28, 9, 31, 3, 45), Pop Cezar (2525, 6, 8—30, 3, 45, 60), Şerban Monica (2497, 508, 13, 5—9), Ţintea D. (2495, 7, 500, 1, 4, 12, 6, 7, 8), cl. VIII Surlea Monica (2516—7, 9, 28—31, 45), *S. G. Bariţiu* cl. V Rădulescu Mircea (2512, 5, 28, 31, 3, 4, 45, 6, 59), cl. VI Popa Mihaela (2512—6, 28, 30, 1, 3, 4), cl. VII Iancic Bubu (2497, 5, 33, 7551, 4), cl. VIII Dron Comşa (2522, 4, 8, 9, 42, 57—9), *L. N. Bălcescu* cl. V Popescu Mircea (2513, 4, 6, 24, 8, 9, 31—3), cl. VII Grigore Liana (2495, 8, 9—5002, 4, 8, 9, 13—7, 9, 24), Zamfir Felicia (2497, 502, 12—4, 6, 7, 9, 29, 31, 2), cl. VIII Constantinescu Sorin (2512—27), Kajtar Maria (2495, 7—500, 3—9, 12—21, 23—6), Stănescu Dena (2513, 6, 7, 22, 8—31, 5, 7, 42, 6, 59, 60, 4), cl. XI Tepuţ Nicolae (7580, 92, 9, 608—10, 2, 4, 7—24), *L. 10* cl. VII Coman Ileana (2516, 7, 9, 20, 33, 5, 48, 55, 64), Dan Mircea (2516, 7, 9, 21, 33, 5, 48, 51, 64), Feldrihan Virginia (2516, 7, 9, 20, 33, 5, 8, 55), Lazăr Eva (2516, 7, 9, 20, 33, 5, 48, 55, 64), Oprişiu Oprişan (2495, 9, 500, 1, 12, 5—7), Şerban Emilia (2516, 7, 20, 33—5, 48, 51), Toma Valeria (2516, 7, 20, 33—5, 48, 51), Vancea Mariana (2516, 7, 9, 20, 33, 5, 48, 64), cl. VIII Morfievici Radu (2512—23). Petruţ Ioan (2512, 3, 5, 6, 8, 20, 2, 8, 30, 1, 4, 8, 41), *L. 11* cl. IX Csetri Klara (2508—10, 24—7, 40—4; 7529, 34, 5, 52, 4—6, 80, 60, 8, 9, 11, 7—20, 3, 4, 30, 6). *L. 15* cl. VII Horvat Viorica (2495, 500, 5, 7, 13, 5—7), cl. VIII Olteanu Doina (2495, 500, 12, 6—20, 4, 6, 9, 31, 4, 7, 45, 52, 3, 60, 8, 9), *L. electro-energetic* an I Crişan Felicia (E : 2515, 20, 8—31, 3, 45, 6, 59), Bălescu Liviu (2516—20, 3, 48, 55, 64), Cuc Maria (2517—20, 33, 48, 55, 64).

COMARNIC (Ploieşti) *L. 1* cl. XI Sldasoro Augustin (7674—8, 80—5, 7, 90, 3, 7, 9, 701), Buzatu Constantin (7532, 51, 67, 99, 608—10, 2, 3, 7—23, 31, 8—40, 2, 3, 60—2), Cojocaru Ion (7608, 12, 8—21, 38—40, 2, 3, 75, 6, 8).

CONSTANȚA. *Ș. g. 5* cl. VIII Pascu Eugen (2512—21, 4, 6, 7), *Ș. g. 12* cl VI Ciocu Rodica (2495, 7, 515, 7, 28, 9, 31, 45), cl. VII Neguț Mihai Dan (2512, 3, 5—20, 4, 64), cl. VI *Simote Cătălin* (2497—504, 6, 8—26, 9—33, 7—9, 42, 4—7, 52, 7) *Ș. g. 24* cl. V—II Dropol Mircea (2495, 7, 500, 1, 4, 12—6, 20), *L. 1* cl. VII Dovgan Mihaela (2495, 500, 1, 4, 6, 12, 4, 5, 7, 9, 22), cl. IX Ionică Ștefan (2508, 9, 24, 6, 7; 7534—7, 48, 50, 2—6, 8, 63—5, 80, 98, 609, 10, 2, 7, 8, 20, 1). cl. X Perșoi Radu (7593, 610, 8, 22—4, 37, 8, 87, 90, 726, 9), cl. XI Mîndruță Rodica (7618, 40, 7, 50, 9, 60 m 4—8, 81—3, 5, 7, 90, 3, 5, 7, 701, 3, 4, 8, 14, 26—8, 32, 3, 5, 6, 41, 4), *L. 3* cl. VIII Vidican Alexandru (2512—29, 2—5, 7—9, 32—4, 7), *L. 4* cl. IX Bordea Gh. (2509, 10, 24—6, 41, 3, 4; 7551, 2, 4, 93, 601, 8, 10, 23), cl. X Bordea Mircea (7534, 5, 7, 8, 51, 2, 4, 5, 93, 601, 8, 12, 12, 9, 23).

CORABIA (Oltenia) *L. 1* cl. XI *Mihai Gh.* (7580, 612, 20—2, 4, 7, 31, 5, 8, 9, 41, 3, 61, 2, 74, 5, 7, 8, 80, 2—5, 7, 8, 92—2, 3, 703, 29, 32, 4, 6, 9, 41, 9).

CORBENI (Argeș) *L. 1* cl. XI Vlaicu Ileana (7640—2, 4—7, 62, 9, 71, 94, 5, 7, 9, 701, 3, 48).

COSTEȘTI (Argeș) *Ș. g.* cl. VIII Constantinescu Marian (2515—7, 9, 20, 2, 8, 31, 7, 45, 51), cl. VIII Stoican Marinela (2512, 3, 5—21, 8, 9, 31, 3, 4, 8, 42, 5—8, 58).

COSTIȘA (Bacău) *Ș. g.* cl. VIII Cosma Elisabeta (2513—20, 5), Stan Ioan (2513, 5—20, 2).

COTATCU *Ș. g.* cl. VII Iorga Gh. (2513, 5, 6, 8—20, 5, 8).

CRAIOVA. *Ș. g. 2* cl. VIII Dăescu Cornel (2495, 9, 503, 6, 9, 12, 3, 5—7, 9, 22, 3, 8—31, 3—5, 8, 40—4), *Ș. g.* 3 cl. V Nicula Sorin (2500, 1, 16, 7, 9, 33—5), *Ș. g. 7* cl. VII Poșoiu —aul (2512, 6, 9, 31—4, 7, 45), *Ș. g. 10* cl. VIII Mărincă Emilia (2495, 9, 500, 9 12—7 9, 28, 30), *Ș. g. 11* cl. VII Sîrboiu Cristian (2512—7, 9, 28, 9, 31—5), *S. g. 22* cl. V Ionescu Adrian (2495, 7, 512, 28, 30, 1, 3, 4), *Ș. g. 24* cl. VIII Ciulin Luminița (2512—9) *L. 1* cl. V Stăncuț Adriana (2512—4, 7, 9, 29, 35, 45), cl. VII Pojonaru Florin (2495, 500, 12—7, 9, 20, 3), cl. IX Morandini Nicolae (2503, 8, 42, 57—9; 7553, 4, 6, 608, 18, 9, 22, 3, 30, 1, 75, 6, 81, 6, 7, 9), Tătaru Ion (2505, 6, 22, 8, 31, 41, 2, 4; 7580, 679, 81, 6—8, 93), cl. X Dumitru Gh. (7617, 44, 69, 75—8, 80, 1, 4, 5, 97, 701, 3), cl. XI Bălan Constantin (7529, 34—7, 52—4, 621, 3, 39, 40, 2), Diamanolescu Aurel (7529, 34—8, 50, 2, 4, 6, 9, 64, 5, 80, 610, 2, 4, 7—24), Neagu Gabriel (7527—9, 34—8, 52—4, 6, 80, 4, 92, 3, 9, 601, 8—10, 2, 4, 7—9, 21, 3, 7), *Pătra Cristian* (7561, 3—5, 99, 608—10, 2, 4, 7—23, 38, 40, 2, 4, 6, 59, 62, 3, 9, 80, 1, 5, 7, 90, 2, 5, 7, 9, 701, 3). Sandu Viorel (7599, 93, 610, 2, 4, 7, 21, 3, 31, 8, 40, 2, 7, 75—8, 80—2, 4, 5, 8, 93, 7, 704, 49), Turcu Ilie (7601, 8, 9—12, 4, 7, 8, 21, 3, 4, 32, 5—42, 4, 6, 7, 9, 62, 3), Țepuș Nicolae (7511, 3, 5, 6, 25—9, 32, 4—8, 42, 6, 51, 2, 4—6, 62, 4, 5, 7, 9, 70, 6, *L. 2* cl. IX Aștefanei Ion (2524—9; 7608—11, 89), Belu Carmen (2517—9, 22, 3, 5, 6, 40, 2, 4, 57—9), Dobreanu Iulian (2524—7, 41—4, 57, 9, 7621, 4, 75, 92), Dumitrache Marian (7527, 9, 34—8, 48, 54, 5, 64, 5), Dumitrana Irina (7609, 19, 37, 74, 5, 7, 84, 92, 2526, 41, 2, 57—9). Eșanu Dan (2540—4, 57—9, 70—2; 7692, 726, 7), Popescu Rodica (7529, 34—8, 51, 9, 60, 614, 39, 42—4, 6), Stănescu O. Marin (2522—4, 41, 3, 4, 58, 9, 70; 7608, 88, 91), cl. X Ciocîlteu Elisabeta (7529, 33—6, 8, 51, 9, 610, 2, 4, 7). Duicu Alexandra (7529, 34—8, 59, 610, 2, 4, 7, 8, 23, 39, 40, 2—4, 63), Ștefanache Cornelia (7612, 7, 38, 9, 42—4, 6, 75, 6, 95. 7, 703), cl. XI Croitoru Adrian (7580, 99, 610, 7—21, 3, 31, 6, 8, 40—5, 59, 67, 74, 5, 7, 8, 82, 4, 5, 7, 92, 7). Florescu Haralambie (7612, 7, 9, 38, 9, 42, 3, 67, 75, 81, 95, 7, 703, 26, 7, 9, 32, 3, 9), Greblescu Alexandru (7612, 7, 9, 38, 9, 42, 3, 67, 75, 6, 81, 95, 7, 703, 26, 7, 9, 32, 3, 9), Guran Tiberiu (7531, 59, 610, 7, 20, 36, 50, 2, 74—7), Lungu Valeriu (7631, 6, 9, 40, 2—4, 59, 62, 76, 92, 3, 7), *Ouatu Florin* (7511, 27, 9, 34—7, 48, 54, 5, 64, 5, 80, 99, 610, 7—21, 3, 31, 6—45, 59, 62, 7, 74—8, 82, 4, 5, 7, 92, 3, 7, 703), *L. 3* cl. V Ionescu Daniela (2495, 512—4, 28, 31, 3, 4), cl. VI Jugo Violeta (2515—20, 3, 6), Petrescu Denise (2513, 6, 7, 9, 29, 31, 3, 4, 45, 6, 59), cl. VII Călinescu Lila (2512—9), Marinescu Florentina (2512, 4—6, 9, 29, 33, 5), Vlăduț V. Cristian (2513, 5—7, 9, 28, 9, 31), cl. VIII Marinescu Rodica (2495, 509, 12, 3, 6—8, 20—2), Polizu Sorin (2512—6, 20, 31, 9, 31, 3, 4, 6), cl. IX Popescu Monica (7534—7, 51, 4, 612, 7, 21, 2, 40, 2), Teodorescu Dalila (7529, 34—8, 51, 3, 4, 6, 65, 609, 10, 12, 7, 21, 2, 35, 8, 40—2, 4, 51, 75), *L. pedagogic* an II Idjilof Mioara (2518—20, 2, 37, 8, 40, 2, 4, 58, 9; 7676). Studenți. Nistorescu C. Titel (7630, 8—42, 52, 9, 62, 3, 6, 7, 74—8, 83, 4, 6—90, 2, 703, 4, 6, 8, 27—30, 5, 8, 49), Cismaru Cornelia (7634, 5, 42, 4, 57, 62, 83, 5, 90, 5, 9, 701, 7, 9, 35, 44, 8, 51).

CREVEDIA (București) *Ș. g.* cl. VI Iliescu Gabriela (2495, 7, 9—501, 4, 5, 8).

CRISCIOR (Hunedoara) *Ș. g.* Iovan Dorin (2506, 28—31, 3—5, 7, 42, 4—6, 60, 1, 4).

CUDALBI (Galați. *Ș. g.* cl. VI Posoga Constanța (2512—6, 9, 28, 9), cl. VII Carp Niculina (2504, 7, 8, 12—6, 20), cl. VIII Bejan Valentina (2495, 500, 2, 9, 12, 3, 5, 6, 8, 9, 28, 32). Posoga Elena (2498, 502, 4, 7, 8, 10, 2—20, 3, 5, 8—34, 7), Sava Sanda (2497, 50, 4, 8, 13, 5, 24, 7). Vitănescu Maria (2497, 500, 2, 4, 8, 12 4—7, 25, 8, 9).

DĂBULENI (Oltenia) *L. 1* cl. IX Negriţoiu Mişu (2526, 7, 41, 2, 4, 57, 9; 7608, 9, 18, 42, 75, 6, 81, 6, 9). cl. X Chivu Marin (7529, 34—8, 51, 2, 4, 62, 93, 608, 12, 7—23, 36, 42, 62), Dinu Nicolae (7529, 35—8, 51, 2, 4, 60, 2, 608, 12, 4, 7—21, 3).

DĂRMĂNEŞTI (Argeş) *Ş. g.* cl. VII *Dumitrache Aneta* (2506—35, 7, 8, 40, 2, 4—53).

DEJ (Cluj). *Ş. g. 1* cl. VIII Vaida Liviu (2495, 6, 9, 500, 3, 4, 6, 9 m 12, 3, 5—7, 20, 3, 5). *L. 1* cl. X Ilieş Ioan (7529, 34—8, 54, 93, 639, 42—4), Vaida Gh. (7529, 34—8, 54, 93, 608, 39, 42—4), *L. 2* cl. VIII Morariu Marcel (2512—20, 2, 7, 8, 31—5).

DEVA. *Ş. g.* cl. V Petringenaru Rodica (2495, 7, 8, 512—4, 28, 9, 31).

DETA (Banat) *Ş. g.* cl. VII Mocofan Cornelia (2512—20, 3—6),

DOLHASCA (Suceava) *L. 4* cl. X Iosubescu Dan (7610, 7, 8, 36, 8—44, 59, 62, 76, 90, 70), cl. XI Alexandrescu Clement (7529, 34, 7, 41, 9—51, 4, 62, 6, 80, 4, 93, 9, 614, 21, 2, 4).

DOROHOI. *Ş. g.* cl. VI Avram Sorin (2512—5, 7, 28, 31, 2), cl. VII Păvăloiu Silvia (2512, 35—7, 9, 20), cl. VIII Corniciuc Dumitru (2512—22, 8—34, 7, 8, 42, 5, 6, 8), Grigor Dorina (2512, 4, 6—9, 28, 30—4, 7, 8, 45—7, 64, 8, 9), *L. 1* cl. VIII Isac Dan (2512—20, 2—4), Leizerovici Lăzărică (2512—5, 7, 28, 31, 2), Lerner Fridica (2513, 7, 8, 22, 8, 31, 42, 4, 60, 4, 72, 7726), Meerovici Lili (2519, 28, 30, 1, 3, 45, 5, 60, 4), Meer Wabrian (2 513, 7, 8, 22, 8, 31, 42, 4, 60, 4, 70, 2; 7726), Nechifor Mihai (2512—8, 20—2, 8, 33, 4, 44, 58, 60, 4, 7, 70; 7726, 7), *L. 2* cl. VIII Scheib Erich (2512—22, 8, 30, 1, 3, 4, 7, 8, 40, 2, 5—7, 58, 9), Zelingher Clare (2512, 3, 5—20, 2, 8—31, 3, 45, 6, 58, 9), cl. IX Jaluba Petru (2505, 8, 9, 24, 7, 44, 7529, 52, 608, 10, 2, 63).

DRĂCŞANI (Bucureşti) *Ş. g. 1.* cl. VIII Dorobanţu Petrică (2495, 9, 500, 3, 4, 6, 9, 10, 2—6, 8—24, 6).

DRĂGANU (Argeş) *Ş. g.* cl. VIII Diaconescu Natalia (2512, 4—20, 2, 3).

DRĂGĂNEŞTI OLT (Argeş) *Ş. g.* cl. V Mihalache Florica (2516, 32, 45, 6, 8, 60, 4, 70), cl. IX Durigu Mircea (7580, 608, 12, 4, 7—9, 21—3, 76, 703).

DRĂGĂNEŞTI DE VEDE (Bucureşti). *Ş. g.* cl. VIII Stancu Marian (2512—20, 2—5, 8—35, 7, 8, 41, 4).

DRĂGĂŞANI (Argeş) *L. 1* cl. VII Creţan Miron (2495, 7—503, 5, 7, 10, 2—7, 9, 28, 30, 3, 6), cl. IX *Stăvaru Gh.* (2540—4, 58, 9; 7551, 5, 6, 608—10, 8—20, 36, 8, 64, 5, 84—8, 80, 6, 8, 92, 726, 7, 9, 31—3), cl. XI Ciupag Mihai (7639, 40, 2, 3, 59, 62, 3, 74—6, 90, 5, 7, 703, 26).

DRĂGOEŞTI. (Argeş) *Ş. g.* cl. VIIIAntonie Petre (2512—5, 20, 2, 3, 31, 7, 41, 7, 8).

DUMBRĂVENI (Braşov). *L. 1* cl. XI *Wildmann Wilhelm* (7529, 34—8, 41, 50, 1, 4—6, 8, 62, 4, 78, 80, 608, 10—2, 7—22, 4, 5, 36, 8—40, 62, 3, 7, 9, 74—9, 82—5, 7, 9, 95, 701, 3).

EDERA (Ploieşti) *Ş. g.* cl. VI Şelaru Constantin (2513, 5, 6, 9, 22, 3, 8—31, 3, 5, 7, 44, 5, 52).

FĂGĂRAŞ. *Ş. g. 2.* cl. VIII Pavel Florin (2514—6, 9, 28, 31, 3, 45). *Ş. g. 5.* Cosgarea Emil (E: 2500, 1, 6, 7, 9, 33—5).

FĂGET (Banat), *L. 1* cl. XI *Babescu Marius* (7529, 345, 7, 8, 52—5. 60, 1, 7, 86—8, 608, 10, 2, 7—22, 30, 6, 40—3, 59, 62, 3).

FĂLTICENI (Suceava) *L. 1* cl. X Olaru Neculai (7612, 20, 38, 9, 42, 3, 59, 61, 3, 75—7, 97, 9, 701), cl. XI Nicolau Fănică (7632, 6, 9, 40, 2—4, 6, 59, 62, 3, 76, 90, 2, 3). *L. 2* cl. VIII Eizicovitz Simonel (2512—20, 2, 4, 6; 7619, 23). Absolvent. Gorovei Sorin (E: 2528, 30—4, 7—44, 7620, 1, 38, 49, 53, 6).

FĂUREŞTI (Oltenia) *Ş. g.* cl. VIII Vişoiu Cornel (2512, 3, 5—20, 5, 8, 30, 1, 3, 4).

FETEŞTI (Bucureşti) *L. 1* cl. XI Pîrvulescu Roman (7612, 4, 20, 1, 39, 42—4, 62, 75, 8, 87, 92, 3, 7, 704, 6), Vasiliu C-tin (7612, 4, 20, 1, 39, 42—4, 62, 75, 8, 87, 92, 3, 7, 704, 6).

FETEŞTI GARĂ *L. 1* cl. XI Tudor Victor (7593, 601, 10, 2, 7, 8, 21, 38, 40, 2. 3, 44, 7, 62, 3).

FIENI (Ploieşti) *L. 1* cl. VII Ciineş Adriana (2495, 500, 16, 7. 9, 24, 7, 31, 2, 7), cl. VIII Popescu Liliana (2495, 7, 500, 16, 7, 9, 20, 4, 7, 21, 2, 7), cl. X Mircea Gh. (7611, 36. 74—6, 8, 86, 7, 90, 2, 726—9, 32).

FILIAŞI (Oltenia) *Ş. g.* cl. VII Popescu Irinel (2795, 7, 9—501, 3, 12—27). L. Clasa X *Băluţă Constantin* (7529, 30, 4—9, 41, 2, 4—65, 7, 70, 2, 6, 7, 8—81, 4, 6, 7, 9—95, 7, 7—602, 5, 6, 8—14, 7—25, 32).

FOCŞANI. *L. 1* cl. VIII Baner Alexanda (2495, 7—500, 2, 6, 9, 10, 2, 5—20, 4, 7—9, 31, 3, 42; 7550). Kramer Iosif (2495, 8—500, 9, 12—20, 2—8, 31, 3—5, 7, 46, 7, 58, 9)

FRINCESTI DEZROBIŢI (Argeş). *Ş. g.* cl. VIII Paraschiv Dumitru (2499—502, 5, 7, 8, 13, 5—7, 20, 3, 5, 6, 8, 31).

E 1426

MŰSZAKI KÖNYVTÁR 1883

TABLA DE MATERII

a Gazetei matematice seria B — pe anul XVII — 1966

I. ARTICOLE

	Pag.
1. *Constantin P. Popovici*, Congruenţe	3
2. *Iuliana Bal*, Asupra rezolvării numerice a ecuaţiilor	49
3. *Tiberiu Weszely*, Modelul lui Poincaré	54
4. *T. Roman*, Observaţii asupra rezolvării problemelor date la a VII-a O.I.M. 1965	100, 151
5. *Edmond Nicolau*, Calculatoare electronice	145
6. *Gh. Bazacov*, Rezolvarea unor ecuaţii de gradul al IV-lea	193
7. *Maria Vidraşcu*, Unele aplicaţii ale calculului grafic în geometrie şi fizică	241
8. *Gh. Galbură*, Despre grupuri	289
9. *Valeriu Popa*, Unele exemple de grupuri	291
10. *Nicolae Peligrad*, Despre unele proprietăţi şi aplicaţii ale funcţiei de gradul I şi ale funcţiei omografice	337
11. *Ileana Kaflikiewicz*, Reprezentarea parametrică a conicelor	395
12. *I. Stamate*, Separarea rădăcinilor ecuaţii şi stabilirea unor inegalităţi	438
13. *Octav Sacter*, Unele proprietăţi geometrice deduse vectorial	481
14. *I. Stamate* şi *N. Ducaru*, Aplicaţii ale programării liniare în agricultură	529

II. EDITORIALE, DIN VIAŢA SOCIETĂŢII, PREMII, DIVERSE

1. În noul an	1
2. Activul comitetului de redacţie al G.M.B. pe 1966	2
3. Premiile Gazetei matematice seria B pe anul 1965	75
4. Alexandru Pantazi de *Gh. Th. Gheorghiu*	97
5. Rezultatul întrecerii între liceele din ţară privind activitatea extraşcolară la matematică pe anul 1965	118
6. Regulamentul întrecerii pe anul 1966	118
7. Din activitatea cercului de matematică a claselor VII de la liceul 34 din Bucureşti de *N. Teodorescu*	231
8. Evidenţiaţii la concursul de matematică 1966	287
9. La început de an şcolar de *Al. Bojin*	385
10. Nicolae Coculescu de *Constantin Drîmbă*	387
11. Descoperirea legii atracţiei universale de *Caius Iacob*	433
12. Aspecte ale concursului de matematică 1966 pentru elevi de *Tiberiu Roman*.	447
13. A VIII-a Olimpiadă internaţională de matematică ţinută la Sofia, 1966, de *T. Roman*	494
14. Premianţii la cea de-a VIII-a *O.I.M.*	496

III. PENTRU CERCURILE DE ELEVI, ARTICOLE SCURTE

1. Asupra unei expresii algebrice de *Tudor Zamfirescu*	9
2. Probleme în care intervine funcţia valoare absolută de *I. Stoian*	57
3. Proprietăţi ale funcţiei omografice aplicate la discuţia ecuaţiilor de *Octav Sacter*	157
4. O aplicaţie a diviziunii armonice de *C. Borş* şi *D. Butuc*	296
5. Raza sferei circumscrise unui tetraedru de *Doru Manolache*	343
6. Din istoricul numerelor de *Ion Bîtea*	390

IV. NOTE MATEMATICE

1. Generalizarea unei probleme din *G.M.B.* p. 370/1965 de *M. I. Focşeneanu*	12
2. Asupra problemei 5983 de *C. Herling*	13
3. Asupra problemelor 6197, 6741, 6833 de *C. Ionescu-Ţiu*	14
4. Generalizarea problemei 4830 de *Andrei Heilper* şi *Daniel Pestroiu*	62
5. Generalizarea problemei E : 1280 de *Mihai Aciu*	63
6. Asupra ariei unui poligon de *Corneliu Georgescu*	119

Pag.

7. Asupra împărțirii unui polinom prin $(x^k + 1)$ de *Grecu Eftimie* 113
8. Generalizarea problemelor 6321, 5877, 4754, 4412, 6641 și 5944 de *Petre Liviu* 115
9. Asupra problemei 6663 de *Theodor Theodoridis* 117
10. În legătură cu o problemă a lui D. Pompeiu de *I. Teodorescu* 160
11. Generalizarea problemelor 2519 și 6020 de *L. Pîrșan* 160
12. O demonstrație a teoremei lui Pascal de *N. Teodorescu* 162
13. Asupra unei inegalități de *Al. Filipoiu* 163
14. În legătură cu teorema lui Van Aubel de *Gh. Simion* 164
15. O generalizare a notei din nr. 4/1964 de *Dan Apșan* 166
16. Relații metrice într-un triunghi de *Iacob Hadîrcă* 168
17. Generalizarea unei sume trigonometrice de *Ion N. Blană* 199
18. Asupra problemelor 6641, 6906, 6919 de *Ioan I. Munteanu* 201
19. Asupra unor aplicații ale inegalității lui Jensen de *Cornel Popovici* 205
20. În legătură cu problema 7182 de *M. Grünbaum* 246
21. Generalizarea problemelor 4881, 5001 și 6925 de *C. Ionescu-Țiu* 248
22. Asupra problemelor 5833 și 6278 de *N. Păun* 344
23. Generalizarea problemei 6631 de *Ilie Ionescu* 345
24. Asupra unor probleme de maxim și minim de *Simion Sorin* 348
25. Funcție omografică și inversa ei de *D. Mihalașcu* 349
26. Unele observații cu privire la poligoanele regulate de *Justin Cornea* 401
27. Generalizarea celei de-a 2-a problemă de la *O.I.M.*, 1965 de *Dan Voiculescu* 441
28. Asupra unor inegalități de *Ion Chițescu* 446
29. Generalizarea problemei 5001 de *L. Pîrșan* 485
30. Cîteva aplicații ale inegalității lui Jensen de *Gh. Oprescu* 486
31. Inegalitatea lui Jensen și generalizarea unor probleme de *N. Teodorescu* și *Gh. Rizescu* 491
32. Formule de rezolvare a ecuației $a \cos x + b \sin x = c$ de *C. Ionescu-Țiu* . . . 534
33. În legătură cu nota : Asupra problemei 6663, de *Dan Voiculescu* 535

V. CALEIDOSCOP MATEMATIC

1. O problemă veche 39
2. O problemă curioasă 39
3. Ghicirea unui număr 40
4. Rezultate interesante 40
5. Algebra ornamentelor 298
6. Trigonometria pătratică de *Gh. Pîslaru* 298
7. Curiozități ale numerelor de *Gh. Pîslaru* 299

VI. PROBLEME REZOLVATE

6845 (350, 353), 6915 (16), 6919 (16), 6973 (17), 6976 (18), 6999 (20), 7007 (119), 7013 (21), 7018 (119), 7019 (120), 7020 (63), 7021 (64), 7022 (121), 7023 (65), 7024 (122), 7025 (65), 7026 (66), 7027 (123), 7028 (123), 7029 (124), 7030 (67), 7032 (207), 7043 (209), 7034 (69), 7035 (70), 7036 (209), 7038 (71), 7039 (72), 7040 (169), 7041 (169), 7042 (210), 7075 (170), 7077 (121), 7078 (213), 7082 (213), 7084 (172), 7085 (214), 7087 (216), 7090 (217), 7093 (172), 7095 (249), 7126 (22), 7128 (22), 7129 (23), 7130 (23), 7132 (250), 7134 (251), 7135 (251), 7136 (252), 7138 (253), 7141 (355), 7143 (254), 7145 (255), 7146 (255), 7147 (256), 7167 (256), 7168 (359), 7211 (536), 7215 (536), 7218 (300), 7220 (301), 7223 (302), 7224 (302), 7225 (304), 7226 (304), 7227 (404), 7231 (405), 7232 (406), 7233 (407), 7234 (407), 7235 (408), 7236 (409), 7237 (450), 7238 (451), 7241 (452), 7242 (452), 7243 (453), 7245 (453), 7246 (454), 7248 (455), 7251 (497), 7253 (497), 7254 (498), 7255 (500), 7256 (501), 7257 (501), 7260 (537), 7264 (361), 7284 (503), 7286 (503), 7287 (504), 7289 (538), 7292 (538). E : 2270 (73), 2326 (24), 2329 (24), 2330 (25), 2332 (26), 2334 (26), 2335 (27), 2341 (257), 2342 (73), 2344 (305), 2345 (258), 2346 (258), 2348 (74), 2349 (259), 2352 (173), 2353 (173), 2358 (305), 2359 (410), 2360 (174), 2361 (306), 2362 (307), 2365 (411), 2395 (457), 2396 (457), 2398 (457), 2405 (539) 2406 (540), 2407 (540), 2408 (540), 2409 (363).

*) În paranteză sînt trecute paginile la care se află soluțiile problemelor.

VII. CHESTIUNI DE EXAMEN, PROBLEME PROPUSE

— Subiectele lucrărilor scrise date la admiterea în Institutul de construcții din București, septembrie 1965 (7311—7314) 22
— Probleme date la admiterea în Institutul politehnic Cluj, 1965 (7317—7320) . . 28
— Probleme de bacaulaureat date în alte țări (7315, 7316, 7321, 7323, 7386, 7396, 7430—7436, 7529, 7533, 7540, 7580—7589, 7626—7632, 7718—7725, 7897, 7898)
— Probleme prezentate pentru Olimpiada internațională (7541—7550, 7590—7607, 7768—7784 (458)
— Probleme date la admitere în școli pedagogice (7325)
— Probleme fără indicație de autor (7328, 7333, 7441, 7416, 7525, 7526, 7611, 7622—7625, 7642, 7668, 7736, 7739, 7754, 7760, 7792, 7798, 7803, 7805, 7813, 7865—7872)
— Probleme date la admitere în Universitatea din Tokio (7355—7370) 77
— Probleme date la admitere în facultatea de matematică-mecanică, Iași 1965 (7371—7385) 78
— Probleme date la admiterea în Facultatea de matematică-mecanică, Timișoara 1965 (7423—7429) 126
— Subiectele date la concursul de matematică 1966 (7475—7500) 174
— Probleme date la admitere în Institutul pedagogic Timișoara 220
— Probleme date la facultatea de matematică-mecanică București, 1965, (7633—7635)
— Concursul de matematică 1966, etapa regională, (7608—7580) . . . . . .
— Problemele date la etapa finală, concurs 1966 (7664—7685) 364
— Problemele date la cea de-a VIII-a O.I.M., Sofia (7762—7767) 421
— Probleme date la maturitate 1966 (7899, 7900, 7901) 509
— Probleme date la admitere în facultatea de matematică-mecanică, București 1966 (7860—7863) 511
— Probleme date la admitere în Institutul politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" București 1966 (7820—7826). 505
— La admitere în clasa IX (E : 2432, 2343, 2437—2437, 2441—2443, 2445—2448, 2455, 2460, 2461, 2471, 2472, 2474, 2477, 2478, 2483, 2483, 2484, 2487—2492, 2498, 2503, 2504, 2517, 2518, 2542).
— La concursul de matematică pentru clasele VI—VIII. (E : 2567, 2568, 2570, 2571, 2578—2580, 2583, 2584, 2589, 2594, 2595, 7873, 7874, 7876, 7878, 7879)

VIII. PROBLEME PROPUSE REPARTIZATE PE AUTORI

Aciu Mihai (2406, 7417), *Acu D.* (7407, 7440, 7503, 7785), *Ambrozie Lelijek* (7512), *Ambrozius Iulius* (7481), *Andrei Romulus* (7454), *Andrei Viorel* (7514), *Apolozan I.* (7479), *Apșan Dan* (7558), *Apostolescu I.* (7732), *Arcip P.* (7647), *Atanasiu Ionel* (7552), *Avrămoiu Valentin* (7819), *Băghină V.* (7838), *Băluță Constantin* (7787, 7807), *Bănescu Grigore* (7806), *Bărcănescu Șerban* (7506), *Bazacov Gh.* (7484, 7755, 7839), *Bebea N.* (7843), *Bejancu Aurel* (7738, 7749), *Begazgian E.* (7851), *Bergheanu D.* (7620), *Birzan Romanel* (7397), *Bloch Ivan* (7733), *Bobancu Vasile* (7619), *Boboc Dan* (7663), *Boer Margareta* (7613, 7846), *Boghin V.* (7797), *Borcănescu Florin* (7729), *Bogza Mihai* (7788, 7794), *Bortaș Emilian* (7674), *Brînzei Dan* (7350), *Buicliu Gh.* (7327, 7568), *Bukovski E.* (7489), *Butunoiu V.* (7706), *Buță Vasile* (7438), *Candrea Ion* (7883), *Cartianu Dan* (7504, 7523), *Castraveti V.* (7638, 7641), *Cazan Sergiu* (7444), *Călugărița Gh.* (7802), *Cărăguț S.* (7852), *Chelniceanu C.* (7857), *Chițescu Ion* (7341, 7470, 7521, 7816, 7576), *Ciocan A. V.* (7505), *Cistelecan M.* (7415), *Constantinescu Laura* (7487), *Curelea Iulian* (7696), *Costăchescu V. C.* (7474, 7808), *Costiniuc D.* (7786, 7882), *Curcanu G.* (7326), *Dabija Mircea* (7809), *Duncilă Ioan* (7336, 7577), *Diaconescu A. N,* (7518), *Ducaru N.* (7856), *Dumitreasa P.* (7403), *Dumitru Petru* (7555), *Ellemer Kiss* (7338). *Fabian C.* (7737), *Farkaș Petre* (7402), 7815), *Fătu Gh. I.* (7880), *Filipoiu Alex.* (7446, 7501, 7579), *Flondor Elena* (7493, 7617), *Florea C. A.* (7790), *Focșeneanu I. M.* (7465, 7467, 7524, 7570, 7661, 7814), *Gasparie Călin* (7462), *Gereanu Ana* (7618), *Georgescu Corneliu* (7517, 7569, 7834, 7891), *Gheorghiță Vasile* (7651), *Giurgiu C.* (7729), *Goja Ion* (7848), *Grozescu Tiberiu* (7574), *Haim David* (7344), *Herling C.* (7657, 7796), *Heilper Andrei* (7401), *Hîncu Marius* (7551), *Hollinger A.* (7606), *Huniar E.* (7482, 7751, 7889), *Ionescu Ilie* (7689, 7695), *Ionescu*

N. Mihai (7692, 7700), *Ionescu Traian* (7443), *Ionescu-Ţiu C.* (7348, 7352, 7353, 7418, 7420, 7422, 7447, 7448, 7464, 7469, 7483, 7491, 7519, 7527, 7528, 7561, 7566, 7567, 7604, 7610, 7612, 7656, 7660, 7662, 7666, 7667, 7669, 7670, 7671, 7713, 7714, 7717, 7740, 7756, 7759, 7761, 7817, 7818, 7836, 7841, 7847, 7858, 7884, 7894, 7895), *Iliescu Dumitru* (7494), *Isac Emil* (7845), *Isai Savu* (7890), *Ivănescu Cezar* (7480, 7840), *Jurcă Ioan* (7453), *Kacso F. K.* (7343, 7404, 7405, 7445), *Lalescu Alex.* (7486, 7614, 7616), *Lăzărescu Răducu* (7522), *Leonte Aristide* (7450, 7564), *Liviu Petre* (7331, 7461), *Loziciu Ilie* (7476, 7753, 7850), *Lungulescu E. B.* (7699, 7702), *Lupuşor Gh.* (7687), *Maftei V. Ion* (7507, 7562, 7877), *Magăr Paraschiva* (7637), *Mageriu Florica* (7746), *Manolache I. Doru* (7421, 7571, 7708), *Marica Ştefan* (7559), *Marinov Corneliu* (7335), *Marinescu Gabriela* (7701), *Matei Augustin* (7488, 7664), *Mănescu L.* (7477, 7609, 8986), *Metter Martin* (7800), *Mihalca Dan* (7460), *Mild Cornel* (7412, 7414), *Minasian Eduard* (7712), *Mîndru C.* (7727), *Molelică Gh.* (7835), *Murariu Dorin* (7741), *Murăreci Fănică* (7844), *Musta Şt.* (7804), *Neacşu V.* (7855), *Negoescu C. N.* (7452, 7745, 7758), *Negruţiu V.* (7515), *Nicolescu Constanţa* (7686), *Oprea Miron* (7565, 7833), *Ortocol Gh.* (7887), *Parascan Ilie* (7653, 7654), *Panaite Aurel* (7648), *Păun N.* (7337, 7459, 7691, 7693, 7703, 7711, 7715, 7716), *Păunescu Alex.* (7849), *Peligrad N.* (7690, 7698, 7707, 7837), *Pestroiu Daniel* (7563, 7795), *Petrescu Aanastasie* (7658, 7829), *Petrescu N.* (7694), *Pinaru Ion* (7509), *Pirşan Liviu* (7330, 7437, 7516, 7560, 7812, 7885), *Pislaru Gheorghe* (7646), *Pop E. Gheorghe* (7408, 7881), *Popa Eugen* (7443), *Popa Gh.* (7748), *Popescu Gh.* (E : 7730, 7734, 7743, 7744, 7750), *Popescu N. Corneliu* (7351, 7354, 7419, 7455, 7472, 7659, 7801), *Predescu Valentina* (7709), *Prodea Traian* (7643, 7644, 7650), *Ralescu Dan* (7458), 7556), *Reinheimer Emilia* (7500, 7621), *Rizescu N. Gh.* (7655, 7704), *Roman T.* (7605). *Rugină Andrei* (7332, 7508), *Sacter O.* (7607, 7859, 7896), *Sava Petru* (7578), *Săndulache C.* (7345, 7456, 7640, 7645, 7649, 7652, 7810), *Şiclovan I.* (7329, 7449), *Sîrbu C.* (7554), *Sîrbu Maria* (7854), *Simon Petru* (7340, 7457, 7665), *Simion Sorin* (7710), *Sorin Florea* (7342, 7451), *Stan D.* (7511, 7842), *Stan Mihai* (7886), *Stanciu A.* (7513), *Stancu M. I.* (7791, 7892), *Stănescu Dan* (7334, 7510), *Stănescu Ilie* (7478, 7789, 7799, 7831), *Stoian Ion* (7413), *Stoican M. V.* (7502), *Stoiţescu Gh.* (7827), *Szasz Carol* (7572), *Szölösy Gheorghe* (7553), *Ştefănescu I. Mircea* (7742), *Teodorescu I.* (7557, 7603, 7613, 7672, 7832), *Teodorescu Nicolae* (7520), *Toma Perl* (7324, 7399, 7410, 7888), *Tomescu Ioan* (7471), *Tomuleanu V.* (7726, 7828), *Tudor C. N.* (7466, 7468), *Tene Lucia* (7475, 7490, 7608), *Ţigănoiu Alex.* (7441, 7735, 7747), *Tîrdea V.* (7339), *Udrişte C.* (7573, 7757, 7793), *Vasiliu Eliza* (7636, 7639), *Velescu I.* (7688, 7697), *Voiculescu Dan* (7349, 7439, 7443), *Vornişescu R.* (7853), *Weszely Tiberiu* (7575, 7830), *Zamfirescu Tudor* (7346, 7462, 7857).

IX. EXERCIŢII ŞI PROBLEME PROPUSE PENTRU CLASELE V-VIII REPARTIZATE PE AUTORI

1. *Acu D.* (E : 2429, 2551), *Airimescu Viorel* (E : 2452), *Albescu I.* (E : 2430, 2613), *Ancuţa V.* (E : 2557), *Alanasiu Ionel* (E : 2485), *Baeră B.* (E : 2434, 2467, 2501, 2508, 2513, 2565, 2581, 2605), *Băluţă C.* (E : 2532), *Barbu C. M.* (E : 2546), *Bătineţu M. D.* (E : 2592), *Boiarschi E.* (E : 2536), *Botoroagă M.* (E : 2572), *Cara Ştefan* (E : 2563), *Călugăriţa Gh.* (E : 2541), *Ciobanu V.* (R : 2545), *Climescu Gh.* (E : 2538), *Cojocaru I.* (E : 2543), *Constantinescu L.* (E : 2457), *Constantinovici S.* (E : 2475), *Corlan A.* (E : 2529, 2576, 2619), *Cornea F.* ((2620), *Cornescian I.* (E : 2533), *Copaie I.*(E : 2587, 2617), *Costăchescu V. C.* (E : 2616), *Cristea Mişu* (E : 2505), *Davidică I.* (E : 2574), *Diaconu Ilie* (E : 2596), *Dobre I. Nelu* (E : 2435, 2454, 2464, 2480, 2495, 2497, 2515, 2530, 2582, 2598, 2599, 2614), *Florescu V.* (E : 2622), *Focşeneanu V. M.* (E : 2454), *Frăticiu I.* (E : 2621), *Georgescu Corneliu* (E : 2459, 2465, 2473, 2481, 2500, 2521), *Giurgiuc Costel* (E : 2562), *Grosu Gh.* (E : 2531, 2628), *Grozescu T.* (E : 2564, 2569), *Ionescu-Ţiu C.* (E : 2449, 2462, 2463, 2494, 2506, 2509, 2522. 2523, 2524, 2544, 2624, 2630), *Ionescu V.* ((E : 2585), *Lambă Stelian* (E : 2539), *Lungulescu E,* (E : 2550, 2555), *Lupuşor Gh.* (E : 2547, 2549, 2552), *Mageriu Florica* (E : 2651), *Mangu I.* (E : 2528), *Manolache N.* (2508), *Marica Ştefan* (E : 2602, 2609), *Marcu Ion* (E : 2510), *Mazarachi Chimon* (E : 2440, 2476), *Militaru* (E : 2577), *Mirzan D.* (E : 2456, 2463, 2482, 2496, 2516, 2534, 2558, 2559, 2603), *Munteanu I.* (E : 2540, 2588, 2629), *Nistor Gh.* (E : 2586, 2601, 2623), *Ortocol Gh.* (E : 2590, 2625), *Păun N.* (E : 2553), *Peligrad N.* (E : 2556), *Petrescu N.* (E : 2458, 2554), *Petrescu V.*, (E : 2573), *Popescu N. G.* (E : 2627), *Popa V.* (E : 2560, 2566), *Popescu Ovidiu* (E : 2592), *Preda D.* (E : 2535, 2618), *Radu Gheorghiu* (E : 2444, 2469, 2499), *Rotariu I.* (E : 2514), *Rusu Dorel* (E : 2548), *Rusu I.* (E : 2626), *Sîrbu C.* (E : 2466), *Stănescu I. Dan* (E : 2493, 2597), *Stoica P. M.* (E : 2600), *Sulă Octavian* (E : 2470, 2512), *Szöllösy Gheorghe* (E : 2507), *Tache Ştefan* (E : 2591), *Tăuşanu C.* (E : 2575), *Teodorescu I.* (E : 2478, 2486), *Toma Perl* (E : 2451), *Ţigănoiu Al.* (2537), *Vasiliu Elena* (E : 2610), *Vasiliu Eliza* (E : 2520).

X. CĂRŢI NOI, POŞTA REDACŢIEI , RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

	Pag.
1. *I. St. Mușat, C. Ionescu-Țiu*, Exerciții și probleme de matematică pentru concursul de admitere în licee	40
2. *George Șt. Andonie*, Istoria matematicii în România vol. I, II	137, 552
3. *Constantin Ionescu-Bujor*, Elemente de transformări geometrice, partea a patra	232
4. *W. Sierpinski*, Ce știm și ce nu știm despre numerele prime	271
5. *C. Coșniță* și *F. Turtoi*, Culegere de probleme de matematici	271
6. *Radu Miron*, Geometria configurațiilor Myller	552
7. *I. Marinescu, C. Moineagu*, Elemente de statistică matematică și aplicațiile ei	553
8. *N. Mihăileanu*, Elemente de geometrie proiectivă	517

— *Rubrica rezolvitorilor de probleme* (41, 89, 137, 232, 272, 316, 376, 425, 471, 517, 553, 565)
Către rezolvitorii de probleme (coperta III, coperta IV)
— *Lista cărților apărute în biblioteca Societății de științe matematice* (coperta III, IV din iunie și decembrie 1966)

CĂTRE REZOLVITORII DE PROBLEME

Rezolvînd probleme pregătiți și Olimpiada matematică 1967.

Corespondenții care ne trimit probleme rezolvate trebuie să redacteze fiecare problemă separat, însoțind-o de toate calculele necesare și de figuri desenate cu îngrijire.

Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceeași foaie.

Evidențiații trebuie să aibă cel puțin 30—40 soluții bune.

Problemele care se propun de către colaboratorii revistei să fie clar alcătuite și însoțite de soluții, să fie personale, iar nu luate din cărți sau reviste. Elevii sînt sfătuiți să înceapă a propune probleme numai după ce au rezolvat un număr destul de mare de exerciții și probleme. Problemele propuse, dar necorespunzătoare, nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse au fost publicate în cărți sau reviste, este rugat să arate precis volumul și pagina unde a mai apărut enunțul sau soluția problemei respective.

La publicarea problemelor rezolvate se vor menționa rezolvitorii care au dat o bună redactare și o soluție interesantă sau mai multe metode de rezolvare.

Elevii claselor a IX-a pot trimite soluții și la problemele propuse pentru clasa VIII-a. Problemele rezolvate trebuie să fie din ultimile trei numere apărute în G.M.B. *Problemele rezolvate*, vor fi expediate în cursul unei luni și vor fi însoțite de un borderou cu numărul problemelor, scrise în ordinea crescîndă. Pe plic se va scrie școala, clasa și localitatea rezolvitorelui. Problemele propuse vor fi separate una de alta, corect rezolvate și citeț semnate. Desenele să fie făcute îngrijit pe foi separate.

Elevii claselor V—VIII vor fi anunțați în rubrica rezolvitorilor de probleme dacă trimit odată cel puțin 8 probleme bine rezolvate, iar elevii claselor IX—XI, pentru cel puțin 12 probleme bine rezolvate.

Orice elev poate trimite soluții și la probleme din clasa precedentă.

Autorii sînt rugați să semneze clar la sfîrșitul lucrării personale pe care o trimit pentru publicat și să dea adresa lor exactă.

★

În vederea clasificării rezolvitorilor de probleme și premierea celor mai distinși, rugăm pe fiecare rezolvitor care în nr. 1-12 din G. M.-B, 1966 a fost anunțat cu peste 180 rezolvări, să trimită redacției imediat după apariția n-rului 12, o fișă cu totalizarea problemelor.

★

Liceele care doresc să participe la întrecerea pe anul 1966 privind activitatea școlară la matematică, sînt invitate să trimită pînă la 31. XII. 1966, fișa cu punctajul obținut după modelul publicat în acest scop în G. M.-B pag. 118, nr. 3 din martie 1966.

Școlile generale de 8 ani pot trimite pînă la 31 XII. 1966, fișa după modelul publicat în G. M.-B nr. 3 pag. 118, răspunzînd numai la punctele a, b, c, d, g, din regulament, indicînd și numărul de clase VI, VII, și VIII pe care le-a avut școala în anul 1965-1966.

1967 JAN 17.

IN „BIBLIOTECA SOCIETĂȚII DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMANIA" AU APARUT URMĂTOARELE CĂRȚI DE MATEMATICĂ, MECANICĂ ȘI ASTRONOMIE

*1. E. RUSU: Bazele teoriei numerelor, 2. A. I. MARKUȘEVICI: Șiruri recurente, 3. N. N. VOROBIEV: Numerele lui Fibonacci, 4. P. S. ALEXANDROV: Introducere în teoria grupurilor, 5. I. S. SOMINSKI: Metoda inducției matematice, 6. GH. MIHOC: Elemente de calculul probabilităților, 7. H. IONESCU: Calcule numerice, 8. A. I. MARKUȘEVICI: Arii și logaritmi, 9. A. I. GHELFOND: Rezolvarea ecuațiilor în numere întregi, 10. O. SACTER: Despre conice și alte curbe, 11. ION IONESCU: Maxime și minime geometrice, 12. F. I. ZIGHEL: Cometele,, 12. S. SKLOWSKI: Radioastronomia, 15. V. V. ȘARONOV: Soarele și observarea lui, 16. O. KREINDLER: Elemente de calcul vectorial, 18. M. V. PENTKOVSKI: Nomograme, 19. A. KAHANE: Elemente de teoria congruențelor de drepte, 20. GH. ȚIȚEICA: Culegere de probleme de geometrie ed. V (revăzută și completată de G. D. Simionescu), 2. A. HALANAY: Introducere în teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale, 24. C. N. BERMAN: Cicloida, 25. C. BORȘ: Noțiuni de geometrie proiectivă, 29. I. S. DUBNOV: Erori în demonstrațiile geometrice, 30. H. STEINHAUS: Caleidoscop matematic, 31. C. POPOVICI: Statele, date fizice, originea și evoluția lor, 32. C. DRIMBA: Elemente de mecanică cerească, 33. C. IONESCU-BUJOR: Elemente de transformări geometrice (I), 35. GH. A. CHIȚEI: Metode pentru rezolvarea problemelor de aritmetică, 37. C. IONESCU-BUJOR: Elemente de transformări geometrice (II), 38. O. SACTER: Olimpiade matematice, 39. A. I. MARKUȘEVICI: Numere complexe și reprezentări conforme, 40. I. S. GRADSTEIN: Teorema directă și reciprocă, 41. A. I. HINCIN: Fracții continue, 42, V. A. USPENSKI: Unele aplicații ale mecanicii în matematică, 43. V. G. BOLTEANSKI: Ce este derivarea? 44. G. N. BERMAN: Despre numere și studiul numerelor, 45. A. IAGLOM și I. IAGLOM: Probleme neelementare tratate elementar, 47. G. CIUCU și G. SIMBOAN: Probleme de calculul probabilităților și statistică matematică, 47. FEODOROV: Cicloida, 48. O. SACTER: Elemente de teria ecuațiilor algebrice și transcendente, 50. C. BORȘ și D. BORȘ: Numere complexe, 52. D. RIMER: Noțiuni de teoria mulțimilor, 53. ***: Probleme actuale de matematică (conferințe ținute la cursurile de vară de la Piatra Neamț), 54. M. GHERMANESCU: Aplicații ale trigonometriei, 55. ***: Ipotezele care stau la baza geometriei de B. Riemann (studii și comentarii de E. Gergely), 57. A. HAIMOVICI: Grupuri de transformări. 58. Al. TOTH: Noțiuni de teoria construcțiilor geometrice, 60. T. ROMAN: Simetria, 61. C. IONESCU-BUJOR: Elemente de transformări geometrice (partea a treia). 63. E. NICOLAU: Introducere în cibernetică, 64. ***: Probleme actuale de matematică (conferințe ținute la cursurile de vară de la Săcele-Brașov 1962), 66. N. MIHAILA: Introducerea în programarea liniară, 66. Gh. D. SIMIONESCU: Trigonometrie sferică, 67. AGNETA VESCAN: Sumabilitatea seriilor, 68. ***: Jocuri și probleme distractive de matematici, 68. ***: Probleme actuale de matematici III, 70. N. MIHAILA: Teoria probabilităților și statistică matematică, 71. G. CIUCU, M. IOSIFESCU, R. THEODORESCU: Introducere în teoria jocurilor, 72, I. MUȘAT și C. IONESCU-ȚIU: Exerciții și probleme de matematică pentru admiterea în clasa a IX-a. 73. C. IONESCU-BUJOR: Elemente de transformări geometrice (partea a IV-a). 74. RADU MIRON: Geometria configurațiilor Myller.*

Tirajul fiind limitat, gazetele se trimit mai întîi abonaților și de aceea rugăm colaboratorii noștri să se aboneze de îndată. Prețul este de 2 lei exemplarul.

Abonamentele se pot face prin oficiile poștale locale. Pentru 12 numere 24 lei.

I. P. „Informația" — c. 4030

INDEX 14601

Lei 2